E 20577 F
99. Band Heft 3
ausgegeben am 22.07.1997

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart 1997

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 7 89 01-0, Telefax (07 11) 7 89 01-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt   Band 99, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

K. W. Gruenberg, J. Ritter, A. Weiss: On Chinburg's root number conjecture
A. Kerber: Endliche Strukturen, ihre Konstruktion und Anwendungen
D. Müller: Differentialoperatoren zweiter Ordnung und Harmonische Analysis
M. Rapoport: Analogien zwischen den Modulräumen von Vektorbündeln und von Flaggen
J. Zabczyk: Infinite dimensional diffusions in modelling and analysis

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
99 (1997) 101–109
Mathematics Subject Classification: 57 Q 99, 57 R 57

L^2-Invarianten von Mannigfaltigkeiten und Gruppen

W. Lück, Münster

Einführung

Das Ziel dieses Vortrags ist eine kurze Einführung in L^2-Invarianten wie die L^2-Betti-Zahlen und die Diskussion ihrer wichtigsten Eigenschaften und Anwendungen. Es werden außerdem die wichtigsten Vermutungen über diese Invarianten diskutiert und inwieweit sie bewiesen sind. Ausführlichere Übersichtsartikel sind [11], [19] und [23].

1 L^2-Betti-Zahlen für CW-Komplexe von endlichem Typ

Sei X ein CW-Komplex *von endlichem Typ*, d.h. jedes Gerüst von X ist endlich. Sei $\overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung von X mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Der zelluläre Kettenkomplex $C_*(\overline{X})$ von $\overline{X}$ ist ein $\mathbb{Z}\Gamma$-Kettenkomplex, dessen p-ter Kettenmodul endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}\Gamma$-Links-Modul ist. Die Menge I_p der p-Zellen in X bestimmt eine $\mathbb{Z}\Gamma$-Basis von $C_p(\overline{X})$, die bis auf Multiplikation mit Elementen in Γ und Vorzeichen ± 1 eindeutig ist. Insbesondere ist der Rang von $C_p(\overline{X})$ gleich der Anzahl der p-Zellen in $\overline{X}$. Definiere den *L^2-Kettenkomplex* von $\overline{X}$ als

$$(1.1) \quad C_*^{(2)}(\overline{X}) \quad := \quad l^2(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\overline{X}).$$

Dies ist ein Kettenkomplex von Hilbert-Räumen mit isometrischer Γ-Links-Operation und Γ-äquivarianten beschränkten Operatoren als Differentiale $c_p^{(2)}$

$$\ldots \xrightarrow{c_{p+1}^{(2)}} C_p^{(2)}(\overline{X}) = \oplus_{I_p} l^2(\Gamma) \xrightarrow{c_p^{(2)}} C_{p-1}^{(2)}(\overline{X}) = \oplus_{I_{p-1}} l^2(\Gamma) \xrightarrow{c_{p-1}^{(2)}} \ldots .$$

Definiere die *L^2-Homologie* von $\overline{X}$ als

$$(1.2) \quad H_p^{(2)}(\overline{X}) \quad := \quad \ker(c_p^{(2)})/\operatorname{clos}(\operatorname{im}(c_{p+1}^{(2)})).$$

Man beachte, daß nicht das Bild, sondern der Abschluß des Bildes des $(p+1)$-ten Differentials herausgekürzt wird. Damit wird erreicht, daß die L^2-Homologie selbst wieder ein Hilbert-Raum mit isometrischer Γ-Operation ist. Es gibt sogar für eine geeignete natürliche Zahl n eine Γ-äquivariante orthogonale Projektion $\mathrm{pr} : \oplus_n l^2(\Gamma) \longrightarrow \oplus_n l^2(\Gamma)$, deren Bild Γ-isometrisch isomorph zu $H_p^{(2)}(\overline{X})$ ist. Mit anderen Worten, $H_p^{(2)}(\overline{M})$ ist ein *endlich erzeugter Hilbert-Γ-Modul.* Falls man pr als Matrix $(\mathrm{pr}_{i,j})$ von Γ-äquivarianten beschränkten Operatoren $l^2(\Gamma) \longrightarrow l^2(\Gamma)$ auffaßt, definiert man die *p-te L^2-Betti-Zahl* von $\overline{X}$ als

$$(1.3) \quad b_p^{(2)}(\overline{X}) \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{pr}_{i,i}(e), e\rangle_{l^2(\Gamma)} \qquad \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

wobei $e \in l^2(\Gamma)$ durch das Einselement in Γ gegeben ist. Man nennt diese Zahl auch die *von-Neumann-Dimension* des endlich erzeugten Hilbert-Γ-Moduls $H_p^{(2)}(\overline{M})$. Sie ist genau dann trivial, wenn $H_p^{(2)}(\overline{M})$ trivial ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Projektion pr und hängt nur von der Γ-Isometrieklasse von $H_p^{(2)}(\overline{X})$ ab.

Das folgende Theorem stellt die wichtigsten Eigenschaften dieser Invarianten zusammen.

Theorem 1.1. 1. *Homotopieinvarianz*
Seien $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ reguläre Überlagerungen der CW-Komplexe X und Y von endlichem Typ mit derselben Gruppe Γ als Gruppe der Decktransformationen. Sei $f : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ eine Γ-äquivariante Abbildung, die nach Vergessen der Γ-Operationen eine Homotopieäquivalenz ist. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{X}) = b_p^{(2)}(\overline{Y}) \qquad \text{für } 0 \leq p;$$

2. *Euler-Poincaré-Formel*
Sei $\overline{X}$ eine reguläre Überlagerung des endlichen CW-Komplexes X. Dann gilt für die Euler-Charakteristik

$$\chi(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \cdot b_p^{(2)}(\overline{X});$$

3. *Poincaré-Dualität*
Sei $\overline{M}$ eine reguläre Überlagerung der geschlossenen Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{M}) = b_{n-p}^{(2)}(\overline{M}) \qquad \text{für } 0 \leq p;$$

4. *Künneth-Formel*
Seien X und Y CW-Komplexe von endlichem Typ. Seien $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ reguläre Überlagerungen von X und Y. Dann ist $\overline{X} \times \overline{Y}$ eine reguläre Überlagerung von $X \times Y$, und es gilt

$$b_n^{(2)}(\overline{X} \times \overline{Y}) = \sum_{p+q=n} b_p^{(2)}(\overline{X}) \cdot b_q^{(2)}(\overline{Y}) \qquad \text{für } n \geq 0;$$

5. *Morse-Ungleichungen*
Sei $\overline{X}$ eine reguläre Überlagerung eines CW-Komplexes X von endlichem Typ. Sei $\beta_p(X)$ die Anzahl der p-Zellen von X. Dann gilt

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \cdot b_p^{(2)}(\overline{X}) \leq \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \cdot \beta_p(X) \qquad \text{für } n \geq 0;$$

6. *L^2-Hodge-deRham-Zerlegung*
Sei $\overline{M}$ eine reguläre Überlagerung der orientierten geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Sei $\mathcal{H}^p_{(2)}(\overline{M})$ der Raum der harmonischen glatten L^2-p-Formen auf $\overline{M}$, d.h. glatte p-Formen ω auf $\overline{M}$ derart, daß $\int_{\overline{M}} \omega \wedge *\omega$ endlich ist und ω im Kern des Laplace-Operators liegt. Dann definiert Integration einen Γ-äquivarianten invertierbaren Operator

$$\mathcal{H}^p_{(2)}(\overline{M}) \longrightarrow H^p_{(2)}(\overline{M});$$

7. *Multiplikativität unter endlichen Überlagerungen*
Sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Sei $\Gamma_0 \subset \Gamma$ eine Untergruppe von Γ von endlichem Index n. Wir erhalten eine reguläre Überlagerung $\overline{\overline{X}}$ durch $\overline{X} \longrightarrow \overline{X}/\Gamma_0$. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{\overline{X}}) = n \cdot b_p^{(2)}(\overline{X}) \qquad \textit{für } p \geq 0;$$

8. *L^2-Betti-Zahlen für endliche Gruppen Γ*
Sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit der endlichen Gruppe Γ als Decktransformationsgruppe. Dann ist $\overline{X}$ ein CW-Komplex von endlichem Typ. Sei $b_p(\overline{X})$ die gewöhnliche p-te Betti-Zahl. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{X}) = \frac{1}{|\Gamma|} \cdot b_p(\overline{X}) \qquad \textit{für } p \geq 0;$$

9. *Nullte L^2-Betti-Zahl*
Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Dann gilt

$$b_0^{(2)}(\overline{X}) = \begin{cases} \frac{1}{|\Gamma|} & \textit{falls } |\Gamma| < \infty; \\ 0 & \textit{sonst}; \end{cases}$$

10. *S^1-Operationen und L^2-Betti-Zahlen*
Sei M eine zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit mit glatter S^1-Operation. Es sei angenommen, daß für einen Orbit S^1/H (und damit für alle Orbits) die Inklusion des Orbits in M eine Abbildung auf den Fundamentalgruppen mit unendlichem Bild induziert. (Insbesondere hat die S^1-Operation keine Fixpunkte.) Dann gilt für die universelle Überlagerung $\widetilde{M}$

$$b_p^{(2)}(\widetilde{M}) = 0 \qquad \textit{für } p \geq 0.$$

11. $\Gamma = \mathbb{Z}^n$
Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit $\mathbb{Z}^n$ als Gruppe der Decktransformationen. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\widetilde{M}) = \dim_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]_{(0)}} \left(H_p(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]_{(0)} \right). \qquad \blacksquare$$

Die Beweise dieser Aussagen findet man in [5], [14], [18], [20], [22] und [24].

Die L^2-Hodge-deRham-Zerlegung in Theorem 1.1.6 beweist für eine reguläre Überlagerung $\overline{M} \longrightarrow M$ einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit die folgende analytische Interpretation. Sei $e^{-t\Delta_p}(\overline{x}, \overline{y})$ der Wärmeleitungskern auf $\overline{M}$. Da $e^{-t\Delta_p}(\overline{x}, \overline{x})$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraums endlicher Dimension ist, ist seine Spur $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}$ definiert. Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für die Γ-Operation auf $\overline{M}$. Dann gilt

$$(1.5) \quad b_p^{(2)}(\overline{M}) \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{F}} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\left(e^{-t\Delta_p}(\overline{x}, \overline{x})\right) d\,\overline{x}.$$

In dieser Form wurden die L^2-Betti-Zahlen ursprünglich von Atiyah [1] eingeführt.

2 Grundlegende Vermutungen

Die folgenden Vermutungen sind vielleicht die wichtigsten offenen Probleme über L^2-Betti-Zahlen.

Vermutung 2.1 *Sei Γ eine endlich präsentierte Gruppe.*
1. *(Atiyah-Vermutung) Sei M eine zusammenhängende geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\widetilde{M}$ und Γ als Fundamentalgruppe. Dann ist $b_p^{(2)}(\widetilde{M})$ eine rationale Zahl. Falls die Gruppe Γ torsionsfrei ist, ist sie sogar ganzzahlig.*
2. *Sei $A \in M(m, n, \mathbb{C}\Gamma)$ eine Matrix. Sie induziert einen beschränkten Γ-äquivarianten Operator $l^2(\Gamma)^m \longrightarrow l^2(\Gamma)^n$. Sein Kern ist ein endlich erzeugter Hilbert-Γ-Modul. Dessen von-Neumann-Dimension ist rational und, falls Γ torsionsfrei ist, sogar ganzzahlig.*
3. *(Kaplanski-Vermutung) Der rationale Gruppenring $\mathbb{Q}\Gamma$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn Γ torsionsfrei ist;*
4. *(Singer-Vermutung) Die L^2-Betti-Zahlen der universellen Überlagerung einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit nicht-positiver Schnittkrümmung verschwinden außerhalb der mittleren Dimension. Falls $n = 2m$ gerade ist, gilt*

$$(-1)^m \cdot \chi(M) \geq 0;$$

5. *(Hopf-Vermutung) Die L^2-Betti-Zahlen der universellen Überlagerung einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit negativer Schnittkrümmung verschwinden außerhalb der mittleren Dimension. Falls $n = 2m$ gerade ist, gilt*

$$\begin{aligned} b_m^{(2)}(\widetilde{M}) &> 0; \\ (-1)^m \cdot \chi(M) &> 0. \end{aligned}$$ ■

Die Atiyah-Vermutung wurde von Atiyah [1] zumindest als Frage formuliert. Die ersten beiden Vermutungen sind äquivalent und implizieren die Kaplanski-Vermutung. Die Singer-Vermutung macht auch für asphärische geschlossene Mannigfaltigkeiten Sinn. *Asphärisch* bedeutet, daß die universelle Überlagerung homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Jede Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Schnittkrümmung ist asphärisch. Die zweite Vermutung scheint mit der Isomorphismus-Vermutung in algebraischer K-Theorie von Farrell und Jones [8] und mit der Baum-Connes-Vermutung [2] in Verbindung zu stehen.

3 Übersicht über Sätze, die Spezialfälle der grundlegenden Vermutungen beweisen

Die Klasse der *elementar-amenablen Gruppen* ist die kleinste Klasse von Gruppen, die alle endlichen und alle abelschen Gruppen enthält, abgeschlossen unter Untergruppen, Faktorgruppen und Erweiterungen und abgeschlossen unter gerichteten Vereinigungen ist. Sei $\mathcal{C}$ die kleinste Klasse von Gruppen mit folgenden Eigenschaften: i.) sie enthält alle freien Gruppen, ii.) sie ist abgeschlossen unter gerichteten Vereinigungen, iii.) es gilt $G \in \mathcal{C}$, falls G eine normale Unterguppe H enthält derart, daß H zu $\mathcal{C}$ gehört und G/H elementar-amenabel ist.

Theorem 3.1 (Linnell [12]). *Die Vermutung 2.1.2 ist für Gruppen Γ in der Klasse $\mathcal{C}$ richtig.* ■

Eine irreduzible kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit heißt *exzeptionell*, falls es keine endliche Überlagerung gibt, die homotopieäquivalent zu einer Haken-, hyperbolischen oder Seifert-Mannigfaltigkeit ist. Die Geometrisierungs-Vermutung von Thurston oder die Waldhausen-Vermutung implizieren, daß es so ein M nicht gibt.

Theorem 3.2 (Lott and Lück [14]). *Sei M eine kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\widetilde{M}$. Sei $M = M_1 \sharp \ldots \sharp M_r$ die Primzerlegung von M. Es sei vorausgesetzt, daß keiner der Primfaktoren exzeptionell ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
b_0^{(2)}(\widetilde{M}) &= 0;\\
b_1^{(2)}(\widetilde{M}) &= (r-1) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\mid \pi_1(M_j) \mid} - \chi(M) + \left|\{C \in \pi_0(\partial M) \mid C \cong S^2\}\right|;\\
b_2^{(2)}(\widetilde{M}) &= (r-1) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\mid \pi_1(M_j) \mid} + \left|\{C \in \pi_0(\partial M) \mid C \cong S^2\}\right|;\\
b_3^{(2)}(\widetilde{M}) &= 0.
\end{aligned}$$

■

Insbesondere beweist dieser Satz die Atiyah-Vermutung und die Singer-Vermutung für 3-Mannigfaltigkeiten M, die den oben erwähnten Bedingungen genügen.

Die Hopf-Vermutung ist von Dodziuk [6] für hyperbolische Mannigfaltigkeiten bewiesen worden.

Theorem 3.3 (Donnelly and Xavier [7]). *Sei M eine geschlossene n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung zwischen -1 und D für eine reelle* Zahl D mit $-1 \leq D < -\frac{(n-2)^2}{(n-1)^2}$ liegt. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\widetilde{M}) = 0 \qquad \text{\textit{für} } p \neq \frac{n}{2}, \frac{n \pm 1}{2}.$$

Insbesondere folgt für solches M und gerades n die Singer-Vermutung. ■

Theorem 3.4 (Gromov [10]). *Die Hopf-Vermutung ist richtig für Kähler-Mannigfaltigkeiten.* ■

Gromov beweist ein stärkeres Resultat für sogenannte Kähler-hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Jede Kähler-Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung ist, ist Kähler-hyperbolisch.

Sei $l^{\infty}(\Gamma, \mathbb{R})$ der Raum der beschränkten Funktionen von Γ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm. Bezeichne 1 die konstante Funktion mit Wert 1. Eine Gruppe Γ heißt *amenabel*, falls es einen Γ-invarianten linearen Operator $\mu : l^{\infty}(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu(1) = 1$ gibt, der

$$\inf\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mu(f) \leq \sup\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \qquad \textit{für } f \in l^{\infty}(\Gamma)$$

erfüllt. Jede elementar-amenable Gruppe ist amenabel.

Theorem 3.5 (Cheeger and Gromov [4]). *Sei X ein asphärischer CW-Komplex von endlichem Typ, dessen Fundamentalgruppe eine nicht-triviale normale amenable Untergruppe enthält. Dann gilt*

$$b_p^{(2)}(\widetilde{X}) = 0 \qquad \textit{für } p \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Insbesondere beweist dies die Singer-Vermutung für Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe eine nicht-triviale normale amenable Unterguppe enthält.

4 Weitere Resultate über L^2-Betti-Zahlen

Sei $\overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung eines CW-Komplexes von endlichem Typ mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Wir nehmen an, daß Γ *residuell endlich ist*, d.h. es gibt eine absteigende Folge von normalen Untergruppen $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_m \supset \Gamma_{m+1} \supset \ldots$ derart, daß der Index $[\Gamma : \Gamma_m]$ für alle $m \geq 0$ endlich und der Durchschnitt $\cap_{m \geq 0} \Gamma_m$ die triviale Gruppe ist. Sei $p_m : X_m = \Gamma_m \backslash \overline{X} \longrightarrow X$ die endliche reguläre Überlagerung von X, die zu $\Gamma_m \subset \Gamma$ gehört. Sei $b_p(X_m)$ die gewöhnliche p-te Betti-Zahl von X_m. Folgendes Resultat besagt, daß die L^2-Betti-Zahlen in gewissem Sinne asymptotische Betti-Zahlen sind.

Theorem 4.1 (Lück [17]). *Unter den Bedingungen oben gilt für alle $p \geq 0$*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{b_p(X_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} = b_p^{(2)}(\overline{X}). \qquad \blacksquare$$

Die L^2-Betti-Zahlen von Abbildungstori verschwinden aufgrund des folgenden Resultats.

Theorem 4.2 (Lück [16]). *Sei F ein zusammenhängender CW-Komplex von endlichem Typ und $f : F \longrightarrow F$ eine Selbstabbildung. Sei*

$$\mu : \pi_1(T_f) \xrightarrow{\phi} \Gamma \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}$$

eine Faktorisierung von μ in surjektive Homomorphismen. Sei $\overline{T_f} \longrightarrow T_f$ die reguläre Überlagerung des Abbildungstorus T_f mit Γ als Gruppe der Decktransformationen, die zu ϕ gehört. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{T_f}) = 0 \qquad \textit{für } p \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Dieser letzte Satz geht wesentlich in den Beweis des folgenden Satzes ein und zeigt, daß bestimmte Klassen von potentiellen Gegenbeispielen zur Singer-Vermutung keine Gegenbeispiele sein können.

Theorem 4.3 (Lück [18]). *Sei $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ eine Faserung von Räumen derart, daß F bzw. E den Homotopietyp eines zusammenhängenden CW-Komplexes mit endlichem 1-Gerüst bzw. 2-Gerüst hat. Falls das Bild des Homomorphismus $\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E)$ unendlich ist und $\pi_1(B)$ ein Element unendlicher Ordnung enthält, so gilt*

$$b_1^{(2)}(\widetilde{E}) = 0. \qquad \blacksquare$$

5 Anwendungen auf Gruppen

Der Satz 4.3 impliziert folgendes gruppentheoretisches Resultat. Der *Defekt* $\mathrm{def}(\Gamma)$ einer endlich präsentierten Gruppe Γ ist definiert als das Maximum über die Differenz der Anzahl der Erzeuger und der Anzahl der Relationen aller Präsentationen von Γ.

Theorem 5.1 (Lück [18]). *Sei $1 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi \longrightarrow 1$ eine exakte Sequenz von Gruppen derart, daß Δ endlich erzeugt und unendlich ist, Γ endlich präsentiert ist und ein Element unendlicher Ordnung enthält. Dann gilt*

1. $b_1^{(2)}(\Gamma) := b_1^{(2)}(E\Gamma) = 0$;
2. $\mathrm{def}(\Gamma) \leq 1$;
3. *Sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte 4-Mannigfaltigkeit mit Γ als Fundamentalgruppe. Dann gilt für die Signatur $\mathrm{sign}(M)$ und die Euler-Charakteristik $\chi(M)$*

$$|\mathrm{sign}(M)| \leq \chi(M). \qquad \blacksquare$$

Thompsons Gruppe F ist die Gruppe der orientierungserhaltenden dyadischen PL-Automorphismen des Einheitsintervalls $[0,1]$, wobei dyadisch bedeutet, daß alle Steigungen ganzzahlige Potenzen von 2 sind und die Bruchstellen in $\mathbb{Z}[1/2]$ liegen. Sie hat die Präsentation

$$F = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \mid x_i^{-1} x_n x_i = x_{n+1} \textit{ für } i < n \rangle.$$

Diese Gruppe ist nicht elementar-amenabel und enthält keine Untergruppe, die frei vom Rang 2 ist. Insofern ist die Frage interessant, ob F amenabel ist, da F je nach Antwort ein Gegenbeispiel zu der Vermutung ist, daß jede endlich präsentierte amenable Gruppe elementar-amenabel ist bzw. jede endlich präsentierte nicht-amenable Gruppe eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält. Da der klassifizierende Raum BF von endlichem Typ ist, kann aufgrund des Satzes 3.5 F nur amenabel sein, wenn alle ihre L^2-Betti-Zahlen verschwinden. Satz 4.2 impliziert

Theorem 5.2. *Die L^2-Betti-Zahlen der Gruppe F sind alle trivial.* $\blacksquare$

Folgender Satz ist eine Konsequenz aus der Euler-Poincaré-Formel aus Satz 1.4.2 und Satz 3.5.

Theorem 5.3. *Sei Γ eine Gruppe, deren klassifizierender Raum $B\Gamma$ ein endlicher CW-Komplex ist und die eine unendliche normale amenable Untergruppe enthält. Dann gilt*

$$\chi(B\Gamma) = 0. \qquad \blacksquare$$

6 Kurzer Überblick über L^2-Torsion

Sei X ein zusammenhängender endlicher CW-Komplex. Wir nehmen an, daß er L^2-azyklisch ist, d.h. die L^2-Betti-Zahlen der universellen Überlagerung sind alle trivial. Unter der technischen Bedingung, daß X von Determinanten-Klasse ist, kann man die L^2-Torsion der universellen Überlagerung definieren

(6.1) $\rho^{(2)}(\widetilde{X}) \quad \in \quad \mathbb{R}.$

Diese technische Bedingung ist erfüllt, falls die sogenannten Novikov-Shubin-Invarianten von $\widetilde{X}$ alle positiv sind oder die Fundamentalgruppe von X residuell endlich ist. Vermutlich ist die Bedingung immer erfüllt, und wir werden der Einfachheit halber stillschweigend davon ausgehen, daß X von Determinanten-Klasse ist. Es gibt eine analytische und eine kombinatorische Version der L^2-Torsion, die jeweils die L^2-Version der analytischen Ray-Singer-Torsion und der Reidemeister-Torsion darstellen. Die L^2-Version wurde in [13], [20] und [21] definiert. Die Gleichheit der analytischen und der kombinatorischen Version wurde in [3] bewiesen. Die kombinatorische L^2-Torsion ist eine Invariante des einfachen Homotopietyps und erfüllt eine Summenformel, Faserungsformel, Poincaré-Dualität und ist multiplikativ unter endlichen Überlagerungen [15]. Bei der Summenformel und der Faserungsformel ist zu beachten, daß die Inklusion der Teilräume bzw. der Faser in den Totalraum eine Injektion auf den Fundamentalgruppen induziert. Es gibt einen kombinatorischen Zugang, der es beispielsweise ermöglicht, die L^2-Torsion der universellen Überlagerung $\widetilde{M}$ einer hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit M aus einer Präsentation der Fundamentalgruppe abzulesen, ohne M selbst zu kennen [15]. Das ist insofern interessant, als das Volumen einer geschlossenen hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit bis auf eine Konstante die L^2-Torsion ihrer universellen Überlagerung ist [13], [21]. Für geschlossene asphärische Mannigfaltigkeiten scheint es eine Beziehung zwischen der L^2-Torsion und dem simplizialen Volumen von Gromov [9] zu geben. Es gibt die Vermutung, daß das Verschwinden des simplizialen Volumens für eine orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit M das Verschwinden ihrer L^2-Betti-Zahlen und ihrer L^2-Torsion impliziert. Beispielsweise weiß man für eine asphärische geschlossene Mannigfaltigkeit M mit nicht-trivialer S^1-Operation, daß das simpliziale Volumen von M, die L^2-Betti-Zahlen von $\widetilde{M}$ und die L^2-Torsion von $\widetilde{M}$ verschwinden.

Literatur

[1] Atiyah, M.: *„Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras“*, Astérisque 32, 43 - 72 (1976)

[2] Baum, P., Connes, A. and Higson, R.: *„Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras“*, in „C^*-algebras“, editor: Doran, Contemp. Math. 167, 241 - 291 (1994)

[3] Burghelea, D., Friedlander, L., Kappeler, T. and McDonald, P.: „*Analytic and Reidemeister torsion for representations in finite type Hilbert modules*", preprint, to appear in GAFA (1996)

[4] Cheeger, J. and Gromov, M.: „*L^2-cohomology and group cohomology*", Topology 25, 189 - 215 (1986)

[5] Dodziuk, J.: „*DeRham-Hodge theory for L^2-cohomology of infinite coverings*", Topology 16, 157 - 165 (1977)

[6] Dodziuk, J.: „*L^2-harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds*", Proc. of the AMS 77, 395 - 400 (1979)

[7] Donnelly, H. and Xavier, F.: „*On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds*", Amer. J. Math. 106, 169 - 185 (1984)

[8] Farrell, F.T. and Jones, L.E.: „*Isomorphism conjectures in algebraic K-theory*", J. of the AMS 6, 249 - 298 (1993)

[9] Gromov, M.: „*Volume and bounded cohomology*", Publ. Math. IHES 56, 5 - 100 (1982)

[10] Gromov, M.: „*Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*", J. of Diff. Geom. 33, 263 - 292 (1991)

[11] Gromov, M.: „*Asymptotic invariants of infinite groups*", in „Geometric group theory volume 2", Proc. of the Symp. in Sussex 1991, edited by G.A. Niblo and M.A. Roller, Lecture Notes Series 182, Cambridge University Press (1993)

[12] Linnell, P.: „*Division rings and group von Neumann algebras*", Forum Math. 5, 561 - 576 (1993)

[13] Lott, J.: „*Heat kernels on covering spaces and topological invariants*", J. of Diff. Geom. 35, 471 - 510 (1992)

[14] Lott, J. and Lück, W.: „*L^2-topological invariants of* 3*-manifolds*", Invent. Math. 120, 15 - 60 (1995)

[15] Lück, W.: „*L^2-torsion and* 3*-manifolds*", Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology Volume III „Low-dimensional topology", Knoxville 1992, editor: Johannson, K., International Press, 75 - 107 (1994)

[16] Lück, W.: „*L^2-Betti-numbers of mapping tori and groups*", Topology 33, 203 - 214 (1994)

[17] Lück, W.: „*Approximating L^2-invariants by their finite-dimensional analogues*", GAFA 4, 455 - 481 (1994)

[18] Lück, W.: „*Hilbert modules and modules over finite von Neumann algebras and applications to L^2-invariants*", preprint, to appear in Math. Annalen (1995)

[19] Lück, W.: „*L^2-invariants of regular coverings of compact manifolds and CW-complexes*", to appear in „handbook of geometry", editors: Davermann, R.J. and Sher, R.B., Elsevier (1997)

[20] Lück, W. and Rothenberg, M.: „*Reidemeister torsion and the K-theory of von Neumann algebras*", *K*-theory 5, 213 - 264 (1991)

[21] Mathai, V.: „*L^2-analytic torsion*", J. of Funct. Analysis 107, 369 - 386 (1992)

[22] Novikov, S. and Shubin, M.: „*Morse inequalities and von Neumann II_1-factors*", Dokl. Akad. Nauk. 34 no. 1, 289 - 292 (1986), Soviet. Math. Dokl. 34 no. 1, 79 - 82 (1987)

[23] Pansu, P.: „*Introduction to L^2-Betti-numbers*", in „Riemannian Geometry", editors: Lovric, M., Min Oo, M. and Wang, McK. ed., Fields Institute Monographs 4, Amer. Math. Soc., 53 - 86 (1996)

[24] Zucker, S.: „*$L_{(2)}$-cohomology of warped products and arithmetic groups*", Invent. Math. 70, 169 -218 (1982)

Wolfgang Lück
Fachbereich für Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Einsteinstr. 62
48149 Münster, Germany
email: lueck@math.uni-muenster.de
Fax: 0251 838370
INTERNET: http://wwwmath.uni-muenster.de/math/u/Lueck/

(*Eingegangen: 20. 12. 1996*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 99 (1997) 110–121

Pseudodifferential boundary problems and applications

G. Grubb, Copenhagen

Introduction

In this lecture, we start by spending some time on recalling the features of a fundamental tool in analysis: the Fourier transformation, hoping that this will be convenient for those present that are not experts in our field, Partial Differential Equations. This tool is necessary for the following explanation of the mechanisms of pseudodifferential operators. Later in the talk we go on to more recent research results with increasing rapidity, trying to give just a glimpse of what can be achieved.

Plan of the talk:

1. The Fourier transformation.
2. Pseudodifferential operators.
3. Boundary value problems.
4. Parameter-dependent calculi and applications.

1 The Fourier transformation

The central tool used in the theory is *the Fourier transformation*. Let us recall its definition and basic properties.

When $f(x)$ is a sufficiently nice complex-valued function on Euclidean space $\mathbb{R}^n$, its Fourier transform $\mathcal{F}f$, also denoted $\hat{f}$, is another function on $\mathbb{R}^n$ defined by the formula

$$(1.1)\quad [\mathcal{F}f](\xi) = \hat{f}(\xi) =: \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Here $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ and i is the imaginary unit. The formula makes sense e.g., when $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$; then $\hat{f}$ is a bounded continuous function. It is often convenient to consider the smaller space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ consisting of the C^∞ functions f on $\mathbb{R}^n$, for which f and all its derivatives are $O((1+|x|)^{-N})$, any N (the Schwartz space of rapidly decreasing functions). For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ one has

$$\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)) = i\xi_j \hat{f}(\xi),$$
$$(1.2)\qquad \mathcal{F}(x_j f(x)) = i\frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{f}(\xi),$$

where the functions in the right hand side are bounded and continuous; then also the Fourier transforms of higher derivatives of f and higher order polynomials times f are bounded and continuous, and one sees from the formulas that in fact $\hat{f}$ belongs to $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Here one has the important *Fourier inversion formula*, stating that $\mathcal{F}$ is a bijection of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ onto itself with a very similar operator as inverse:

$$(1.3)\qquad [\mathcal{F}^{-1}g](x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}g(\xi)\,d\xi.$$

$\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}^{-1}$ are continuous with respect to a suitable (Fréchet space) topology on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

The information in the first line of (1.2) is very important. It tells us that $\mathcal{F}$ *turns differentiation into multiplication*. So, the complicated operator of taking a derivative is replaced by the much simpler operator of multiplying with a coordinate. Let us introduce a multi-index notation and a notation for derivatives where the factor i is built in from the start:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \text{ when } \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n,\quad \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\},$$
$$(1.4)\qquad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n.$$

Then the first formula in (1.2) gives

$$(1.5)\qquad \mathcal{F}(D^\alpha f) = \xi^\alpha f.$$

Another important property of the Fourier transform is that it is (modulo a suitable constant) an *isometry in L_2-norm*, the Parseval-Plancherel theorem:

$$(1.6)\qquad \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n/2}\|\mathcal{F}f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

From this fact together with the denseness of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ and the inversion property on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, follows that $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ extends by closure to *an isometry of $L_2(\mathbb{R}^n)$ onto $L_2(\mathbb{R}^n)$* (a unitary mapping).

The extension of $\mathcal{F}$ defined in this way is again denoted $\mathcal{F}$. (There are various ways to deal with the powers of 2π that always pop up in the theory – some people regard them as "nuisance factors" and omit them, others follow them carefully and consider this a useful way to check if one's calculations are correct.)

Now one can also define a much larger extension of $\mathcal{F}$, namely the extension to an operator in the dual space $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (the Schwartz space of distributions), by the formula

$$(1.7)\qquad \langle \mathcal{F}u,\varphi\rangle = \langle u,\mathcal{F}\varphi\rangle, \text{when } u\in\mathcal{S}',\ \varphi\in\mathcal{S}.$$

(Here $\langle v, \varphi \rangle$ is the value of the functional $v \in \mathcal{S}'$ on $\varphi \in \mathcal{S}$.) This $\mathcal{F}$ is moreover an extension of $\mathcal{F}$ defined on L_2. In fact, there are natural (continuous) imbeddings $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ such that the distribution duality $\langle v, \varphi \rangle$ is a generalization of the integral $\int_{\mathbb{R}^n} v\,\varphi\,dx$ (coincides with it when $v \in L_2$), and a formula like (1.7) holds for functions. $\mathcal{F}$ is also a bijection of $\mathcal{S}'$ onto itself, and the rules (1.2), (1.5) extend to $\mathcal{S}'$.

The distributional definition of $\mathcal{F}$ is very useful because it makes all kinds of calculations legal (regardless of integrability and differentiability etc.). On the other hand, when one works on a classical problem by use of the distribution space $\mathcal{S}'$, one often has to supply this with a differentiability discussion, finding out to what extent the properties one studies hold in a classical sense (not just in the distribution sense).

The Fourier transform on $\mathcal{S}'$ allows an easy generalization of the definition of the *Sobolev spaces* H^s to all real values of s. When s is a positive integer, $H^s(\mathbb{R}^n)$ is defined as the space of L_2 functions such that the derivatives up to order s are in L_2. In view of (1.5) and (1.6), this means that $\xi^\alpha \hat{f} \in L_2$ for all α with length $|\alpha| \leq s$. An equivalent statement is that $\langle \xi \rangle^s \hat{f} \in L_2$, where

$$(1.8) \quad \langle \xi \rangle =: (1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}.$$

This is generalized to arbitrary $s \in \mathbb{R}$ by setting

$$(1.9) \quad H^s(\mathbb{R}^n) =: \{\, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n) \,\};$$

it is a Hilbert space with the norm $\|u\|_s = (2\pi)^{-n/2} \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}\|_{L_2}$ (note that $H^0 = L_2$). The number s measures "how many derivatives u has" in an L_2-sense. There is a hierarchy of spaces

$$(1.10) \quad \begin{aligned} &\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s'}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n) \\ &\qquad \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

for $s \geq s' \geq 0$; and H^{-s} has a natural identification with the dual space of H^s with respect to a generalization of $\langle v, \overline{\varphi} \rangle$.

2 Pseudodifferential operators

The Fourier theory gives an easy way to solve certain partial differential equations. A very simple example is the following equation:

$$(2.1) \quad (1 - \Delta)u = f \text{ on } \mathbb{R}^n.$$

Here Δ is the Laplace operator $\partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$. Assuming that u and f belong to $\mathcal{S}'$, we reduce the equation by Fourier transformation to

$$(2.2) \quad (1 + |\xi|^2)\hat{u} = \hat{f},$$

and this has the unique solution

$$(2.3) \quad \hat{u} = \frac{1}{1 + |\xi|^2} \hat{f}.$$

So we get the formula for the solution of the original equation:

$$(2.4)\quad u = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{1+|\xi|^2}\mathcal{F}f\Big) =: \mathrm{OP}\Big(\frac{1}{1+|\xi|^2}\Big)f$$

The operator $\mathrm{OP}(\frac{1}{1+|\xi|^2})$, which is composed of a Fourier transformation, a multiplication (by $\frac{1}{1+|\xi|^2}$) and an inverse Fourier transformation, is a first example of a *pseudodifferential operator* (ψdo). More generally, we can define

$$(2.5)\quad \mathrm{OP}\,(p(\xi))f = \mathcal{F}^{-1}(p(\xi)\mathcal{F}f)$$

when p is a given function of ξ; p is called the *symbol* of the pseudodifferential operator $\mathrm{OP}(p)$. Such operators clearly have the convenient property:

$$(2.6)\quad \mathrm{OP}\,(p(\xi))\,\mathrm{OP}(q(\xi)) = \mathrm{OP}\,(p(\xi)q(\xi)),$$

i.e., composition of operators corresponds to multiplication of symbols. This was in fact what gave the solution to (2.1); the composition equation $(1-\Delta)Q = 1$ was replaced by the multiplication equation $(1+|\xi|^2)q(\xi) = 1$, whose solution was $q = \frac{1}{1+|\xi|^2}$, so we could take $Q = \mathrm{OP}(\frac{1}{1+|\xi|^2})$.

What we really need is actually more complicated, because differential operators generally have *variable coefficients.* A symbol p is usually taken to depend on x also, and we define

$$(2.7)\quad \begin{aligned} \mathrm{OP}\,(p\,(x,\xi))f &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{f}\,d\xi \\ &\big(= \{\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[p\,(z,\xi)(\mathcal{F}f)(\xi)]\}_{z=x}\big). \end{aligned}$$

Then, for example, a differential operator $A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ with C^∞ coefficients $a_\alpha(x)$ can be written as

$$(2.8)\quad \begin{aligned} A &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\mathcal{F}^{-1}\xi^\alpha\mathcal{F} = \mathrm{OP}\,(a(x,\xi)), \\ &\text{where } a\,(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \text{the symbol of } A. \end{aligned}$$

For operators as in (2.7) we do not have a simple product rule like (2.6). But it is important here that for "reasonable choices" of symbols, one has something that is approximately as good:

$$(2.9)\quad \mathrm{OP}\,(p(x,\xi))\;\mathrm{OP}\,(q(x,\xi)) = \mathrm{OP}\,(p(x,\xi)q(x,\xi)) + \mathcal{R},$$

where $\mathcal{R}$ is an operator that is "of lower order" than $\mathrm{OP}\,(pq)$.

Let us describe one of the reasonable choices, namely the space S^m of so-called *classical* (polyhomogeneous) symbols of order m:

Let $m \in \mathbb{R}$. A function $p(x,\xi)$ is in S^m when it is C^∞ and there is a sequence of C^∞ functions $p_{m-j}(x,\xi)$, $j \in \mathbb{N}$, such that

$$p_{m-j}(x, t\xi) = t^{m-j} p_{m-j}(x, \xi) \text{ for } |\xi| \geq 1,\ t \geq 1,$$
$$\text{(2.10)} \quad D_\xi^\alpha D_x^\beta [p(x, \xi) - \sum_{j<J} p_{m-j}(x, \xi)] \text{ is } O(\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|-J}) \text{ for all } \alpha, \beta, J.$$

We then say that $p \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{m-j}$ in S^m. The O-estimates should at least hold uniformly for x in compact sets; this can be supplied with conditions for $|x| \to \infty$.

Early versions of the calculus were given in e.g. Palais-Seeley [PS65], Kohn-Nirenberg [KN65], Hörmander [H65]. When the estimates in (2.10) are assumed to hold locally uniformly in x, one has to extend the vector space of operators OP (p) by adding the class of so-called *smoothing operators*, to get a fully satisfactory calculus. The smoothing operators are the integral operators $\mathcal{S}$ with C^∞ kernels,

$$\text{(2.11)} \quad (\mathcal{S}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) u(y)\, dy, \quad K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}).$$

These operators are regarded as ψdo's of order $-\infty$. In the calculus with global estimates in x described in Hörmander [H85, Sect. 18] the smoothing operators are inside the calculus from the start.

Now the rule (2.9) holds in the sense that when $p \in S^{m_1}$ and $q \in S^{m_2}$ (and OP (q) maps into a space where OP (p) is defined), then $pq \in S^{m_1+m_2}$ and $\mathcal{R}$ is a ψdo of order $m_1 + m_2 - 1$ (the sum of an operator OP (r) with $r \in S^{m_1+m_2-1}$ and a smoothing operator).

The leading term p_m is called *the principal part of* p and is also denoted p^0; the principal symbol. p and OP (p) are said to be *elliptic* when $p^0(x, \xi) \neq 0$ for $|\xi| \geq 1$. When p is elliptic, one can show that there exists a symbol $q \in S^{-m}$ with principal part equal to $p^0(x, \xi)^{-1}$ for $|\xi| \geq 1$, such that

$$\text{(2.12)} \quad \mathrm{OP}(p)\,\mathrm{OP}(q) = I + \mathcal{S}_1, \quad \mathrm{OP}(q)\,\mathrm{OP}(p) = I + \mathcal{S}_2,$$

where the $\mathcal{S}_i$ are smoothing operators. $Q = \mathrm{OP}(q)$ is called a *parametrix* of $P = \mathrm{OP}(p)$. It serves many of the purposes an inverse would serve, for example in the determination of the differentiability of solutions of an elliptic equation.

The operators, described here on $\mathbb{R}^n$, behave in a manageable way under coordinate transformation, so it is possible to define them also on C^∞ manifolds. For compact manifolds, the parametrix construction in the elliptic case gives an operator that is not far from being an inverse; in fact an elliptic operator P on a compact manifold defines a Fredholm operator in C^∞. (A Fredholm operator has finite dimensional nullspace and finite dimensional complement of the range, hence has an index defined as the difference between those two dimensions.) If the index of P is 0, P and the parametrix Q may be modified within the ψdo calculus in such a way that P becomes bijective and $Q = P^{-1}$.

As for the applicability of the theory, we note: In the theory of linear partial differential equations, the basic and most prominent questions are asked for operators related to the following three prototypes:

$$
(2.13)\quad
\begin{array}{ccc}
-\Delta & \frac{\partial}{\partial t} - \Delta & \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \\
\text{Laplace operator,} & \text{heat operator,} & \text{wave operator,} \\
\text{symbol } |\xi|^2, & \text{symbol } i\tau + |\xi|^2, & \text{symbol } -\tau^2 + |\xi|^2, \\
\textit{elliptic}; & \textit{parabolic}; & \textit{hyperbolic}.
\end{array}
$$

As already indicated, the pseudodifferential calculus works very well for elliptic problems. For the heat operator whose symbol is nonzero for $(\tau, \xi) \neq (0,0)$ but not homogeneous, one can define a quasihomogeneous ψdo calculus with convenient properties containing the parametrix (as initiated by Piriou [Pi70]). However, generalizations of the form $\frac{\partial}{\partial t} + P$ with pseudodifferential P require more refined considerations, see later in Section 4. For the wave operator, the symbol $-\tau^2 + |\xi|^2$ is 0 on the full cone $\{\tau = \pm|\xi|\}$, so the inverse $(-\tau^2 + |\xi|^2)^{-1}$ is far from being a pseudodifferential symbol. Here one needs a further development of the ψdo theory such as the theory of Fourier integral operators [H71].

Let us end this section by some remarks on a technical difficulty that pervades the theory:

Already in the first line of (2.10), we observe a certain vagueness in the definition of the p_{m-j}; they are supposed homogeneous in ξ only for $|\xi| \geq 1$ and the extension to $|\xi| \leq 1$ can be arbitrary, as long as it is C^∞. The difference between two choices gives an operator $S = \mathrm{OP}\,(s(x,\xi))$ defined as in (2.7) but with $s(x,\xi)$ *compactly supported in* ξ. Since the inverse Fourier transform of a compactly supported function is smooth (even holomorphic), we find that S is a smoothing operator. This illustrates an imprecision in the calculus: Many formulas are not exact, but only valid "modulo smoothing operators". The same was the case with (2.9), (2.12). So it takes a somewhat sophisticated effort to use the calculus, to find out what exact information can be obtained, when smoothing terms and remainder terms float around and have to be dealt with all the time.

3 Boundary value problems

Differential equations are often considered on subsets of $\mathbb{R}^n$ (or manifolds) *with boundary*; then suitable *boundary conditions* have to be added to get good solvability properties. The pseudodifferential calculus explained above was good to describe the solution operators for elliptic problems. When we want a calculus containing the solution operators for *elliptic boundary value problems*, we are forced to introduce several new types of operators.

Consider a boundary value problem for the Laplace operator modified by a constant:

$$(3.1)\quad (1-\Delta)u = f \text{ in } \Omega, \quad Tu = \varphi \text{ on } \partial\Omega,$$

where Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$ and T is a suitable *trace operator* going from Ω to $\partial\Omega$. T can for example be the restriction $\gamma_0 : u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ or the normal derivative $\gamma_1 : u \mapsto \sum_{j=1}^n n_j \frac{\partial u}{\partial x_j}|_{\partial\Omega}$ (here $\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$ is the interior normal to $\partial\Omega$); in the first case (3.1) is the Dirichlet problem and in the second case the Neumann problem, for $1-\Delta$. The problem (3.1) with $f = 0$ has a solution operator

(3.2) $K: \varphi \mapsto u$, a *Poisson operator*.

The problem (3.1) with $\varphi = 0$ has a solution operator of the form

(3.3) $R: f \mapsto u$, where $R = Q_+ + G$, a *Green operator*;

here $Q = \mathrm{OP}\,(\frac{1}{1+|\xi|^2})$ on $\mathbb{R}^n$ defined in (2.4) and we write

(3.4) $Q_+ = r^+ Q e^+$,

where e^+ denotes "extension by zero on $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$" and r^+ denotes restriction to Ω; and G is a term adapted specifically to the boundary condition, a so-called *singular Green operator*. The pseudodifferential term Q_+ can be regarded as the "free space contribution" or "interior part". Collecting the terms in one formula, we find the expression for the full solution operator:

$$(3.5)\quad \begin{pmatrix} 1-\Delta \\ T \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_+ + G & K \end{pmatrix}.$$

The general calculus has all these types together. A pseudodifferential boundary operator will in general look as follows:

$$(3.6)\quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} P_+ + G & K \\ & \\ T & S \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(\overline{\Omega})^N \\ \times \\ C^\infty(\partial\Omega)^M \end{matrix} \to \begin{matrix} C^\infty(\overline{\Omega})^{N'} \\ \times \\ C^\infty(\partial\Omega)^{M'} \end{matrix};$$

here P is a ψdo on $\mathbb{R}^n$, P_+ is defined from P as in (3.4), T is a *trace operator* going from functions on the interior Ω to functions on the boundary $\partial\Omega$, K is a *Poisson operator* going from the boundary to the interior, G is a *singular Green operator* acting on the interior but not like a ψdo, and S is a ψdo on $\partial\Omega$; they are all generalizations of the particular examples in (3.1)–(3.5). In (3.6) they are matrix formed; more generally they can act between vector bundles over manifolds. The full operator $\mathcal{A}$ is called a *Green operator*.

The development of the precise concepts has a long history; let us just mention a few contributions: Vishik and Eskin [VE66], [VE67] introduced general operators of the form K and T; Boutet de Monvel singled out a class of ψdo's P such that P_+ (cf. (3.4)) preserves $C^\infty(\overline{\Omega})$ (has the *transmission property*) [BM66,71] and gave the first index formula; Schulze and Rempel expanded the calculus of Boutet de Monvel (elaborated in their book [RS82]) to problems without the transmission property [RS82′,83,84], and Schulze (partly with coauthors) has pursued the study for problems with singularities in many further works ...

The present author used the Boutet de Monvel calculus for spectral questions e.g. in [GGe77] (jointly with Geymonat) and [G84] (giving supplements to the calculus), and generalized the theory to parameter-dependent cases such as resolvents in the book [G86], later extending the theory to L_p and anisotropic spaces, with global estimates on noncompact manifolds, in [GK93] (with Kokholm), [G95], [G96]. Schrohe introduced a calculus of weighted symbols for operators on noncompact manifolds [Sr91].

The fundamental question whenever one sets up this kind of calculus is to show that it is closed under composition and has suitable invertible elements (is an "algebra" in a suitable sense). The study of compositions for the operators (3.6) really means showing a lot of different rules: When $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}'$ are such systems, one must show that $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}\mathcal{A}'$ is of the same kind. In fact it equals

$$\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} P_+ + G & K \\ T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P'_+ + G' & K' \\ T' & S' \end{pmatrix} =$$

$$\text{(3.7)} \quad \begin{pmatrix} (PP')_+ - L + P_+G' + GP'_+ + GG' + KT' & P_+K' + GK' + KS' \\ TP'_+ + TG' + ST' & TK' + SS' \end{pmatrix}$$

(where $L = (PP')_+ - P_+P'_+$), so all these terms must be shown to belong to the appropriate classes of operators.

The calculus can be used whenever one needs to manipulate with differential operator problems by reductions such as composition with inverses, or projections. For example, the stationary *Stokes problem* is a matrix formed problem with differential operators of order 2 and 1; it can be reduced to a smaller matrix problem with second order operators, at the cost of allowing singular Green operator terms (as treated in Johnsen [J96]). Time-dependent problems and problems with a parameter will be discussed below in Section 4.

In this connection, let us mention that the theory is most easily set up in L_2-related Sobolev spaces (cf (1.9)) because of the close connection with the Fourier transform, but its adaptation to L_p-based spaces such as the spaces $B^s_{p,q}$ and $F^s_{p,q}$ of Besov, Triebel and Lizorkin (see e.g. Triebel [T78], [T83]) has also been investigated, in the (yet unpublished) thesis of Franke [F86] ($p > 0$), in [G90], [GK93] and [G95] ($p > 1$) and in Johnsen [J96] ($p > 0$).

4 Parameter-dependent calculi and applications

The above calculi can of course be made to depend on supplementary parameters, but here new aspects come in when we investigate the behavior for the parameter going to a limit. A prominent example is the *resolvent* $(P - \lambda)^{-1}$ of an elliptic operator P, defined for λ in the region of $\mathbb{C}$ where $P - \lambda$ is invertible; here the behavior for λ going to infinity on rays in $\mathbb{C}$ is important. The resolvent can be used to define for example *complex powers* of P:

$$\text{(4.1)} \quad P^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_C \lambda^{-s} (P - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

or the exponential function (heat semigroup)

$$\text{(4.2)} \quad e^{-tP} = \frac{i}{2\pi} \int_C e^{-t\lambda} (P - \lambda)^{-1}\, d\lambda, \quad t > 0;$$

here $e^{-tP} : f \mapsto u$ solves the associated "heat equation" $(\frac{\partial}{\partial t} + P)u = 0$ with given initial value f. The integration curve C is a suitable curve in $\mathbb{C}$ going around the spectrum of P.

Let us explain what the difficulty in describing $(P-\lambda)^{-1}$ is, when P is a ψdo. Consider e.g. the case where $P = \mathrm{OP}\,(p(x,\xi))$ is of order 2. When λ runs on a ray in $\mathbb{C}$ we can write $-\lambda = \omega\mu^2$ for $\mu \geq \mu_0$, with some fixed ω with $|\omega| = 1$. The symbol of $P-\lambda$ is then $\overline{p} = p(x,\xi) + \omega\mu^2$, and one calls $P-\lambda$ *parameter-elliptic* on the ray, when $p^0 + \omega\mu^2$ is invertible for $|\xi|^2 + \mu^2 \geq c > 0$.

When P is a differential operator, $p(x,\xi)$ is a second order polynomial in ξ, so $\overline{p}$ is another second order polynomial in the variables (ξ,μ). Parameter-ellipticity means that $\overline{p}$ is elliptic in the usual sense, as a function of $n+1$ cotangent variables (ξ,μ). All the usual constructions can be carried out while regarding μ as an extra cotangent variable, and from this one can derive the desired information for the situation where μ is considered as a parameter (by a method going back to Agmon's work in the sixties).

Now let P be a ψdo but not a differential operator, in the principal part. Then the principal symbol, taken strictly homogeneous at 0, is not a polynomial, and then is not C^∞ at 0; only the derivatives up to order 2 are bounded there. For an example when $n = 2$, one can consider

$$(4.3)\quad p\,(x,\xi) = \frac{\xi_1^4 + \xi_2^4}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 1}; \text{ here } p^0 = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{2\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \text{ for } |\xi| \geq 1.$$

When we define p^0 to be C^∞ on a neighborhood U of 0, we loose the homogeneity there. Now if μ is included as another cotangent variable, there is non-homogeneity in an *unbounded region* $U \times [\mu_0,\infty[$. The symbols $p + \mu^2$ and $(p+\mu^2)^{-1}$ will *not* satisfy all the estimates in the second line of (2.10) with respect to the cotangent variable (ξ,μ) (for $m = 2$ resp. -2). More precisely, when taking increasingly higher derivatives in ξ, one will *not* get an increasingly stronger fall-off for $\mu \to \infty$ as the estimate in (2.10) indicates. For example, for p as in (4.3),

$$(4.4)\quad \frac{\partial^3}{\partial\xi_1^3}\frac{1}{p(x,\xi)+\mu^2} \text{ is } \textit{not } O\,(\langle\mu\rangle^{-5}) \text{ (for fixed } \xi),$$

which would be implied from (2.10) for a symbol of order -2.

It is possible, but much harder than in the differential operator case, to keep check of what actually happens in the region $U \times [\mu_0,\infty[$, and what it gives for the operators. This is a main subject of the book [G86] and its revised version [G96], where the same problem is handled for boundary operators too. The idea is to keep check of how far (for how many indices) the usual estimates as in (2.10) are valid; for the remaining indices one will have weaker estimates. For example, for the case $q = 1/(p+\mu^2)$ with p as in (4.3),

$$(4.5)\quad \begin{aligned} &D_\xi^\alpha q \text{ is } O\,(\langle(\xi,\mu)\rangle^{-2-|\alpha|}) \text{ when } |\alpha| \leq 2,\\ &D_\xi^\alpha q \text{ is } O\,(\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}\langle(\xi,\mu)\rangle^{-4}) \text{ when } |\alpha| \geq 2. \end{aligned}$$

(Here the estimates up to $|\alpha| \leq 2$ are optimal, and we say that q is *of regularity* 2.) For the boundary operators the estimates are more complicated.

The same difficulty comes in when one wants to describe $\frac{\partial}{\partial t} + P$ and its solution operators. (The calculi of [Pi70] and Shubin [S78] generalize (2.10) more closely, with increasing fall-off of higher derivatives in all variables, hence cannot handle $\frac{\partial}{\partial t} + P$ when P is not differential.)

The applications of the parameter-dependent theory in [G86,96] include constructions of heat operators e^{-tP} and their asymptotic trace expansions (with a finite number of terms depending on the regularity), spectral asymptotic estimates, index formulas, singular perturbations.

The calculus was used successfully in a treatment of the solvability of time-dependent nonhomogeneous Navier-Stokes problem, in a series of joint works with Solonnikov, cf. [GSo91] (with extensions to L_p-based spaces, cf. [G95′]).

Let us end by mentioning a rather different application of the parameter-dependent theory. It is the study of those geometric invariants that appear as coefficients in asymptotic trace formulas for heat operators $e^{-t\Delta}$ associated with Laplace operators of geometric interest. (The trace here means the operator trace, not to be confounded with another use of the same word above in the context of boundary values.) For a Laplace operator Δ defined in relation to a closed Riemanninan manifold it is well-known that Tr $e^{-t\Delta}$ has an asymptotic expansion for $t \to 0$ as a series $\sum_{j=0}^{\infty} c_{j-n} t^{(j-n)/2}$; the coefficients contain geometric information on the manifold. There are similar results for the Laplacian on a compact manifold with boundary, when Δ is provided with a Dirichlet or Neumann boundary condition. (In the boundaryless case, the coefficients with j odd are zero.)

Atiyah, Patodi and Singer [APS75] showed the interest of a somewhat different case where the operator is replaced by $\Delta_1 = P_B{}^* P_B$ or $\Delta_2 = P_B P_B{}^*$; here P is a first order elliptic operator (square matrix formed or acting between N-dimensional vector bundles) defined over a smooth compact manifold X with boundary ∂X, and B is a ψdo on ∂X such that P with the boundary condition $Bu = 0$ at ∂X defines a Fredholm operator P_B. Prominent examples of such P are Dirac operators defined over suitable Riemannian manifolds; B is essentially taken as the projection onto the positive eigenspace of the tangential component of P at ∂X (see [APS75], [G92] or [GS95] for more details).

Based on the methods of [G86], we showed in [G92] the existence of expansions

$$\text{(4.6)} \quad \operatorname{Tr} e^{-t\Delta_i} \sim \sum_{j=0}^{n} c_{i,j-n} t^{(j-n)/2} + O(t^{\varepsilon}) \text{ for } t \to 0,$$

$\varepsilon = 3/8$, with a further analysis of the terms $c_{i,0}$ that are of special interest since $c_{1,0} - c_{2,0}$ equals the index of P_B. However, to get an expansion up to arbitrarily high powers of t, other tools were needed:

In a recent cooperation with Seeley [GS95], we have developed a calculus for yet another, narrower class of ψdo's depending on a parameter μ. This class allows making full asymptotic expansions in μ, with infintely many terms where the order in μ decreases to $-\infty$. In fact, the symbols have expansions in terms with decrasing integer powers of μ, corresponding to a kind of Laurent series in $z = 1/\mu$ at 0. We call the operators in this class *weakly polyhomogeneous ψdo's* (in contrast to strong polyhomogeneity that holds when (2.10) is valid with ξ replaced by (ξ, μ)). In cases of boundary value problems, this calculus can be used to show full asymptotic expansions of heat operator traces for boundary problems where:

(1) the "interior operator" P is a *differential* operators (pseudodifferential *boundary conditions* being allowed)
(2) the resolvent can be shown to be of the form $Q(\mu)_+ + K(\mu)S(\mu)T(\mu)$, where the "interior ψdo" $Q(\mu)$ as well as the Poisson operator $K(\mu)$ and the trace operator $T(\mu)$ all stem from a differential operator calculus, and only *the ψdo $S(\mu)$ on ∂X* is weakly polyhomogeneous.

In this case, the heat operator trace calculation can be reduced to a trace calculation for a weakly polyhomogeneous ψdo on ∂X.

By the help of this calculus we found a full asymptotic expansion of the traces for Atiyah-Patodi-Singer problems:

$$(4.7)\quad \operatorname{Tr} e^{-t\Delta_i} \sim \sum_{j=0}^{n} c_{i,j-n} t^{(j-n)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{i,k} t^{k/2} \log t + b'_{i,k} t^{k/2}); \quad i = 1, 2.$$

A new feature of these expansions is the presence of many logarithmic terms. The $c_{i,j-n}$ for $j < n$ and the $b_{i,k}$ are locally determined, whereas $c_{i,0}$ and the $b'_{i,k}$ are in general not so.

Some of the terms vanish in special cases ([GS96]), whereas others are generically nonzero (recent collaboration with Gilkey [GiG96]). We abstain from including further details here, hoping just that this gives an indication of the scope and interest of these rather technical constructions.

References

[APS75] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69

[BM66] L. Boutet de Monvel, *Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variéte à bord, I–II,* J. d'Analyse Fonct. **17** (1966), 241–304

[BM71] –, *Boundary problems for pseudo-differential operators,* Acta Math. **126** (1971), 11–51

[F86] J. Franke, *Elliptische Randwertprobleme in Besov-Triebel-Lizorkin-Räumen,* Dissertation, Friedrich Schiller Universität Jena 1986

[GGe77] G. Grubb and G. Geymonat, *The essential spectrum of elliptic systems of mixed order,* Math. Ann. **227** (1977), 247–276

[GiG96] P. B. Gilkey and G. Grubb, *Logarithmic terms in asymptotic expansions of heat operator traces,* submitted, available as Preprint MPI 96-163 from Max Planck Institute, Bonn, 14 pp

[G84] G. Grubb, *Singular Green operators and their spectral asymptotics,* Duke Math. J. **51** (1984), 477–528

[G86,96] –, *Functional Calculus of Pseudo-Differential Boundary Problems,* Progress in Mathematics 65, Birkhäuser, Boston, 1986, Second Edition 1996

[G90] –, *Pseudo-differential boundary problems in L_p spaces,* Comm. Part. Diff. Eq. **15** (1990), 289–340

[G92] –, *Heat operator trace expansions and index for general Atiyah-Patodi-Singer boundary problems,* Comm. P. D. E. **17** (1992), 2031–2077

[G95] –, *Parameter-elliptic and parabolic pseudodifferential boundary problems in global L_p Sobolev spaces,* Math. Zeitschrift **218** (1995), 43–90

[G95′] –, *Nonhomogeneous time-dependent Navier-Stokes problems in L_p Sobolev spaces,* Diff. and Int. Eq. **8** (1995), 1013–1046

[GK93] G. Grubb and N. J. Kokholm, *A global calculus of parameter-dependent pseudodifferential boundary problems in L_p Sobolev spaces,* Acta Mathematica **171** (1993)

[GS95] G. Grubb and R. T. Seeley, *Weakly parametric pseudodifferential operators and Atiyah-Patodi-Singer boundary problems,* Inventiones Math. **121** (1995), 481–529

[GS96] –, *Zeta and eta functions for Atiyah-Patodi-Singer operators,* Journal of Geometric Analysis **6** (1996), 31–77

[GSo91] G. Grubb and V. A. Solonnikov, *Boundary value problems for the nonstationary Navier-Stokes equations treated by pseudo-differential methods,* Math. Scand. **69** (1991), 217–290

[H65] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators,* Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 501–517

[H71] –, *Fourier integral operators I,* Acta Math. **127** (1971), 79–183

[H85] –, *The analysis of linear PDO, III,* Springer Verlag, Heidelberg, 1985

[J96] J. Johnsen, *Elliptic boundary problems and the Boutet de Monvel calculus in Besov and Triebel-Lizorkin spaces,* Math. Scand. (to appear)

[KN65] J. J. Kohn and L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators,* Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 269–305

[PS65] R. S. Palais and R. T. Seeley, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem,* Ann. of Math. Studies 57, Princeton University Press, Princeton, 1965

[Pi70] A. Piriou, *Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels du type de Volterra,* Ann. Inst. Fourier **20** (1970), 77–94

[RS82] S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index Theory of Elliptic Boundary Problems,* Akademie-Verlag, Berlin, 1982

[RS82′] –, *Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property,* Math. Nachr. **105** (1982), 45–149

[RS83] –, *Complex powers for pseudo-differential boundary problems I,* Math. Nachr. **111** (1983), 41–109

[RS84] –, *Complex powers for pseudo-differential boundary problems II,* Math. Nachr. **116** (1984), 269–314

[Sr91] E. Schrohe, *A pseudodifferential calculus for weighted symbols and a Fredholm criterion for boundary value problems on noncompact manifolds,* Habilitationsschrift, Univ. of Mainz 1991

[Sh78] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory,* Nauka, Moscow, 1978

[T78] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators,* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, 1978

[T83] –, *Theory of function spaces,* Monographs in Mathematics 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983

[VE66] M. I. Vishik and G. I. Eskin, *Parabolic convolution equations in a bounded domain,* Mat. Sb. **71** (1966), 162–190; Amer. Math. Soc. Transl. **95** (1970), 131–162

[VE67] –, *Elliptic equations in convolution in a bounded domain and their applications,* Uspehi Mat. Nauk **22** (1967), 15–76; Russian Math. Surveys **22** (1967), 13–75

Gerd Grubb
Department of Mathematics
University of Copenhagen
Universitetsparken 5
DK-2100 Copenhagen
E-mail address: grubb@math.ku.dk

(*Eingegangen 20. 01. 97*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
99 (1997) 122–145
Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Herbert Grötzsch zum Gedächtnis

R. Kühnau, Halle (Saale)

I H. Grötzsch als Mensch und Mathematiker

1993 verstarb in Halle (Saale) Herbert Grötzsch, den Lipman Bers zum 75. Geburtstage als einen der großen Mathematiker dieses Jahrhunderts bezeichnete. Sein Name war schon um 1930 durch bahnbrechende Arbeiten zur Geometrischen Funktionentheorie bekannt geworden. Nach dem Kriege hatte er sich vor allem mit Graphentheorie (Färbungsprobleme) beschäftigt. Durch seinen ungewöhnlichen Lebensweg ist er heute außerhalb Halles persönlich kaum bekannt. Trotzdem oder gerade deswegen soll hier seiner gedacht werden.

Camillo *Herbert* Grötzsch wurde am 21. 5. 1902 in Döbeln (Sachsen) geboren als Sohn von Emil *Camillo* Grötzsch (1874 bis 1974) und Ludwiga Julie Grötzsch, geb. Hünich. Sein Vater war zuletzt (bis 1945) Oberstudiendirektor am Realgymnasium bzw. der Oberschule Crimmitschau (Sachsen). Er war ebenfalls Mathematiker (langjähriges DMV-Mitglied) und hatte in Leipzig 1894 bis 1899 studiert und 1898 bei Sophus Lie mit dem Thema „Störungstheorie und Berührungstransformationen" promoviert. Er kannte aus seiner Studentenzeit die berühmten Größen der damaligen Leipziger Universität, und es war für mich 1967 interessant, darüber von ihm Anekdoten aus dem vorigen Jahrhundert zu hören. Er hatte übrigens auch in den Jahren 1912 bis 1915 vier kleine Arbeiten über Konvergenzkriterien bei unendlichen Reihen und elementare Zahlentheorie im seinerzeitigen „Archiv Math. Physik (3. Reihe)" publiziert.

Der (von ihm gedehnt gesprochene) Name Grötzsch ist wohl aus einem der zahlreichen ähnlich klingenden Ortsnamen in (vor allem) Sachsen entstanden, entsprechend einer altslawischen Form etwa „Burg" bedeutend (verwandt: im Polnischen Endung -gard bzw. -gród, im Tschechischen -hrad, im Russischen gorod bzw. Endung -grad, im Deutschen Garten usw.).

Neben seinem intensiv von den Eltern geförderten Interesse für Mathematik hatte H. Grötzsch auch Interesse am Zeichnen und durch seine stark ausgeprägte Liebe zum Tier als Kreatur auch Interesse für Biologie, wobei ihn Insekten und insbesondere Ameisen faszinierten. Noch in späteren Jahren konnte er viel Zeit beim naiven Beobachten einer Ameisenstraße in seiner Wohnung verbringen (die – zum Leidwesen seiner Frau – mit Marmelade unterstützt wurde).

Seine mathematische Begabung führte er außer auf seinen Vater auch auf den Großvater mütterlicherseits zurück, der in Zwickau Bergschullehrer und Markscheider war.

H. Grötzsch besuchte zunächst die Volksschule (Bürgerschule) und das Realgymnasium in Döbeln und dann in Crimmitschau, wo er Ostern 1922 die Reifeprüfung bestand. Von S.-S. 1922 bis S.-S. 1926 studierte er Mathematik und Physik an der Universität Jena. Schon damals hatte Paul Koebe einen großen Einfluß auf ihn. Als dieser 1926 nach Leipzig berufen wurde, folgte er ihm und studierte noch bis W.-S. 1927/28 in Leipzig.

Februar 1927 bis November 1929 war er mit der Verwaltung einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut Leipzig beauftragt, danach bis September 1930 Assistent. Er teilte sich die Stelle einige Zeit mit Hubert Cremer, zu dem er ein sehr gutes Verhältnis hatte. Er promovierte dann 1929 in Leipzig (Dr.-Prüfung Juli, Dr.-Diplom vom 4. 11. 1929) mit der Dissertation [5], für damalige Verhältnisse ziemlich spät, so daß man in seiner Heimatstadt schon munkelte, der junge Grötzsch werde es wohl nicht schaffen. In Leipzig galt er als der ewige Assistent von Koebe. Koebe wollte, daß er sich nun in Tübingen, wo Knopp war, habilitierte. Er war auch in Tübingen zum Vortrag. Danach habe Knopp „den jungen Mann" aber so herablassend behandelt, daß er wütend zurück nach Leipzig fuhr (was Grötzschs Hochachtung vor den wissenschaftlichen Leistungen Knopps keinen Abbruch tat), worüber Koebe sehr ärgerlich war.

Er habilitierte sich dann mit der Arbeit [12] in Gießen. Das Habilitationsgesuch ist 10. 2. 1931 datiert. In einem Empfehlungsschreiben von Koebe an Schlesinger vom 22. 2. 1931 heißt es: „... Seine Dr.-Arbeit fand entsprechend die höchstmögliche Beurteilung I (ausgezeichnet), was sehr selten vorkommt. .. Übrigens ist er auch dozentisch begabt und wird zweifellos auch als Lehrer erfolgreich sein ... echte, produktive Gelehrtennatur, die in die akademische Laufbahn gehört ..."

Die Probevorlesung am 5. 6. 1931 (17 Uhr c.t. in der Kleinen Aula Ludwigstr. 23, nachdem dem Habilitanden ab 16.30 Uhr von der Phil. Fak. II. Abtlg. einige Fragen gestellt worden waren) zum Thema „Der Gruppenbegriff und einige seiner Anwendungen in den mathematischen Wissenschaften" wurde im Bericht durch „von großer Klarheit und in fesselnder und instruktiver Form" charakterisiert. Am 11. 6. 1931 teilte der Rektor Eger mit, daß er auf Grund des Beschlusses des Gesamtsenats vom 10. 6. 1931 Herrn Dr. Grötzsch die venia legendi für das Fach der reinen Mathematik erteilt habe.

Hier in Gießen war er ab Oktober 1930 Assistent, dann Privatdozent am Mathematischen Seminar, durch Schreiben vom 23. Aug. 1934 zum „Alt-Assistenten" (höhere Gehaltsstufe) ernannt. Im W.-S. 1934/35 und im S.-S. 1935 konnte er den durch Emeritierung von H. Mohrmann vakanten Lehrstuhl in Gießen vertreten.

Der Reichsstatthalter in Hessen schreibt unterm 20. Juni 1935 aus Darmstadt an das Rektorat: „Ich beauftrage Sie, dem Privatdozenten Dr. H. Grötzsch umgehend, spätestens am 30. Juni 1935, das Dienstverhältnis zur Univ. Gießen als wiss. Ass. am Math. Seminar zum 1. Oktober 1935 zu kündigen. i. A. Ringshausen". Dazu gibt es die Notiz: „Die Kündigung ist durch Magnif. am 24. Juni persönlich ausgesprochen worden" (Bleistiftnotiz: „auf 12 Uhr mittags bestellt").

H. Grötzsch schreibt darauf am 1. Okt. 1935 an den Rektor (gleichlautend an den Dekan), daß er seine Privatdozentur niederlegt, „da ich vom 1. Okt. 1935 an ohne Einkommen bin".

Hintergrund dieser Vorgänge war folgendes. H. Grötzsch war Mitglied des „Jungstahlhelms" (der in Spannung zur NSDAP zunächst noch existierte), wurde damit 1934 in die SA zwangsweise „überführt", bei der er aber den Dienst verweigerte und bald austrat (ohne vereidigt gewesen zu sein). Daneben war sicher seine dem NS-Regime gegenüber allgemein ablehnende Haltung entscheidend für die Entlassung, wobei bekanntlich Kleinigkeiten, Verhaltensweisen, beiläufige Äußerungen genau beobachtet wurden. Er besuchte nicht die Schulungslager (Dozentenlager) und dergl., verleugnete – für ihn selbstverständlich – nicht seine alten jüdischen Kollegen, Bekannte und Freunde.

Vergeblich versuchte der Dekan Baader noch mit Schreiben vom 3. 10. 1935 an den Rektor die Situation von H. Grötzsch zu retten: „... daß Herr Dr. Grötzsch ein anerkannter Mathematiker mit Ruf und Zukunft ist. Ich bitte daher Euer Magnifizenz dringend, Sorge tragen zu wollen, daß Herr Dr. Grötzsch der Universität erhalten bleibt".

Diese (z. T. schon in [63] dargestellten) Gießener Vorgänge um die Entlassung von H. Grötzsch erinnern übrigens an entsprechende Vorgänge mit Heinrich Heesch [41], den er gut kannte (er hielt sich z. B. Jan. 1948 bei diesem auf).

Bis 1939 war er danach Mitarbeiter bei „J. C. Poggendorffs Handwörterbuch" in Leipzig. Vom 27. Aug. 1939 bis zur Entlassung 12. Mai 1944 war er zur Wehrmacht eingezogen (West- und Ostfront, 1942 im Lazarett wegen einer Nierenkrankheit) als Obergefreiter (Artillerie, außerdem Feldvorschriftenstelle, Heimatdienst). Schon 1936 war er für ca. 2 Monate nach Naumburg einberufen gewesen (Artillerie). 1940 bemühte sich „Poggendorff" in Leipzig vergeblich, ihn von der Wehrmacht freizubekommen. Da er nach seiner Befreiung vom aktiven Wehrdienst (auf Grund eines Erlasses, der den Einsatz von Naturwissenschaftlern in der militärtechnischen Forschung vorsah) in Gießen keine Aufnahme fand, arbeitete er in Göttingen am Aerodynamischen Institut (Berechnung von Strahltriebwerken). Fast unvorstellbar: Er war März/April 1945 in Göttingen unmittelbar vor der Besetzung durch die Amerikaner einige Tage als Hilfspolizist tätig.

Die ersten Stationen nach dem Kriege: Ab 16. 11. 1945 „wiss. Hilfskraft" am Math. Seminar der Philipps-Universität Marburg, Juli 1946 bis Frühjahr 1948 Dozent (ab 1. Juli 1947 Diätendozent), durch Erlaß des Ministers vom 19. Dez. 1947 Ernennung zum apl. Professor zum 29. Dez. 1947. Über diese Marburger Zeit berichtet H. Tietz [71].

Daß er nach dem Tode von P. Koebe (1945) bei dessen Nachfolge – wozu er natürlich prädestiniert war – an der Universität Leipzig übergangen wurde, empfand er zeitlebens als große Kränkung (zumal durch die Art der Nachfolgeregelung).

Zum 1. Febr. 1948 erhielt er (nach einem Antrag des Halleschen Algebraikers H. Brandt auf ein Extraordinariat vom 3. Juli 1947 und durch Brief des Ministers für Volksbildung, Kunst und Wissenschaft der Landesregierung Sachsen-Anhalt vom 9. Sept. 1947) einen Ruf nach Halle auf eine „Professur mit vollem Lehrauftrag". Hier in Halle hatte er ab 27. Okt. 1949 vorübergehend auch einen Lehrauftrag an der ABF (= „Arbeiter- und Bauern-Fakultät" als Vorstudieneinrichtung). In Halle heiratete er im Oktober 1951 Annemarie Jung, die Tochter des Halleschen Mathematikers H. W. E. Jung (vgl. Nachruf [52]). Der Ehe entstammen drei Kinder.

Hier in Halle begann er übrigens verstärkt auch Russisch zu lernen (nach Anfängen während seiner Studentenzeit). Sein originelles „Selbststudium" bestand darin, daß er im damaligen „Café David" ein Wörterbuch seitenweise auswendig lernte. Auch für Chinesisch bekam er zunehmend Interesse (freilich benötigte er 1 Tag zur Übersetzung einer Zeile). Er hatte schon bei Poggendorff UdSSR und China zu bearbeiten. Von der Schule her war er hervorragender Kenner von Latein, Französisch und Englisch.

Erst am 1. Sept. 1965 erfolgte seine Ernennung zum Professor mit Lehrstuhl (persönliches Ordinariat) nach Antrag des Dekans Hohl vom 7. Mai 1965 an das Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen.

Am 8. Juni 1959 wurde er zum Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina gewählt. Seltsamerweise ist er nicht Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig gewesen, obwohl diese eigentlich in Mathematikerkreisen vielfach erst durch H. Grötzsch bekannt wurde wegen seiner in den dortigen Sitzungsberichten erschienenen Arbeiten.

1961 sollte er den Nationalpreis für Kunst und Wiss. erhalten. Diesen lehnte er ab, da an den Preis III. Klasse gedacht war („den jede Tänzerin bekommt"). In einem der Gutachten hatte R. Nevanlinna (22. 4. 1961) geschrieben: „Grötzsch ist einer der wenigen Mathematiker der Gegenwart, welche zu der Entwicklung der Mathematik wirklich Wesentliches beigetragen haben".

Den Nationalpreis II. Klasse nahm er 1967 dann an (Gutachter wieder u. a. R. Nevanlinna).

Kurioserweise bekam er am 12. 6. 1961 die Pestalozzi-Medaille wegen seiner Verdienste um die Lehrerausbildung, eine ziemlich häufig vergebene Auszeichnung. Er ging natürlich nicht zur Überreichungs-Zeremonie und schmetterte die in den folgenden Tagen häufigen und peinlichen Gratulationsbesuche sofort mit der Bemerkung „Das ist ein Irrtum“ ab.

Ich kannte ihn seit September 1954, als er die Begrüßung der neuen Mathematik-Studenten im Hörsaal A des Mathematischen Seminars vornahm. In den Jahren 1957 bis 1967 hatte ich sehr engen Kontakt zu ihm. 1960 bis 1967 (seine Emeritierung) hatte ich das Arbeitszimmer (ein nicht gerade repräsentatives Hinterzimmer, durch das – nicht immer ganz dichte – Klosettrohre liefen) im „Melanchthonianum“ der Universität Halle mit ihm zu teilen. Vieles in diesem Nachruf resultiert aus Gesprächen mit ihm in dieser Zeit. Freilich ging's da mehr um Alltagsprobleme des Mathematischen Instituts, Studentenprobleme u. ä. In den wenigen Fällen, in denen wir auf funktionentheoretische Fragen zu sprechen kamen, machte er freilich oft Andeutungen, deren Gewicht mir meist erst sehr viel später klar wurde.

Mit zunehmendem Alter konzentrierte er sich mehr auf die Ausbildung von Mathematiklehrern, wobei etwa nach 1960 extrem schwache und gering vorgebildete Jahrgänge zu betreuen waren. (Er sprach einmal vom „Katastrophenjahrgang“ wegen der hohen Quote an Abgängern, denen er auf die Prüfungsklausur „Cons. ab.“ = Consilium abeundi schreiben mußte.) Das gab oft auch zu eigentlich unwürdigen Situationen Anlaß. Daß er sich dessen wohl bewußt war, zeigte eine Episode, als er die auf unserem runden Tische ausgebreiteten Klausuren panikartig zusammenraffte, als ein Kolloquiumsgast (L. Danzer aus Göttingen) das Zimmer betrat.

Das Mathematische Institut betrat er nach seiner Emeritierung immer seltener. So etwa 1972 bekam er noch einmal plötzlich die Idee, eine 4teilige Vortragsreihe über „Mathematische Denkweisen“ im Hörsaal A zu halten. Das war sein Schwanengesang. Wenn man ihn von früher in seiner ungemein lebhaften Vortragsart kannte, wirkten diese vier Vorträge freilich nur wie ein schwacher Abglanz.

Zu seinem 75. Geburtstage (1977) hielt Lipman Bers einen Festvortrag. Freilich hatte der Jubilar zu dieser Zeit schon kaum noch seine Wohnung verlassen. Sein Fernbleiben beim Festvortrag ist wohl vielfach mißverstanden worden.

Er beschäftigte sich noch bis zu seinem Tode mit graphentheoretischen Problemen und solchen der elementaren Zahlentheorie. (Er war auch ein guter Kenner insbesondere der analytischen Zahlentheorie, ohne auf diesem Gebiet etwas veröffentlicht zu haben.) Freilich hat er seit 1960 nichts mehr veröffentlicht. Damals sagte er, er hätte noch sehr viel, und das (Publizieren) könne noch ein Weilchen so weitergehen. Aber er hat nichts mehr zu einem druckreifen Abschluß gebracht, und die Erschließung des Nachlasses dürfte schwierig sein. Als er seinen fast 100jährigen Vater einmal mehrere Tage ins Krankenhaus begleitete, äußerte er noch einmal die Idee eines Buchprojektes (wahrscheinlich Ausarbeitung seiner Vorlesungen für Lehrerstudenten). In den 50er Jahren sprach er auch öfter von der Idee eines Katalogs konformer Abbildungen. Aber auch hier ist nichts verwirklicht worden. Das hängt vielleicht auch mit der ihn zunehmend beanspruchenden Pflege seiner Eltern zusammen.

Nach der Wende bekam er (gleichwie auch die „Professoren“ für Marxismus-Leninismus u. ä.!) eine unglaubliche Rente von 2010,– DM (die letzten Monate noch etwas erhöht). Die Umstände der „Neuberechnung“ waren für ihn (bzw. bei der Witwenrente für seine Frau) einigermaßen unwürdig (z. B. Abiturzeugnis vorlegen; besondere Probleme mit dem Nachweis für die Zeit 1. Okt. 1935 bis 1. Juli 1947).

Anläßlich seines 90. Geburtstages konnte ihm in seiner Wohnung noch die Thomasiusmedaille der Universität Halle überreicht werden. Am 15. Mai 1993 ist H. Grötzsch in Halle in seiner Wohnung Mozartstraße 22 gestorben. Er fand seine letzte Ruhe auf dem Gertraudenfriedhof.

II Das funktionentheoretische Werk von H. Grötzsch

Die Arbeiten von H. Grötzsch betreffen zwei ziemlich entfernt liegende Gebiete: Geometrische Funktionentheorie und Graphentheorie. Zum ersten Arbeitsgebiet kam er natürlich durch P. Koebe. Die funktionentheoretischen Arbeiten entstanden im wesentlichen bis 1935. In den drei noch nach dem Kriege entstandenen Arbeiten [30], [31], [32] wurden wohl eigentlich nur einige vor dem Kriege liegengebliebene Dinge aufgearbeitet. Die Arbeiten zur Graphentheorie begann er während des Krieges (u. a. im Lazarett), wahrscheinlich wegen des fehlenden Zugriffs zur laufenden funktionentheoretischen Literatur, und da damals die Graphentheorie im Vergleich zur Funktionentheorie noch in den Kinderschuhen steckte. In seinem Nachlaß befinden sich 38 „Briefe" (der erste vom 24. Juni 1942, der letzte vom 7. Juli 1947, insgesamt 407 sorgfältig-handschriftliche Blätter), die dann im wesentlichen in seinen graphentheoretischen Arbeiten [33] veröffentlicht wurden. Hierüber wurde schon ausführlich anläßlich des 85. Geburtstages durch H. Sachs [65] berichtet (vieles in seinem handschriftlichen Nachlaß zur Graphentheorie – unzählige mit Blei- und Buntstift gezeichnete Figuren – harrt freilich noch der Erschließung), wobei auch seine mathematische Denkweise und gewisse Grundauffassungen verdeutlicht wurden. Man vgl. auch noch [68]. Deshalb soll hier nur eine Würdigung der funktionentheoretischen Arbeiten erfolgen.

Die folgende Aufzählung der von H. Grötzsch bearbeiteten funktionentheoretischen Fragenkreise entspricht etwa der zeitlichen Reihenfolge der Entstehung (allerdings ist fast alles miteinander verzahnt).

1. Flächenstreifenmethode zur Behandlung von **Extremalproblemen bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten**
2. **Quasikonforme Abbildungen**
3. **Konforme Abbildung von unendlich-vielfach zusammenhängenden Gebieten**
4. **Iterationsverfahren** als konstruktive Existenzbeweise
5. **Abbildungssätze zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete** (Existenz- und Unitätssätze)
6. Eine Arbeit zu **sternförmigen und konvexen Abbildungen des Einheitskreises**

1 Extremalprobleme bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten

Ein Meilenstein, in gewisser Weise erst der Startschuß in der Theorie der schlichten konformen Abbildungen, war der Koebesche Verzerrungssatz. Danach sind die Werte des Betrages der Ableitung einer im Einheitskreis analytischen und schlichten Funktion sicher dann in einem fixierten Punkte beschränkt durch (heute explizit bekannte) Werte, die unabhängig von der speziellen Funktion sind, wenn die Ableitung im Mittelpunkt gleich 1 ist. Daraus ergab sich leicht auch die Beschränktheit für andere Funktionale (z. B. Funktionswerte, höhere Ableitungen). Und es ergaben sich analoge Beschränktheitsaussagen auch für beliebige (also mehrfach zusammenhängende) Gebiete. Allerdings waren die genauen Schranken und die Natur der zugehörigen Extremalabbildungen lange Zeit unbekannt. H. Grötzsch konnte dies klären: Die Extremalabbildungen sind immer gewisse Schlitzabbildungen. Dies gelang durch seine berühmte *Flächenstreifenmethode*. Schon in seiner ersten Arbeit [1] kommt der zugehörige Grundgedanke zum Tragen, wenn auch in einer scheinbar ganz harmlosen Aussage. Er gibt die genaue Schranke für die Summe der konformen Moduln von Vierecken an, die in einen Kreisring eingelagert sind, sich vom inneren zum äußeren Randkreis erstreckend. Das ist heute klassisch und wurde schon in [48] („Prinzip von Grötzsch" in IV, § 5) lehrbuchmäßig dargestellt; vgl. auch „Grötzsch principle" usw. in [42]. In [48] findet sich der heute übliche Beweis mit der Schwarzschen Ungleichung und Längen- und Flächenabschätzungen. Das kommt auch schon in [1] vor, allerdings in einer eigentümlich diskretisierten und versteckten Form, indem zusätzlich unendlich viele weitere Aufschneidungen der Flächenstreifen vorgenommen werden. Daß bei ihm auch die Schwarzsche Ungleichung verwendet wird, bemerkt er selbst erst in [4] in einer Fußnote. Er vermerkt noch in [1] in einer Fußnote: „Das Prinzip meines Beweisverfahrens ergab sich mir aus Herrn G. Fabers Methode der Behandlung der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung ..." (Ähnliches etwa gleichzeitig bei R. Courant).

Mit „Prinzip" meint er folgende ganz einfache Grundungleichung, die in allen seinen Arbeiten zu solchen Extremalproblemen die entscheidende Rolle spielt (und seltsamerweise bis heute oft als „Rengelsche Ungleichung" in der Literatur herumgeistert).

Sei $\mathfrak{F}$ (im einfachsten Falle) ein von einer geschlossenen Jordankurve berandetes einfach zusammenhängendes Gebiet mit 4 ausgezeichneten Randpunkten (1), (2), (3), (4); kurz Viereck oder „Flächenstreifen" $\mathfrak{F}$ in der Orientierung von (1) (2) nach (3) (4). Ist dann l das Infimum der Längen der die „Seiten" (1) (2) und (3) (4) innerhalb $\mathfrak{F}$ verbindenden (lokal rektifizierbaren) Kurven, dann gilt für den (inneren) Inhalt I von $\mathfrak{F}$

$$(1) \qquad I \geq l^2 \cdot M.$$

Hierbei bezeichnet $M > 0$ den (eindeutig bestimmten) konformen Modul von $\mathfrak{F}$, der sich ergibt, wenn man $\mathfrak{F}$ eckpunkttreu auf ein Rechteck mit Seitenlängen 1 und M schlicht konform abbildet (vgl. Fig. 1).

(1) läßt sich auch über die von A. Beurling und L. V. Ahlfors eingeführte elegante Begriffsbildung „extremale Länge einer Kurvenschar" erhalten, so daß na-

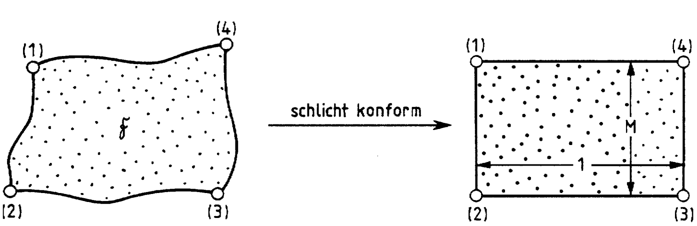

Fig. 1

türlich prinzipiell die Grötzschschen Extremalprobleme heute auch mit der Methode der extremalen Länge zu beweisen sind. Aber L. V. Ahlfors weist selbst schon [34] darauf hin: „Es soll auch nicht vergessen werden, daß die geschickt angewandte, aber unübersichtlich formulierte Parallelstreifenmethode von Grötzsch sich inhaltlich mit großen Stücken der Beurlingschen Theorie deckt ... Wenn man heute die Arbeiten von Grötzsch liest, staunt man über die Fülle der Anwendungen seiner Methode, die er gefunden hat, und ich stimme völlig der neulich von Jenkins ausgesprochenen Meinung zu, daß Grötzsch noch lange nicht die Anerkennung gewonnen hat, die er verdient".

Die der Grötzschschen Methodik zugrunde liegende Idee hatte übrigens Ahlfors fast gleichzeitig verwandt für seinen berühmten Beweis der Vermutung von Denjoy.

In [1] verweist H. Grötzsch noch am Ende von Abschnitt II auf eine Verallgemeinerung seiner Methode, indem er auch „verheftete Streifen" zuläßt. Das führt auf bis heute wenig beachtete Verallgemeinerungen seiner Resultate. In [53] (vgl. auch [51], S. 85 oben) wurde dies später mit anderer Methode näher ausgeführt.

Grötzsch steigt in den folgenden Arbeiten [2], [4] usw. über Verallgemeinerungen des Koebeschen Verzerrungssatzes und des Koebeschen Viertelsatzes zu immer komplizierteren Extremalproblemen auf, kommt schon in [4] zu ersten seiner berühmten „Schlitztheoreme". Es werden Extremaleigenschaften von z. T. schon durch P. Koebe bekannten Schlitzabbildungen bewiesen: z. B. die Ellipsenschlitzabbildung, bei der ein (zunächst endlich vielfach zusammenhängendes) Gebiet $\ni \infty$ unter Festhaltung von ∞ und einer gewissen zusätzlichen Normierung daselbst so (schlicht konform) abgebildet wird, daß die Bildrandkomponenten Schlitze auf ein und derselben Schar konfokaler Ellipsen werden. Diese Dinge sind umfassend schon 1958 von J. A. Jenkins im Ergebnisbericht [51] dargestellt worden; teilweise auch in [49] (Chapter 3), eine kurze Übersicht in [46].

Eine wesentliche neue Idee war dann, auch *„höhere Normierungen"* zu betrachten. Bis dahin wurden nur Standardnormierungen untersucht, die – grob gesagt – Nebenbedingungen für die beim jeweiligen Extremalproblem zugelassenen konformen Abbildungen bedeuten, so daß genau eine lineare Abbildung dazugehört. Also: Vorgabe von 3 komplexen bzw. 6 reellen Parametern bei den Abbildungen, z. B. die Vorgabe der Bildpunkte für 3 fixierte Punkte, oder Vorgabe von 2 Bildpunkten und einer Ableitung u. ä. Wenn man eine oder mehrere weitere reelle Nebenbedingungen hinzunimmt, wird die Angelegenheit bei dieser „höheren Normierung" ungleich schwieriger, auch die Natur der Extremal-(Schlitz-)abbildungen. Aber auch das konnte H. Grötzsch in typischen Beispielen mit seiner Methodik meistern, beginnend mit [20] (hier Vorgabe von 7 reellen Parametern). Es ist faszinierend, wie er von den einfachen Anfängen [1] zu immer schwierigeren Beispielen aufsteigt, wie eben z. B. in dieser Arbeit [20].

Ein weiterer neuer Gedanke war dann, von der Betrachtung von Extremalproblemen zu *Wertannahmeproblemen* [12], [13], [15], [17], [18], [19] überzugehen. Dies bedeutet, daß nicht mehr reelle Funktionale (z. B. Betrag einer Ableitung) extremiert werden, sondern bei komplexen Funktionalen (z. B. eine Ableitung selbst) nach dem genauen Wertebereich gefragt wird. Das Verblüffende war, daß in vielen Beispielen dieser Wertebereich eine exakte Kreisscheibe ist, wenn man das komplexe

Funktional noch in eine geeignete „naturgemäße" Hilfsfunktion einsetzt. Auch das ist schon in [51] dargestellt – vgl. dort z. B. Theorem 6.13 (besagte Hilfsfunktion ist dort der komplexe Logarithmus). Kurioserweise betrachtete H. Grötzsch nicht zuerst das einfachste derartige Wertannahmeproblem in [15] (hier übrigens teilweise Überschneidung mit einer etwa gleichzeitigen Arbeit von R. de Possel – vgl. [51]). Dabei ist der Wertebereich der Koeffizienten a_1 in der Entwicklung

$$(2) \qquad w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

um den unendlich fernen Punkt $z = \infty$ bei den schlichten konformen Abbildungen $w(z)$ eines fixierten Gebietes $\ni \infty$ eine exakte abgeschlossene Kreisscheibe. Die Extremalfunktionen, die zu Randpunkten dieser Kreisscheibe führen, sind gewisse „Parallelschlitzabbildungen", bei denen die Bildrandkomponenten zueinander parallele Strecken sind.

Eines dieser Wertannahmeprobleme [19] soll noch besonders hervorgehoben werden. Hier geht es um die Frage, welche *Werte für das Doppelverhältnis* der Bilder von im Ausgangsgebiet fixierten 4 Punkten möglich sind. Man erhält hier eine exakte Kreisscheibe, wenn man nicht die Doppelverhältnisse selbst, sondern diese eingesetzt in eine elliptische Modulfunktion (also Hilfsfunktion s. o.) betrachtet. In dieser besonders eindrucksvollen Arbeit ist methodisch schon alles enthalten, was O. Teichmüller [69] (S. 25 ff.) später für das analoge Problem bei quasikonformen Abbildungen einfach übertragend nochmals ausführte. Das wurde und wird vielfach übersehen, worauf ich schon in [55] hinwies. (Ich bemerkte jetzt im Nachlaß, daß H. Grötzsch selbst die Arbeit [69] von O. Teichmüller durch Randbemerkungen umfangreich kommentiert hatte: z. B. „Frage wohl zuerst bei mir", „Mir bekannt (nicht in dieser Allg. veröff.)", öfter auch „gut".) Die Thematik ist immer wieder aktuell – vgl. z. B. [67] (Fußnote auf S. 299).

In [22] konnte H. Grötzsch ein interessantes neues Phänomen beobachten. Während bisher bei den Extremalproblemen im wesentlichen genau eine Extremalfunktion existierte, treten in [22] erstmals u. U. (in Abhängigkeit von der geometrischen Konfiguration) unendlich viele Extremalfunktionen (ein ganzes Kontinuum von solchen) auf. Und zwar entstanden bei diesem Extremalproblem bei den Extremalabbildungen im Bildgebiete Schlitze auf einer Schar „konfokaler" Cassinischer Kurven. In gewissen Fällen (nicht immer), wenn einer der sich einstellenden Schlitze den singulären Punkt (vierfacher Verästelungspunkt) der Schar der Cassinischen Kurven enthält, treten unendlich viele Abbildungen auf. Wenn man also die geometrischen Parameter des Ausgangsgebiets stetig ändert, kann sich plötzlich eine ganze Schar von Extremalabbildungen (von H. Grötzsch „Lemniskatenschlitzabbildungen" genannt) einstellen. H. Grötzsch bezeichnete dies als „Verzweigungserscheinung".

Schließlich sei noch das Extremalproblem in [8] besonders bedacht, welches auf G. Pólya und N. Tschebotaröw zurückgeht. In heutiger Sprechweise ist dabei unter allen Kontinuen, die n fest vorgegebene Punkte enthalten, nach denjenigen gefragt, für die die Kapazität (oder der transfinite Durchmesser) minimal ausfüllt. H. Grötzsch zeigte sehr elegant mit seiner Flächenstreifenmethode, daß es genau ein *Extremalkontinuum* in Form eines Schlitzsystems (vgl. Fig. 2 mit $n = 3$) gibt und charakterisiert dieses. Schon in [43] bezeichnete G. C. Evans diese Arbeit [8] als important contribution. In [48] (IV, § 3) existiert auch eine lehrbuchmäßige Darstellung, die sich an eine andere Lösung des Problems nach M. A. Lawrentjew mit einer Variationsmethode lehnt.

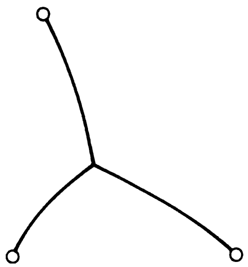

Fig. 2

Zu [8] existiert auch eine umfangreiche Nachfolgeliteratur. In [12] hatte H. Grötzsch auf S. 274/275 (wie oft in seinen Arbeiten ziemlich versteckt) schon Verallgemeinerungen angedeutet. Das ist in der von ihm angeregten Dissertation [81] und unabhängig von J. A. Jenkins (vgl. [51] Chapt. VII) in zahlreichen Arbeiten weitgehend durchgeführt worden; bis heute mehrere weitere Arbeiten – vgl. [61] mit auch zahlreichen Detailuntersuchungen.

Noch eine Bemerkung zum Existenzbeweis für die Extremalfunktionen bei H. Grötzsch. Sofern diese Existenz der benötigten Schlitzabbildungen nicht schon aus Koebeschen Arbeiten folgte, benutzte er die *Koebesche Kontinuitätsmethode*. Dazu wird erst eine „passende" isotherme Kurvenschar dadurch konstruiert, daß Rechtecke oder Ringgebiete zu Riemannschen Mannigfaltigkeiten konform verheftet werden (die betreffenden Kurven der Schar entstehen dann aus z. B. Parallelen zu den Rechteckseiten). Im 2. Schritt wird durch Parameterabzählung usw. ein Kontinuitätsschluß durchgeführt. Das ist äußerst instruktiv, weil es gleich die u. U. verschiedenen topologischen Verläufe bei den Kurvenscharen sinnfällig mit zum Ausdruck bringt. Freilich wird der Kontinuitätsschluß äußerst knifflig und ist nur sehr langwierig verbal zu beschreiben, wenn die o. g. Verzweigungserscheinung auftritt. Deshalb finden sich in den betreffenden Arbeiten von H. Grötzsch nur sehr knappe diesbezügliche Andeutungen. Es wäre wohl wünschenswert, wenigstens in einem einfachen Beispiel, etwa [23], die ganze Sache einmal wesentlich ausführlicher darzustellen.

O. Teichmüller hat später [70] durch Betrachtung der Kurvenscharen, auf denen die Bildschlitze der Extremalfunktionen erscheinen, und andererseits der Vorgaben im Extremalproblem (Normierungen und Funktional) erkannt, daß ein ganz einfacher Zusammenhang besteht: Diese Kurvenscharen lassen sich durch ein *quadratisches Differential* beschreiben. Das heißt: Längs der einzelnen Kurven dieser Scharen in einer w-Ebene gilt

(3) $$Q(w)\,\mathrm{d}w^2 > 0$$

mit einer rationalen Funktion $Q(w)$ (auf Flächen höheren Geschlechts dann Funktionen, die bis auf Pole regulär sind), wobei das Auftreten der Pole und Nullstellen in einfachem Zusammenhange mit besagten Vorgaben des Extremalproblems steht. (Es wird durch (3) in jedem Punkt w ein Linienelement definiert, und Integration dieses Richtungsfeldes liefert die jeweilige Kurvenschar.) Dadurch ist die Grötzschsche Konstruktion der Kurvenscharen durch passende Riemannsche Mannigfaltigkeiten (s. o.) überflüssig – man kann sofort das quadratische Differential anschreiben. Diese Entdeckung der quadratischen Differentiale gilt mit als wesentliche Leistung von O. Teichmüller. Allerdings muß tatsächlich gesagt werden – H. Grötzsch hatte gesprächsweise immer darauf hingewiesen –, daß eigentlich quadratische Differentiale (freilich ohne Verwendung dieses Wortes) implizit schon in [8] vorkommen in einem Beispiel, indem nämlich dort in einem Zusatz von P. Koebe am Ende die analytische Natur formelmäßig angegeben wird, was genau dem zugehörigen quadratischen Differential entspricht.

Die von O. Teichmüller zunächst nur als Vermutung formulierte Beschreibung der Extremalabbildungen durch quadratische Differentiale ist dann später in einer großen Klasse von Fällen von J. A. Jenkins in Form seines bekannten General Coefficient Theorem bewiesen worden; vgl. den Ergebnisbericht [51].

H. Grötzsch hatte sich für die *analytische Natur der Extremalabbildungen* früher anscheinend überhaupt nicht interessiert. Überhaupt hatte er kein so inniges Verhältnis zur „Formelmathematik“, er dachte immer mehr geometrisch-anschaulich. Lediglich in [22] wird in der Einleitung darauf hingewiesen, daß nach seiner „geometrisch-funktionentheoretischen“ Lösung eines Extremalproblems (in Form der Angabe der zugehörigen Kurvenscharen bzw. der zugehörigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten) noch das Problem besteht, diese Extremalabbildungen als Funktionen und damit die genauen Schranken für das betreffende Funktional wirklich zu bestimmen. Das läßt sich heute nach Kenntnis des zugehörigen quadratischen Differentials leicht für Gebiete, die von 1 oder 2 Kreisen berandet sind, durchführen [54]. Bei einem Randkreis des gegebenen Ausgangsgebietes entsteht für die Extremalabbildung $w(z)$ die implizite Darstellung der Form

$$\int \sqrt{Q(w)}\,\mathrm{d}w = \int \sqrt{Q^*(z)}\,\mathrm{d}z \tag{4}$$

mit rationalen Funktionen $Q(w)$ (s. o.) und $Q^*(z)$.

Allerdings wird die praktische Berechnung von $w(z)$ nach (4) meistens unerhört dadurch erschwert, daß in $Q(w)$ und $Q^*(z)$ noch (über letztlich nichtlineare Gleichungen) zu bestimmende akzessorische Parameter auftreten. (Es ist z. B. bis heute nicht gelungen, über die in diesem Falle entstehende Beziehung (4) die Bieberbachsche Vermutung zu beweisen.)

Bei 2 Randkreisen des gegebenen Ausgangsgebietes ist $Q^*(z)$ durch einen Ausdruck in elliptischen Funktionen zu ersetzen [54], was natürlich ganz erheblich weiter kompliziert. Hat man gar einen Zusammenhang > 2 des Ausgangsgebietes, stehen keine entsprechenden Hilfsfunktionen (wie rationale bzw. elliptische) zur Verfügung, und man kann nur eine Zurückführung auf andere einfache konforme Abbildungen (z. B. Parallelschlitzabbildungen, Kreisbogenschlitzabbildungen u. ä., die sich heute z. B. über Orthonormalreihenentwicklungen im Zusammenhange mit der Bergmannschen Kernfunktion auch konstruktiv ergeben) des Gebietes anschreiben

[54]. Das ordnet sich dann ein in den umfassend von Garabedian und Schiffer [47] aufgerollten großen Fragenkreis „Identitäten zwischen konformen Abbildungen".

Übrigens ergibt sich die Darstellung (4) auch über die wesentlich durch M. Schiffer [51] begründete (innere) Variationsmethode. Ferner muß noch gesagt werden, daß ein Teil der Grötzschschen Resultate auch durch H. Grunsky (vgl. [49]) mit seiner Methode der Randintegration gewonnen wurde (sich mehr auf den einfach zusammenhängenden Fall konzentrierend). Eine hervorragende, noch heute gültige geschichtliche Darstellung der verschiedenen Methoden wurde von J. A. Jenkins in der Einleitung von [51] gegeben.

Zum Abschluß des Teilthemas „Extremalprobleme bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten" sei noch aus [51] (S. 7/8) zitiert.

„His [Grötzschs] approach, called by him the method of strips, represents a very essential improvement over the primitive length-area proofs, operating with the characteristic conformal invariants of doubly-connected domains and quadrangles. He readily obtained most of the then known results and in an outstanding series of papers ... obtained many interesting new results, attacking with equal facility problems for simply-connected domains and for domains of finite connectivity. ... It is difficult to understand the slowness with which proper recognition came to him. Even to-day, when one feels that his work must be universally known, we find his results being explicitly credited to others ... Perhaps the best measure of the brilliance of his accomplishment is the effort required for some mathematicians at the present time, working with the best tools now available, to rediscover his results, obtained twenty-five years ago and more."

Diese Worte von 1957 haben heute unverändert Gültigkeit. Es ist mir tatsächlich bis heute ein großes Rätsel, wie H. Grötzsch in dieser kurzen (und dabei politisch und wirtschaftlich so schwierigen) Zeit 1928 bis 1935 solch gewaltiges, weit in die Zukunft reichendes Werk schaffen konnte.

Es sei noch der Vollständigkeit halber erwähnt, daß sich im Zuge seiner oben betrachteten Extremalprobleme vor allem in den Arbeiten [5] (S. 69), [6], [7], [24] von H. Grötzsch auch Extremalprobleme mit Flächeninhalten, Umfangsgrößen bzw. Durchmessern von Bildrandkomponenten zwanglos ergaben, weil eben in (1) ein Flächeninhalt auftritt.

2 Quasikonforme Abbildungen

Der Name Grötzsch ist wohl bei vielen vor allem mit der Theorie der quasikonformen Abbildungen verbunden, die er ab 1928 begründete. Die Bezeichnung „Quasikonforme Abbildungen" wurde allerdings erst später von L. V. Ahlfors eingeführt. (Freilich sagte mir Ahlfors Februar 1992 in Oberwolfach, daß er diese Bezeichnung bei jemandem „gestohlen" habe, er wisse nur nicht mehr bei wem.) Bei diesen Abbildungen geht – grob gesprochen – ein infinitesimaler Kreis nicht notwendig (wie bei konformen Abbildungen) wieder in einen infinitesimalen Kreis über, sondern in eine infinitesimale Ellipse, wobei aber deren Achsenverhältnis im betreffenden Gebiet beschränkt ist. Der „geistige Nährboden" zur Betrachtung solcher Verallgemeinerungen ist schon in den Koebeschen Seminaren gelegt worden. Aber der entscheidende Punkt war, daß Grötzsch erkannte, daß viele qualitative Eigenschaften konformer

Abbildungen bei diesen quasikonformen Abbildungen vollständig erhalten bleiben. Das lag daran, daß sich seine Flächenstreifenmethode übertragen ließ. Auch ergab sich so sofort die Möglichkeit [7], eine große Zahl seiner o. g. Extremalprobleme auch für diese allgemeineren Abbildungen geometrisch-funktionentheoretisch zu lösen. Auch hier ergänzt O. Teichmüller noch die Theorie durch die Charakterisierung der Extremalabbildungen (wieder Schlitzabbildungen) durch quadratische Differentiale, was alles ganz analog wie im konformen Falle ist. Auf eine ausführliche Würdigung dieser Dinge kann hier verzichtet werden, da über Einzelheiten schon in [58] berichtet wurde, bis hin zu dem Umstand, daß H. Grötzsch damit der Wegbereiter zur Theorie der Teichmüller-Räume wurde. Schon 1960 hatte H. P. Künzi [60] einen Ergebnisbericht zur Theorie der quasikonformen Abbildungen vorgelegt. Bezeichnenderweise fehlt dort der Name Grötzsch im Register, weil das keinen Sinn gehabt hätte: Er hätte viel zu oft zitiert werden müssen.

H. Grötzsch hatte quasikonforme Abbildungen in der Ebene betrachtet. Aber natürlich dachte er schon an Übertragungen in höherdimensionale Räume, ohne darüber durch die Zeitumstände etwas zu veröffentlichen; vgl. hierzu Bemerkungen in [59]. Heute existiert zu den räumlichen Abbildungen eine umfangreiche eigenständige Literatur; vgl. z. B. [72].

Auch dachte H. Grötzsch sofort schon 1928 [3] an nichtschlichte Verallgemeinerungen, indem er eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes angab und in [16] des Schwarzschen Lemmas (dies wurde bzw. wird oft in der Literatur übersehen, auch daß hierhin implizit die Hölderstetigkeit quasikonformer Abbildungen enthalten ist). Auch zu diesen nichtschlichten Abbildungen existiert heute eine eigenständige Theorie: Die quasiregulären Abbildungen bzw. Funktionen als Verallgemeinerung der regulären bzw. meromorphen Funktionen, vgl. z. B. [64].

Als P. Koebe die erste Arbeit [3] zur Theorie der quasikonformen Abbildungen in den „Leipziger Berichten“ vorlegte, soll sich Widerstand geregt haben mit der Frage „Wozu ist das gut?“. Die Antwort von P. Koebe soll gewesen sein: „Das kann man nicht wissen“.

3 Konforme Abbildung von unendlich-vielfach zusammenhängenden Gebieten

Es war lange bekannt gewesen, daß unter den durch (2) normierten schlichten konformen Abbildungen eines endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes $B \ni \infty$ genau eine Parallelschlitzabbildung existiert, d. h. eine solche Abbildung, bei der als Bildrandkomponenten Strecken parallel zur reellen Achse entstehen. Bei unendlich-vielfach zusammenhängenden Gebieten B gilt der Existenzsatz auch. Daß aber der Unitätssatz nicht mehr immer richtig ist, hatte dann P. Koebe bemerkt. In der Menge der Parallelschlitzabbildungen konnte er immerhin eine durch eine Minimaleigenschaft mit einem Dirichlet-Integral auszeichnen als sog. „minimale Schlitzabbildung“ (die zugehörigen Bildgebiete, „Gebiete“ werden hier noch als „Bereiche“ bezeichnet, nannte er „minimale Schlitzbereiche“). Die geometrische Natur der minimalen Schlitzbereiche ist nicht einfach charakterisierbar. Koebe konnte zeigen, daß bei minimalen Schlitzbereichen notwendig der äußere Flächeninhalt des Randes $= 0$ ist. Die Umkehrung ist falsch. Koebe konnte sogar einen nur von Punkten auf der imaginären

Achse berandeten Bereich angeben, der nicht minimaler Schlitzbereich ist. Allerdings ist B sicher dann minimaler Schlitzbereich, wenn der äußere lineare Inhalt I der Projektion auf die imaginäre Achse $= 0$ ist. Koebe vermutete, daß $I = 0$ auch notwendig ist für einen minimalen Schlitzbereich. Das konnte H. Grötzsch in [10] durch ein Beispiel widerlegen. Dadurch entstand übrigens vorübergehend eine kleine Störung seines Verhältnisses zu Koebe. Darüberhinaus gab H. Grötzsch sogar ein kniffliges Beispiel eines minimalen Schlitzbereiches an, bei dem die Projektion auf die imaginäre Achse ein ganzes Intervall enthält. Wesentliches Hilfsmittel war dabei wieder seine Flächenstreifenmethode. Er konnte nämlich eine neue mehr geometrische Charakterisierung der minimalen Schlitzbereiche beweisen. Dadurch sind letztere auch dadurch zu definieren, daß genau bei ihnen – grob gesprochen – innerhalb eines großen achsenparallelen Rechtecks „von links nach rechts verlaufende“ Einteilungen mit Flächenstreifen existieren, für die die Modulsumme dem maximal denkbaren Wert, nämlich dem Modul des Rechtecks, beliebig nahe kommen (so daß also die Randkomponenten kein „zu starkes Hindernis“ darstellen). Daraus ergab sich leicht [15], daß die minimalen Schlitzabbildungen auch dadurch sehr einfach charakterisiert werden können, daß genau bei ihnen unter allen durch (2) normierten schlichten konformen Abbildungen $\mathfrak{Re}\, a_1$ maximal wird.

Die Situation bei anderen Extremalproblemen „vom Grötzschschen Typ“ ist sehr ähnlich, wenn man wieder zu unendlich-vielfach zusammenhängenden Gebieten übergeht. Allerdings bemerkt H. Grötzsch in [14], daß Komplikationen auftreten können, wenn man den Durchmesser des Bildes einer ausgezeichneten Randkomponente R bei den durch (2) normierten Abbildungen eines Gebietes $\ni \infty$ minimieren will. Wenn R Häufungsrandkomponente ist, kann es vorkommen, daß keine Extremalfunktionen existieren, man der unteren Grenze für dieses Durchmesser-Funktional nur beliebig nahe kommen kann.

Zuvor hatte er schon mit seiner Flächenstreifenmethode in seiner Dissertation [5] den Fall betrachtet, es treten nur endlich viele Häufungsrandkomponenten auf. (Solche sind nicht isoliert, d. h. lassen sich nicht von den übrigen Randkomponenten durch einen nur aus inneren Punkten bestehenden zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen = „Ringgebiet“ abtrennen.) Dabei wird die verwandte Situation ausführlich betrachtet, es soll auf einen konzentrischen Kreisring mit konzentrischen Kreisbogenschlitzen abgebildet werden. Grob gesprochen gilt in diesem Falle Existenz- und Unitätssatz wie bei endlich vielfach zusammenhängenden Gebieten. Das wird dann noch in [11] verallgemeinert, wobei seine inzwischen in [10] gegebene (oben skizzierte) neue Charakterisierung der Koebeschen „minimalen Schlitzbereiche“ wieder auftritt. In [11] (S. 243/244) findet sich übrigens sehr versteckt mit tatsächlich nur mageren Andeutungen ein verhältnismäßig wenig bekannter Flächensatz; ausführlichere Darstellung in [45].

Schließlich gab H. Grötzsch in der kürzeren Arbeit [28] noch einen Beitrag zum Koebeschen Kreisnormierungstheorem (Abbildung auf nur von Vollkreisen bzw. Punkten berandete Gebiete). Er bewies dies incl. Unitätssatz für den Fall endlich vieler Häufungsrandkomponenten, welche „vollkommen punktförmig“ sind. Letztere charakterisiert er durch eine Flächenstreifenbedingung. Hier ist die Entwicklung inzwischen wesentlich fortgeschritten: Der Fall von Gebieten mit abzählbar vielen Randkomponenten in [50]; dort weitere Literatur.

H. Grötzsch muß sich zur Theorie der konformen Abbildungen unendlich-vielfach zusammenhängender Gebiete vor dem Kriege noch einiges überlegt haben, was er durch die beschriebenen politischen Umstände nicht mehr zur Veröffentlichung fertigstellen konnte. Er machte bis in die 60er Jahre oft dementsprechende Andeutungen, die er dann immer mit der Bemerkung abschloß „... aber vielleicht steht das schon in den null-sets" (er meinte [38]). Er hatte sich aber auch wohl geistig von diesen Dingen inzwischen schon weit entfernt, sagte einmal: „Vielleicht ist diese Theorie der konformen Abbildung unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche doch nicht so organisch". Das entspricht auch seiner mehr anschaulich-konkret-konstruktiv-intuitionistischen Tendenz in späteren Jahren.

Das Buch [66] besteht zu wesentlichen Teilen in der Darstellung der Grötzschschen Ideen und Ergebnissen zu dieser Theorie.

4 Iterationsverfahren [9], [15]

Hier geht es H. Grötzsch darum, die Existenz seiner Extremalfunktionen (Schlitzabbildungen) neu in rein konstruktiver Weise zu beweisen. Dabei wird die (in vielen Fällen auch schon nach P. Koebe bekannt gewesene) Existenz im Falle n-fach zusammenhängender Gebiete zurückgeführt auf die (nach dem Riemannschen Abbildungssatz evidente) Existenz im einfach zusammenhängenden Falle. Hierzu wird eine Folge von Abbildungen einfach zusammenhängender Gebiete betrachtet, indem immer nur eine Randkomponente beachtet wird.

Dieser Iterationsgedanke trat schon bei P. Koebe auf, der sich ja überhaupt viel mit Iterationen beschäftigt hat. Aber H. Grötzsch konnte nun mit seiner Flächenstreifenmethode die Konvergenz so beweisen, daß sogar eine konkrete effektive Fehlerabschätzung entsteht. Eine Darstellung dieser Dinge wurde schon in [44] (S. 235 ff.) gegeben; dort Genaueres zur Konvergenzgüte.

In [26] (Zusatzbemerkung 1) wurde dann noch auf die sehr allgemeine (in dieser Allgemeinheit bis heute völlig offene) Frage nach der Konvergenz des analogen Iterationsverfahrens bei seinem allgemeinen Abbildungssatz in [26] hingewiesen. Diese Frage hat ihn nie verlassen (s. u.).

In der Nachkriegsarbeit [31] konnte er zu [9] noch eine wesentliche Ergänzung machen: Die gleichmäßige Konvergenz dieser Iterationsverfahren findet nicht nur in jedem abgeschlossenen beschränkten Teilgebiet statt, sondern sogar im ganzen Gebiet einschließlich Rand. In seiner letzten funktionentheoretischen Arbeit [32] konnte er außerdem zeigen, daß auch für gewisse unendlich-vielfach zusammenhängende Gebiete ein gewissermaßen im Sinne von L. E. J. Brouwer konstruktiver (das Häufungsprinzip vermeidender) Existenzbeweis zum z. B. Kreisbogenschlitztheorem entsteht.

5 Abbildungssätze zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete

Es seien n Scharen von parallelen Geraden vorgegeben (d. h. die n Richtungen seien vorgegeben). Dann läßt sich nach dem Koebeschen Geradenschlitztheorem jedes n-fach zusammenhängende Gebiet $\ni \infty$ auf genau eine Weise mit der Normierung (2) so schlicht konform abbilden, daß die k-te Bildrandkomponente ein auf der

k-ten Schar gelegener Schlitz (d. h. eine Strecke der k-ten Richtung) wird. In [26] konnte H. Grötzsch diesen Satz in der Weise gewaltig verallgemeinern, daß jetzt für die jeweils k-te Schar eine weitgehend beliebige von einem reellen Parameter abhängige Kurvenschar treten kann. Der Beweis gelingt mit der Koebeschen Kontinuitätsmethode, wobei er für den entscheidenden Unitätssatz einen Gedanken von T. Carleman (Verwendung des Argumentprinzips) ausnutzen kann. Er kann durch einen Grenzübergang dann sogar Singularitäten bei den Scharen zulassen, wobei dann allerdings der Unitätssatz verloren gehen kann (ähnlich wie oben bei der Lemniskatenschlitzabbildung bei einer etwas anderen Normierung). Damit wird wohl so ziemlich das Allgemeinste erreicht, was bei geometrischen „Normalformen" von n-fach zusammenhängenden Gebieten bezüglich normierter schlichter konformer Abbildung möglich ist.

In [27] wird noch etwas Analoges hergeleitet für „Vollkurvennormalformen", d. h., es wird in Verallgemeinerung des Koebeschen Kreisnormierungstheorems (wieder bei Normierung (2)) als k-te Bildrandkomponente ($k = 1, \ldots, n$) eine geschlossene Jordankurve einer entsprechenden Schar erreicht. Beweis wieder mit der Kontinuitätsmethode und dem Argumentprinzip zur Herleitung des Unitätssatzes. Man vgl. auch neuere Arbeiten zu dieser Thematik u. a. von M. Brandt.

In [30] wird das Ganze mit gleicher Methodik wie in [26], [27] noch für andere Normierung der Abbildungen durchgeführt. Dabei findet sich noch der Hinweis, daß sich ganz allgemein die Problematik der Normalbereiche auf einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit als festem „Träger" ergibt ([26], [27], [30] beziehen sich in dieser Sicht auf die Zahlenkugel bzw. punktierte Zahlenkugel als Träger).

6 Sternförmige und konvexe Abbildungen des Einheitskreises

Die diesbezügliche Arbeit [29] fällt methodisch völlig aus dem Rahmen. Hier wird das Verschiebungsproblem seiner Habilitationsschrift [12] spezialisiert auf sternförmige schlichte konforme Abbildungen des Äußeren des Einheitskreises, wobei er wieder den genauen Wertebereich der Bildpunkte eines fixierten Punktes angeben kann. Einige Folgerungen. Diese Arbeit fällt auch insofern aus dem Rahmen, als H. Grötzsch sich hier erstmals mit dem „simplen" einfach zusammenhängenden Falle des abzubildenden Gebietes abgibt, der ja tatsächlich (bis heute) eine eigentümliche Sonderrolle spielt. Bisher hatte er allgemein mehrfach zusammenhängende Gebiete abgebildet, ohne besonders auf den Sonderfall einfach zusammenhängender einzugehen. (Bei vielen Funktionentheoretikern ist es umgekehrt: Sie interessieren sich fast ausschließlich für den einfach zusammenhängenden Fall, d. h. für schlichte konforme Abbildungen des Inneren oder Äußeren des Einheitskreises; vielleicht ist das auch mit ein Grund dafür, daß die Grötzschschen Arbeiten in manchen Kreisen bis heute nicht so bekannt geworden sind.) Tatsächlich hätte das ja auch nur Sinn gehabt, wenn er für diesen Sonderfall alles genauer „ausgerechnet" hätte. Rogosinski habe ihn z. B. per Postkarte einmal angefragt, ob man nicht zu seinem Verschiebungssatz [12] fürs Äußere des Einheitskreises die Extremalfunktionen konkret angeben könne. Das habe ihn damals aber nicht interessiert. Erst nach dem Kriege vergab er zu diesem Thema eine Diplomarbeit [76]. Da hatte allerdings inzwischen G. M. Golusin (vgl. [48], IV, § 3, sowie [51], Corollary 6.11) – wie später bemerkt wurde – die Sache anders (mit Variationsmethoden) schon erledigt (ohne freilich [12] zu kennen); vgl. hierzu auch [57].

Daß diese Arbeit [29] in den Commentarii Mathematici Helvetici erschien, erklärte mir H. Grötzsch mit „Ich wollte damals nicht mehr in Deutschland publizieren" (eine Mitarbeit gar in der „Deutschen Mathematik" wäre für ihn völliges Unding gewesen).

III Die Persönlichkeit

Noch einige allgemeine Bemerkungen zu den Grötzschschen Arbeiten. Seine Arbeiten sind nicht leicht lesbar in den Beweisen durch den gedrängten Stil. Dieser war ihm wohl von Koebe eingebläut worden (obwohl Koebe ja nun nicht gedrängt schreibt). Immerhin ist aber die Problemstellung und das Ergebnis in der Einleitung immer leicht erkennbar. Die meisten seiner Arbeiten sind in „Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Klasse" erschienen. Ahlfors [36] schreibt (S. 81): „Because of the relative obscurity of this journal, it was a long time before Grötzsch's work became generally known". Diese Zeitschrift als „obscure" zu bezeichnen (vgl. auch [39]), ist wohl abwegig: Das war seinerzeit eine der führenden wissenschaftlichen Zeitschriften. Heute ist sie allerdings in den (mathematischen) Bibliotheken kaum vorhanden. Nach dem Kriege hat H. Grötzsch seine (vor allem graphentheoretischen) Arbeiten mit einer Ausnahme in der „Wissenschaftlichen Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe" veröffentlicht, auch nicht gerade leicht zugänglich. Das war ihm das Bequemste. Vor allem konnte ihm da keiner hineinreden und Vorschriften machen, was ihm höchst zuwider war. Er war sogar eine Zeitlang in der Redaktionskommission dieser Zeitschrift.

H. Grötzsch war zweifellos entscheidend von P. Koebe wissenschaftlich geprägt, von dem er sehr oft sprach, immer in größter Hochachtung. Eigentlich wäre H. Grötzsch dazu prädestiniert gewesen, einen Nachruf für Koebe zu schreiben. Zwar fand sich in seinem Nachlaß ein Zettel mit dem Text: „Dez. 1965: 20 Jahre, seit Koebe gestorben. Zur Erinnerung an P. Koebe. Schreiben in Wiss. Zeitschr. [die Zeitschrift von [33]]". Aber zu einem Nachruf durch ihn ist es eigentümlicherweise nicht gekommen. (Das war wohl seine Schwäche in späteren Jahren: Er kam nicht mehr dazu, seine Ideen in endgültige schriftliche Form zu bringen.) Einmal sagte er um 1965, wenn er einen Nachruf auf Koebe schreiben würde, dann würde dieser lauten: „Nachruf auf Paul Koebe: Er hat ihn nicht nötig!". Über die Beziehungen der Grötzschschen Arbeiten zu denen von Koebe habe ich in [56] berichtet. Grötzsch sähe sich heute in seiner Ansicht über Koebe erneut glänzend bestätigt: Was von den meisten völlig übersehen wurde in der Unmenge neuerer Arbeiten über „circle packing" u. ä. – das Entscheidende hatte bereits Koebe 1936 hierzu geleistet!

Weitere Notizzetteltexte im Nachlaß: „Die Mathematik muß einfach werden – Paul Koebe"; „Thema: ‚Die Bedeutung Koebe's für die Math. von heute'"; „Wir müssen in der Math. von dem begrifflichen Formalismus loskommen und wieder zum Inhalt und der konkreten Realisierung der math. Begriffe, Realisierung durch die Einzelvertreter zurückkehren" (das war oft gesprächsweise ein Thema bei ihm).

Man vgl. auch die Darstellung der Grötzschschen Denkweise in [65] im Zusammenhang mit der Graphentheorie.

Nachdem H. Grötzsch sich nach dem Kriege mit seinen wissenschaftlichen Interessen mehr und mehr der Graphentheorie zugewandt hatte, hat er in funktionentheoretischer Hinsicht in [30], [31], [32] nur noch alte Sachen aus der Vorkriegszeit schriftlich aufgearbeitet. Meines Wissens hat er sich darüber hinaus nur noch sehr intensiv mit einem schon in [26] formulierten Problem der Iterationstheorie beschäftigt (dieses Problem wird noch einmal in [44] Kap. V, § 4b formuliert). Dabei geht es im einfachsten (ungelösten) Falle darum, die Koebesche Geradenschlitzabbildung (s. o.) iterativ durch eine Folge von Abbildungen einfach zusammenhängender Gebiete zu gewinnen. Ist $B \ni \infty$ etwa zweifach zusammenhängend, soll bewiesen werden, daß die gemäß (2) normierte schlichte konforme Abbildung von B auf ein von zwei Strecken vorgegebener Neigung berandetes Gebiet so gewonnen werden kann. Man bilde im 1. Schritt das Äußere der 1. Randkomponente normiert auf das Äußere einer Strecke bewußter gewünschter Neigung ab, im 2. Schritt das Äußere des Bildes der 2. Randkomponente auf das Äußere einer Strecke gewünschter Richtung, dann im 3. Schritt das Äußere des jetzt entstandenen Bildes wieder der 1. Randkomponente usw. Die Konvergenz dieser Iteration ist tatsächlich im allgemeinen Falle bis heute offen. Er hatte mir in meiner Diplomarbeit [79] einige Hilfsaufgaben hierzu (asymptotisches Verhalten bei konformer Abbildung des Äußeren einer „Faststrecke“) gestellt. Da die Ergebnisse anders als von ihm erwartet ausfielen, hatte er die Angelegenheit mehr und mehr in der ihm vorschwebenden Form als aussichtslos angesehen. Er hatte dann dieses Problem nur noch in dem eingeschränkten Falle betrachtet, beide Randkomponenten sind hinreichend weit voneinander entfernt. Hierzu vergab er seine letzte Diplomarbeit [80]. Dieses Interesse für solche Iterationsverfahren entsprach dem zunehmend bei ihm zu beobachtenden schon o. g. intuitionistischen Interesse für konstruktive Existenzbeweise (in der Funktionentheorie speziell Vermeidung des Häufungsprinzips).

H. Grötzsch ist m. W. seit der DMV-Tagung (Stuttgart und Tübingen) Sept. 1935 (vgl. Auszug [27a] zum Vortrag am 23. Sept. 1935) nie mehr zu einer Tagung oder einem Kolloquiumsvortrag gefahren. Dadurch ist er als Mensch kaum bekannt geworden. Die nach August 1961 durch den Mauerbau entstehende Isolierung hat ihn wohl kaum getroffen. Als er ca. 1965 eine Einladung nach Oberwolfach erhielt, redete ihm ein junger „Genosse“ wohlmeinend zu, doch die „Beantragung“ der Reise zu versuchen. Er rief spontan und fast explosionsartig aus: „Ich bettele doch nicht, fahren zu dürfen“.

Immerhin war er in Halle fast regelmäßiger Besucher des Mathematischen Kolloquiums (bis zur Emeritierung), was freilich damals noch „zum guten Ton“ gehörte. Warum er allerdings ein Kolloquium von H. Grunsky, der ihm wissenschaftlich sehr nahe stand, am 17. Sept. 1957 („Konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs“, ein Ansatz zum Beweis des Koebeschen Kreisnormierungstheorems, der – nach späteren Worten Grunskys – nicht trug) nicht besuchte, blieb mir unklar.

Es ist auch eine heute nur schwerverständliche Tatsache, daß sich Grötzsch und Ahlfors, die sich wissenschaftlich früher so nahe standen, niemals begegnet sind. Ahlfors sagte mir in den letzten Jahren mehrfach, er habe früher immer geglaubt, Grötzsch würde gar nicht existieren. Die Wertschätzung von Grötzsch durch Ahlfors kommt noch einmal in folgenden Zitaten zum Ausdruck: „Arne (Beurling) did not know of me, nor I of Arne, and neither of us had heard of H. Grötzsch, a German mathematician who could easily have proved the Denjoy conjecture and later became well known in connection with quasiconformal mappings“ [37]; „All the work of Grötzsch was late to gain recognition, and this particular idea [quasikonforme Abbildungen] was regarded as a curiosity and allowed to remain dormant for several years“ [35] (S. 2).

Immerhin bin ich glücklich, daß ich eine Sternstunde, ein Treffen von H. Grötzsch und J. A. Jenkins, der so viel zur Popularisierung des Werkes von Grötzsch getan hat, am 14. Dez. 1988 in Grötzschs letzter Wohnung in der Mozartstraße 22 vermitteln und miterleben konnte. Das war sein letzter Kontakt mit auswärtigen Mathematikern. Ich sah ihn das letzte Mal zu seinem 90. Geburtstag.

Mit seinem extrem isolierten und zurückgezogenen Leben hängt wohl auch zusammen, daß seine Halleschen Studenten sich kaum seiner Bedeutung als Mathematiker bewußt waren; manche hatten es aber wohl etwas geahnt. So war er eigentümlicherweise in Halle mehr bekannt und geschätzt durch seine ganz ungewöhnliche Persönlichkeit und Menschlichkeit. So hat er viele Studenten eigentlich mehr geprägt durch sein großes menschliches Vorbild. Typisch für ihn war z. B., daß er das alte Melanchthonianum-Faktotum Frl. Grunert, die nach jeder Vorlesungsstunde die Tafeln abzuwischen hatte (das waren Zeiten!) mit gleicher Aufmerksamkeit begrüßte wie seinen Kollegen und Institutsdirektor O.-H. Keller. Und Gleiches traf immer für alle – auch die schwächsten – Studenten zu. Er kümmerte sich hingebungsvoll auch um private Sorgen der Studenten (was natürlich manchmal von Unwürdigen ausgenutzt wurde).

Bezeichnenderweise wurde ich ca. 1959 einmal von einem Studenten, der in [40] (S. 178) auf die Passage „Die Arbeiten von Grötzsch ... sind als eine bedeutende Leistung über die konforme Abbildung ... anzusehen“ stieß, ungläubig gefragt: „Ist das unser Grötzsch?“

Aus Institutsquerelen u. ä. hielt er sich immer heraus. Auch ließ er sich politisch vor und nach 1945 von niemandem vereinnahmen. Dies zeigt auch der Umstand, daß er nicht als OdF („Opfer des Faschismus“ im Sinne der DDR) anerkannt war. (Mir ist allerdings nicht bekannt, ob er sich dem gewollt entzog oder ob hier seine frühere Zugehörigkeit zum Stahlhelm eine Rolle spielte. Letzteres ist mir von einem Fall meiner Verwandtschaft bekannt: Die Witwe eines von den Nazis umgebrachten „Stahlhelmers“ bekam nicht die OdF-Anerkennung und mußte von der Sozialhilfe leben.) Mit einem (sehr höflich formulierten) Brief vom 1. 11. 1962 lehnte er es ab, den in der damaligen DDR hochprivilegierten Sonderstatus mit einem „Einzelvertrag“ anzunehmen.

Auch haßte er die Bildung mathematischer Klüngel (bzw. „Schulen“), die auf ihrem Gebiet tonangebend sein wollen, Gremien, Zeitschriften usw. beherrschen. Wohl u. a. auch deshalb wurde er niemals zu einem IMU-Kongreß eingeladen.

Im Universitätsleben in Halle war er in den 50er und 60er Jahren auf seine Weise eine Institution. Es war schon eindrücklich, wenn er täglich zur Vorlesung (nicht vor 11 Uhr) über den Universitätsplatz zum Melanchthonianum kam, in seiner wuchtigen Gestalt mit schnellen Schritten gleich einer Büffelherde stampfend, in souveräner Verachtung seines Äußeren. Dann kam sein charakteristisches Kopfzeichen . . . – – – – – an der Bibliothekstür. Hier schlüpfte er in einen weißen Kittel, griff seinen viel zu großen Holzkasten mit allerlei bunter Kreide und marschierte zum Hörsaal A, B, Z oder 18, nicht ohne vorher noch mindestens einmal durch ganz bedrohliches Rütteln festgestellt zu haben, daß die Tür seines Zimmers wirklich verschlossen ist. Nachmittags gab's dann oft die bei den Assistenten gefürchteten, weil äußerst langwierigen Klausurbesprechungen. Keiner wagte, auf die Uhr zu schauen. Oft bemerkte er erst etwa gegen 18 Uhr zu unserer Erlösung: „Um Himmels willen – ich habe ja noch nicht Mittag gegessen".

Mit direkt politischen Äußerungen hielt er sich in der DDR-Zeit extrem zurück. Nur einmal (25. Mai 1960) redete er mir unter 4 Augen zu, in den FdGB = „Gewerkschaft" der DDR) einzutreten, um „gewissen" Widerständen „durch die jüngeren Herren" gegen meine Einstellung als Assistent besser entgegen treten zu können, da er keine Kraft zu kämpfen mehr habe. Seine übergroße Vorsicht wurde mir klarer, als ich im Archiv der Universität Halle in seiner Akte [74] eine handschriftliche Erklärung vom 29. 6. 1953 von ihm fand, zu der er offenbar genötigt war, nachdem er am Rande einer Demonstration zum 17. Juni 1953 abends gegen ½ 7 Uhr am Rande des Halleschen Hallmarkts beobachtet wurde. Nach Aussage von Frau Grötzsch wurde er zum Rektor zitiert, der die damals sehr heikle Sache aber mit einem mündlichen Verweis abbog.

An sich wurde H. Grötzsch dann in der DDR durchaus als der „antifaschistisch-humanistische Wissenschaftler" anerkannt (wenn auch mit dem in solchen Fällen üblichen gewissen selbstherrlich-mitleidig-nachsichtigen Unterton, daß ihm als „bürgerlichem Wissenschaftler" natürlich die – nur auf der Grundlage des Marxismus-Leninismus mögliche – allerletzte Klarheit eben doch versperrt sei).

Bei aller Gutmütigkeit konnte er manchmal auch sehr heftig werden. Hinterher freilich sagte er einmal lächelnd quasi zur Entschuldigung: „So, jetzt bin ich so erfrischt, jetzt habe ich eine Tasse Mona-Kaffee gespart". Besonders regte er sich über die Universitätsbürokratie auf: „Die Universität ist für die Verwaltung da!". (Was würde er heute sagen? Was würde er z. B. sagen, wüßte er, daß seine Witwe für ihre Rente allen Ernstes sein Abiturzeugnis von 1922 vorlegen mußte!?)

Er war so gänzlich ohne Arg und trat jedem spontan und unvoreingenommen gegenüber. Er ist nun schon lange aus dem Bild der Universitätsstadt Halle verschwunden. Aber immer wieder trifft man auch heute noch auf Personen, die diesen einzigartigen, jenseits der Zeiten lebenden Menschen einmal kennengelernt hatten und in der Erinnerung glänzende Augen bekommen, obwohl sie meistens keine Spur einer Ahnung seiner Bedeutung als Mathematiker haben.

Wenn ich an Herbert Grötzsch zurückdenke, fällt mir immer unwillkürlich das Schillerwort ein:

> Nur zwei Tugenden gibt's: o wären sie immer vereinigt,
> immer die Güte auch groß, immer die Größe auch gut.

Ich danke sehr herzlich Herrn Dieter Gaier für umfangreiche Nachforschungen in der Personalakte [73] in Gießen, sowie natürlich Frau Annemarie Grötzsch für zahlreiche Bemerkungen.

Publikationen von H. Grötzsch zur Geometrischen Funktionentheorie

Leipz. Ber. = Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akad. d. Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Klasse;

SB preuß. Akad. = Sitzungsberichte d. preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Klasse;

WZ Halle = Wiss. Zeitschr. d. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe

[1] Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. Leipz. Ber. **80** (1928) 367–376

[2] Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung II. Leipz. Ber. **80** (1928) 497–502

[3] Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. Leipz. Ber. **80** (1928) 503–507

[4] Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **81** (1929) 38–47

[5] Über konforme Abbildung unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche mit endlich vielen Häufungsrandkomponenten. Leipz. Ber. **81** (1929) 51–86 (Dissertation)

[6] Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche II. Leipz. Ber. **81** (1929) 217–221

[7] Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **82** (1930) 69–80

[8] Über ein Variationsproblem der konformen Abbildung. Leipz. Ber. **82** (1930) 251–263

[9] Zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. (Iterationsverfahren). Leipz. Ber. **83** (1931) 67–76

[10] Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche. Leipz. Ber. **83** (1931) 185–200

[11] Das Kreisbogenschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **83** (1931) 238–253

[12] Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **83** (1931) 254–279 (Habilitationsschrift)

[13] Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. III. Leipz. Ber. **83** (1931) 283–297

[14] Über Extremalprobleme bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **84** (1932) 3–14

[15] Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **84** (1932) 15–36

[16] Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen. Leipz. Ber. **84** (1932) 114–120

[17] Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. II. Leipz. Ber. **84** (1932) 269–278

[18] Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung. SB preuß. Akad. **1933**, 87–100

[19] Die Werte des Doppelverhältnisses bei schlichter konformer Abbildung. SB preuß. Akad. **1933**, 501–515

[20] Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. SB preuß. Akad. **1933**, 654–671

[21] Verallgemeinerung eines Bieberbachschen Satzes. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **43** (1934) 143–145

[22] Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. Zweite Mitteilung. SB preuß. Akad. **1933**, 893–908

[23] Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. Dritte Mitteilung. SB preuß. Akad. **1934**, 434–444

[24] Über Flächensätze der konformen Abbildung. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **44** (1934) 266–269

[25] Einige Bemerkungen zur schlichten konformen Abbildung. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **44** (1934) 270–275

[26] Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **87** (1935) 145–158

[27] Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche. (2. Mitteilung.) Leipz. Ber. **87** (1935) 159–167

[27a] Zur Theorie der konformen Abbildung: Das Problem der Normalbereiche. Jber. d. Dt. Math.-Verein **45** (1935) 123–124 (kursiv)

[28] Eine Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip. Leipz. Ber. **87** (1935) 319–324
[29] Zur Theorie der Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung. Comm. Math. Helvetici **8** (1935/36) 382–390
[30] Zur Geometrie der konformen Abbildung. Hallische Monographien Nr. 16, Halle (Saale) 1950, 5–11
[31] Konvergenz und Randkonvergenz bei Iterationsverfahren der konformen Abbildung. WZ Halle **5** (1956) 575–582
[32] Zum Häufungsprinzip der analytischen Funktionen. WZ Halle **5** (1956) 1095–1100

Weitere Literatur

[33] Grötzsch, H.: 16 „Mitteilungen" unter dem gemeinsamen Obertitel „Zur Theorie der diskreten Gebilde" in WZ Halle **5** (1956) bis **11** (1962); genauer besprochen in [65]
[34] Ahlfors, L. V.: Extremalprobleme in der Funktionentheorie. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. **249/1** (1958)
[35] Ahlfors, L. V.: Lectures on quasiconformal mappings. D. van Nostrand Comp., Princeton 1966
[36] Ahlfors, L. V.: Conformal invariants – Topics in Geometric function theory. McGraw-Hill, New York etc. 1973
[37] Ahlfors, L.: The story of a friendship: Recollections of Arne Beurling. The Math. Intell. **15** (1993) 25–27
[38] Ahlfors, L. V.; Beurling, A.: Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta math. **83** (1950) 101–129
[39] Baernstein II, A.: Ahlfors and conformal invariants. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. **13** (1988) 289–312
[40] Bieberbach, L.: Einführung in die konforme Abbildung. 5. Aufl. W. de Gruyter & Co., Berlin 1956
[41] Bigalke, H.-J.: Heinrich Heesch – Kristallgeometrie, Parkettierung, Vierfarbenforschung. Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin 1988
[42] Encyclopaedia of Mathematics, Vol. 4, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht – Boston – London 1989
[43] Evans, G. C.: Continua of minimum capacity. Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 717–733
[44] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1964
[45] Gaier, D.: Über ein Flächeninhaltsproblem und konforme Selbstabbildungen. Revue Roum. Math. Pures Appl. **22** (1977) 1101–1105
[46] Gaier, D.: Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland 1890 bis 1950. S. 361–420 in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Vieweg & Sohn, Braunschweig – Wiesbaden 1990
[47] Garabedian, P. R.; Schiffer, M.: Identities in the theory of conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949) 187–238
[48] Golusin, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. VEB Deutscher Verl. d. Wiss., Berlin 1957 (Übers. aus dem Russ.)
[49] Grunsky, H.: Lectures on theory of functions in multiply connected domains. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1978
[50] He, Zheng-Xu; Schramm, O.: Fixed points, Koebe uniformization, and circle packings. Ann. Math. **137** (1993) 369–406
[51] Jenkins, J. A.: Univalent functions and conformal mapping. Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1958
[52] Keller, O.-H.; Engel, W.: Heinrich Wilhelm Ewald Jung. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **58** (1955) 5–10
[53] Komatu, Y.; Ozawa, M.: Conformal mapping of multiply connected domains. I. Kōdai Math. Seminar Rep. **3** (1951) 81–95
[54] Kühnau, R.: Über die analytische Darstellung von Abbildungsfunktionen, insbesondere von Extremalfunktionen der Theorie der konformen Abbildung. J. reine angew. Math. **228** (1967) 93–132

[55] Kühnau, R.: Über die Werte des Doppelverhältnisses bei quasikonformer Abbildung. Math. Nachr. **95** (1980) 237–251
[56] Kühnau, R.: Paul Koebe und die Funktionentheorie. 100 Jahre Math. Seminar d. Karl-Marx-Univ. Leipzig. VEB Deutscher Verl. d. Wiss., Berlin 1981, hier S. 183–194
[57] Kühnau, R.: Zur ebenen Potentialströmung um einen porösen Kreiszylinder. ZAMP **40** (1989) 395–409
[58] Kühnau, R.: Einige neuere Entwicklungen bei quasikonformen Abbildungen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **94** (1992) 141–169
[59] Kühnau, R.: Referat # 30008 im Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete **752** (1993)
[60] Künzi, H. P.: Quasikonforme Abbildungen. Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg 1960
[61] Kuz'mina, G. V.: Moduli of families of curves and quadratic differentials. Proc. Steklov Inst. Math. **139** (1980) (Übers. aus dem Russ.)
[62] Maskus, R.: Anwendung eines Iterationsverfahrens auf das Koebesche Geradenschlitz-theorem. WZ Halle **14** (1965) 323–332
[63] Pinl, M.: Kollegen in einer dunklen Zeit. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **71** (1969) 167–228
[64] Rickman, S.: Quasiregular mappings. Springer, Berlin etc. 1993
[65] Sachs, H.: Zur Theorie der Diskreten Gebilde. Ein Beitrag zur Würdigung des graphentheoretischen Werkes des Jubilars. WZ Halle **37** (1988) 116–121
[66] Sario, L.; Oikawa, K.: Capacity functions. Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1969
[67] Shiba, M.: The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one. Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987) 299–311
[68] Steinberg, R.: The state of the three color problem. Annals of Discr. Math. **55** (1993) 211–248
[69] Teichmüller, O.: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 22 (1939)
[70] Teichmüller, O.: Über Extremalprobleme der konformen Geometrie. Deutsche Math. **6** (1941) 50–77 (wie [69] auch in den „Gesamm. Abh.")
[71] Tietz, H.: Herbert Grötzsch in Marburg. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **99** (1997) 146–148
[72] Väisälä, J.: Lectures on *n*-dimensional quasiconformal mappings. Lect. Notes Math. 229. Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1971
[73] Personalakte Dr. Herbert Grötzsch im Archiv d. Univ. Gießen (Sign.: PrA Phil Nr. 10)
[74] Personalakte Grötzsch im Archiv d. Univ. Halle (PA 24733)

H. Grötzsch betreute in großer Zahl sog. Staatsexamensarbeiten von Lehramtskandidaten, nur ausnahmsweise *Diplomarbeiten*. Diese können deshalb hier aufgeführt werden (alle in Halle):

[75] Pirl, U.: Krümmungsverhältnisse bei Isogonalsystemen, insbesondere bei isothermen Isogonalsystemen. 1951
[76] Grimm, K.: Der Verschiebungsradius bei schlichter konformer Abbildung des einfach zusammenhängenden Bereiches. 1951
[77] Sachs, H.: Untersuchungen über das Problem der eigentlichen Teiler. 1953 (bearbeitet in WZ Halle **6** (1956/1957) 223–259)
[78] Lang, A.: Über den Verschiebungsradius bei schlichter konformer Abbildung des zweifach zusammenhängenden Bereiches. 1957
[79] Kühnau, R.: Einfache Isothermschlitzabbildungen, ihre analytische Darstellung und einfache Eigenschaften. 1959 (z. T. in WZ Halle **9** (1960) 285–287 und in [54])
[80] Maskus, R.: 1962, bearbeitet in [62]

Von H. Grötzsch betreute *Dissertationen* (alle in Halle):

[81] Pirl, U.: Isotherme Kurvenscharen und zugehörige Extremalprobleme der konformen Abbildung. 1955 (gedruckt in WZ Halle **4** (1955) 1225–1251)

[82] Kühn, R.: Über die Gibbssche Erscheinung. 1955 (unveröffentlicht)
[83] Rößler, G.: Betrachtungen über eine neuere Variationsmethode der konformen Abbildung. 1955 (unveröffentlicht)
[84] Sachs, H.: Beiträge zur Theorie gewisser isoperimetrischer Probleme. 1957 (gedruckt in verschiedenen Teilen in WZ Halle **8** (1958/1959))
[85] Kühnau, R.: Geometrie der konformen Abbildung auf der projektiven Ebene. 1962 (gedruckt in WZ Halle **12** (1963) 5–19)
[86] Maskus, R.: Elementare Fragen zur Feinstruktur der konformen Abbildung. 1970 (Auszug in WZ Halle **21** (1972) 37–45)

Reiner Kühnau
FB Mathematik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
D-06099 Halle (Saale) – Deutschland

(*Eingegangen 17. 5. 1996; revidiert 2. 12. 1996*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
99 (1997) 146–148

Herbert Grötzsch in Marburg

H. Tietz, Hannover

Der Krieg war beendet. In den vier Besatzungszonen regte sich das Leben. Die meisten Universitäten öffneten wieder ihre Pforten. Während Gießen auf Befehl der US-Militärregierung geschlossen blieb, nahm die Marburger Philipps-Universität bereits zum Jahreswechsel 1945/1946 den Betrieb wieder auf. Weil die Stadt Marburg von den kriegerischen Zerstörungen weitgehend verschont geblieben war, übte sie starke Anziehung aus auf die Ströme der Heimkehrer, Flüchtlinge und Heimatlosen, die das ganze Land durchzogen. Entsprechend bunt zusammengewürfelt war die Studentenschaft, die erwartungsvoll die Hörsäle füllte: gegen die Marburger, die gerade von der Schule kamen, hoben sich diejenigen ab, denen man ihre erbärmlichen Lebensbedingungen ansah. Viele jedoch verband die Begeisterung für die Mathematik, die von einem Dozenten, der an Armut von kaum einem Studenten überboten wurde, ausging und alle Hörer in ihren Bann zog: Herbert Grötzsch!

Auch er war als Heimkehrer unterwegs gewesen: er hatte versucht, an seine Universität Gießen, an der er bis zu seinem Hinauswurf 1935 durch den NS-Staat, gelehrt hatte, zurückzukehren, hatte aber dort an verschlossene Türen geklopft; es lag nahe, daß er im benachbarten Marburg Fuß zu fassen suchte. Man nahm ihn gerne in den Lehrkörper auf, der arg reduziert war: besetzt war nur ein Ordinariat und eine außerplanmäßige Professur, vakant waren ein weiteres Ordinariat, eine Dozentur und die Stelle einer Wissenschaftlichen Hilfskraft, während die Assistentenstelle gesperrt war.

Der 44jährige Grötzsch mußte mit der Hilfskraftstelle vorlieb nehmen; 1947 wurde er zum Außerplanmäßigen Professor ernannt – seine Stelle und seine Bezüge änderten sich nicht. Bemühungen mit dem Ziel, diesen peinlichen Zustand zu korrigieren, sollen in der Philosophischen Fakultät zwar versucht worden sein, man hielt dort jedoch Grötzschs schäbige Kleidung für „unpassend“ (bei 198 Reichsmark im Monat ...).

Er hatte niemals diese Behandlung kritisiert, ja er schien sie nicht einmal zu registrieren. Seine Armut tat der Wirkung seiner Persönlichkeit, seiner Begeisterung in den Vorlesungen und seiner Güte im Kontakt mit seinen Studenten keinen Abbruch.

In der damals an Originalen reichen Stadt, war „der Professor“ schnell eine stadtbekannte Persönlichkeit. Versuche von besser gestellten Studenten, ihm hier und da etwas zu helfen, wurden von ihm ebenso herzlich wie bestimmt zurückgewiesen; nur ein Paar Schuhe aus einem US-Paket konnte ihm bei einer Tombola untergemogelt werden: sichtlich erschüttert ging er kopfschüttelnd nachhause, trug die Schuhe dann aber gerne an Stelle der bisherigen Holzschuhe. Auf seinem Weg ins Mathematische Institut, das damals im Landgrafenhaus untergebracht war, ging er durch das alte Weidenhausen und trank in einer Bäckerei seine Tasse „Kaffee", aß sein trokkenes Brötchen und las die Tageszeitung: Dabei nickte er einmal ein und lehnte sich an den geheizten Ofen; das traurige Ergebnis war ein großes Loch in seinem guten Jackett, das er sich von seinen Eltern hatte schicken lassen, und das er erst wenige Tage statt eines undefinierbaren Kleidungsstückes aus Kriegstagen getragen hatte; er half sich auf seine Weise: am nächsten Tag verdeckte ein aufgehefteter Flicken den Schaden.

Er wohnte am Galgenberg in einer winzigen Dachstube; der Weg war so steil, daß er bei Glätte auf Socken hinunterrutschen mußte.

Mitten auf dem von US-Fahrzeugen stark befahrenen Rudolphsplatz blieb er einmal, auf seinem Bleistiftstummel kauend, tief in Gedanken stehen, bis ein freundlicher Schutzmann ihn am Arm nahm und auf den sicheren Bürgersteig führte. Sicherlich war nicht nur die Mathematik, sondern auch seine Unterernährung Ursache dieses Abschaltens: von seinen kargen Lebensmittelmarken schickte er einen Teil an seine Eltern in Crimmitschau und versuchte, sich mit Fischpaste und anderen markenfreien Artikeln die fehlenden „Vitamine" zu verschaffen.

Ohne Grötzsch wäre der mathematische Lehrbetrieb zusammengebrochen: er war unermüdlich tätig und jederzeit ansprechbar, wobei er sich überschwenglich entschuldigte, wenn er mit seinen Gedanken nicht sofort präsent war. In der Diskussion war er höchst temperamentvoll, ja mitreißend, wozu seine vor Übermut und Freude blitzenden, von scharfen Brillengläsern verstärkten Augen das ihre taten. Sein stereotypes „Notabene Rücksprache!" war das Signal, durch das er mit jedem Studenten ins Gespräch kam. Es war alles wichtig! Mathematische Fehler wurden solange besprochen, bis interessante Trugschlüsse zu Tage traten: Lösungswege wurden temperamentvoll diskutiert, und wenn der Weg, den ein Student eingeschlagen hatte, dem seinen überlegen war, so brach es aus ihm heraus: „Sie haben mich zur Strecke gebracht!" Sogar an sprachlichen Formulierungen wurde gefeilt, weil klare Sprache klares Denken verbürgt. Unvergessen die aus tiefen Gedanken kommende Sentenz: „Meine Damen und Herren! Das Hauptproblem der Mathematik lautet: ‚Gegeben ist der Beweis – gesucht ist der Satz!' " – aber auch seine zündende Erklärung des Satzes von Bolzano: „Denken Sie sich ein endliches Intervall und da unendlich viele Punkte drin! Da sagt Ihnen doch schon die Anschauung: da muß doch ein schreckliches Gedränge stattfinden, da muß es doch einen Punkt geben, wo etwas ganz Fürchterliches passiert! – Und sehen Sie: so ein Punkt ist ein Häufungspunkt!"

Er dachte immer geometrisch: beim Diskutieren oder in Vorlesungen waren seine Hände stets in Bewegung, als wollte er durch eine virtuelle oder reale Zeichnung seine Gedanken klarmachen.

In einer Vorlesung über „Konforme Abbildung", in der plötzlich das Licht ausfiel, appellierte er an die Abstraktionsfähigkeit der Hörer und redete im Dunkeln weiter; trotzdem hörte man nach einigen Minuten das Geräusch der Kreide an der Wandtafel.

Einmal habe ich Grötzsch wütend erlebt: in der Bibliothek des Institutes machten einigen Studenten Jagd auf Insekten, die durch ein offenes Fenster hereingekommen waren. In großer Erregung schloß er das Fenster mit den Worten: „Schließen Sie doch die Fenster – die arme Kreatur weiß ja nicht, was für Fallen die Menschen ihr stellen!"

Sein Dienstzimmer lag im Dach des Landgrafenhauses. Unter seinem Fenster verlief eine Regenrinne, in ihr hatte sich im Laufe der Jahre Erde angesammelt und darin wuchs eine kleine Birke, die jedermann auffiel, der von der Reitgasse herunterkam. Sie war seine große Freude und er begoß sie täglich zweimal, wobei er jedesmal mit einer Konservendose zum nächsten Wasserhahn, der zwei Stockwerke tiefer lag, laufen mußte. Als er einmal abwesend war, bekam ich den ehrenvollen Auftrag, das Bäumchen zu begießen: „Aber seien Sie vorsichtig, daß Sie die Passanten nicht bekleckern!" Bei einer Dachrevision wurde die Regenrinne gereinigt, und das Bäumchen verschwand. Sein Kommentar: „Man sorgt in Marburg dafür, daß hier die Bäume nicht in den Himmel wachsen ..."

Als Grötzsch im April 1948 dem Ruf an die Universität Halle folgte, ließ er eine fassungslose Fakultät aber viele dankbare Studenten zurück: sie hatten von ihm nicht nur beste Mathematik gelernt, er hatte ihnen vorgelebt, daß man in der Not die Hoffnung in sich selbst finden kann.

Horst Tietz
FB Mathematik d. Univ. Hannover
Postfach 6009
D-30060 Hannover

(*Eingegangen 17. 5. 1996*)

Buchbesprechungen

Otte, M., Das Formale, das Soziale und das Subjektive – Eine Einführung in die Philosophie und die Didaktik der Mathematik (suhrkamp taschenbuch wissenschaft), Frankfurt/M.: Suhrkamp 1993, 320 S., DM 27,80

Seit der „Entstehung" der wissenschaftlichen Mathematik in der griechischen Antike war das Betreiben von Mathematik immer mit Fragen der geeigneten Darstellung, Begründung und Präzision verbunden, mit philosophischen, wissenschaftstheoretischen und mit didaktischen Fragen (Plato, Euklid, Apollonios, Proklos), ...). Im 19. und 20. Jahrhundert entstanden wesentliche Theorien oft aus didaktischen Fragen und (hochschul)didaktischen Problemen (R. Dedekind, F. Klein, H. Weyl, E. Landau, später: H. Freudenthal, H. Behnke, G. Pickert, D. Laugwitz, S. Mac Lane, u. v.a.).

Im letzten Jahrhundert entwickelte sich schließlich die Mathematikdidaktik zu einer eigenen Disziplin und zur Berufswissenschaft aller Lehrenden. Sie besteht heute aus vielerlei Teilgebieten und reicht in die unterschiedlichsten Disziplinen. Wissenschaftstheoretische und soziologische Fragen stehen neben schul- und lernpsychologischen; empirische Themen stehen neben den sogenannten „stoffdidaktischen", u. a. Was die Philosophie betrifft, so haben Mathematik und Philosophie nicht nur gemeinsame Wurzeln, sie zeigen seit zweieinhalbtausend Jahren Wechselwirkungen und enge Verbindungen. Bis relativ spät in unser Jahrhundert aber erschöpfte sich andererseits die Philosophie der Mathematik weitgehend in ontologischen Fragen und in der Grundlagendebatte. Und wenn dies auch in der vielfältigsten Weise geschah, so hat es sich doch ein wenig totgelaufen. In den letzten Jahrzehnten gibt es kaum mehr größere Entwürfe zur Philosophie der Mathematik oder wenigstens nennenswerte Antworten der Philosophie auf die neueren Entwicklungslinien der Mathematik (abgesehen vielleicht von Beiträgen I. Lakatos, Y. Rav und einigen anderen).

„Die Moderne der Wissenschaften beginnt mit einer Hinwendung zur Erkenntnistheorie" sagte Otte auf Seite 420; „Und an die Stelle der Frage nach dem Wesen der Welt oder des Wissens treten die Probleme der Gewinnung und Objektivierung des Wissens".

M. Otte und speziell dieses Buch setzt nun in diesem Rahmen und mit durch und durch wissenschaftlichen Methoden auf die soziologischen, philosophischen und wissenschaftstheoretischen Aspekte der Philosophie und der Mathematikdidaktik und solchermaßen der Mathematik überhaupt. (Vgl. z. B. sein 15. Kapitel: „Ansätze einer sozialen Theorie der mathematischen Erkenntnis"!)

Otte konzentriert sich weitgehend auf die These, daß die Verbreitung mathematischer Konzepte und Vorstellungen untrennbar mit dem Verhältnis von „Allgemeinem und Besonderem" (Kap. 3) verbunden ist, und ist vor allem mit der Ausdehnung jener Konzepte auf neue Gegenstandsbereiche verbunden. Deshalb untersucht Otte diese Prozesse vielfach unter dem gemeinsamen Begriff der „Verallgemeinerung".

Das Buch beschäftigt sich zu Beginn mit Mathematik und Bildung: „Über beide in einem Atemzug zu sprechen verlangt, in ihnen einen gemeinsamen Punkt zu finden" (p. 19). Und eben dies geschieht hier durch die Entwicklung eines dritten Begriffes, nämlich des (logischen) Typus. Bei der Unterscheidung dieser Typen handelt es sich nach Otte um „die Bezeichnung gewisser kategorialer Differenzen wie etwa der Differenz von Bewußtsein und Kommunikation oder von Individuum und Gesamtheit".

Insofern Mathematik und Bildung natürlich nicht aufeinander reduzierbar sind, kann der entsprechende Text keine lineare Abfolge von Argumenten darstellen. So bedarf Otte's Text schon von Anfang an eines gewissen Vorwissens über die involvierten Themen und über andernorts bereits geführte Auseinandersetzungen. Das an sich ergiebige Buch ist – entgegen dem Untertitel – m. E. weniger als „Einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik“ geeignet, denn als Vertiefung und Ergänzung eines bereits breiten Themas und vieler Einzelaspekte, die es zu verbinden gilt. Otte entwickelt notwendigerweise vielfach neue begriffliche Schemata und Darstellungsweisen, die dem Thema zwar ideal angepaßt sind, weniger aber dem – sagen wir – üblich gebildeten mathematischen Leser. Die solcherart vielfach aufgeworfenen neuen Sicht- und Betrachtungsweisen regen andererseits wieder durchgehend zu neuen Fragestellungen und Einsichten an. Entgegen aber der verbreiteten Gewohnheit, die Mathematik als Paradigma des Formalen, Strukturellen, Algorithmischen zu nehmen und ihr die anderen Seiten der Kultur – das Informelle, Historische, Intuitive – gegenüberzustellen, zeigte Otte, daß diese Komplemente schon *innerhalb* der Mathematik auftreten: Hiezu nun einige, mir wichtig erscheinende Titelüberschriften: Die gesellschaftliche und die wissenschaftliche Komplexität; Comptes positive Philosophie und die Folgen (Kap. 5); Form und Geschichte (Kap. 9); Komplementarität und Psychoanalyse (Kap. 11); Kontinuum und Kontinuitätsprinzip mit besonderer Berücksichtigung der Philosophie von Charles Sanders Peirce (Kap. 14); u. a. m.

Ein durchgehend wesentliches Anliegen des Buches ist es, Fachdidaktik als „angewandte Grundlagenwissenschaft“ darzustellen. „Otte geht davon aus, daß Mathematik ... sich nicht auf das Wissen, sondern auf die Tätigkeit bezieht und auf ihre Kommunikation, und somit letztlich „Meta-Kommunikation“ darstellt (p. 40). Die sich daraus ergebende Sicht der Mathematikdidaktik siedelt die Mathematik daher auch vor allem im Bereich gesellschaftlicher Aspekte an. Besser: in einem „gesellschaftlichen Prozeß der Problemgenerierung“ (p. 111), wo dann vor allem die soziale Natur des Wissens besonders herausgearbeitet wird.

Darin mag dann mancher auch eine gewisse Einengung der Fachdidaktik als ganzes sehen, doch ist dieser ohne Zweifel bedeutende und in diesem Ausmaß bisher kaum abgehandelte Bereich allemal interessant, durchgehend stringent dargestellt und in gewisser Weise vollständig behandelt. Bisweilen freilich um den Preis, daß das Buch nicht einfach zu lesen ist; und dies vor allem dann, wenn der Leser bisher wesentlich an fachorientierten Didaktiktexten geübt ist und weniger Voraussetzung mit formal-philosophischen hat.

Wenngleich also das durchwegs fundiert geschriebene Buch daher auch manchen Einwand provozieren wird, so wird sich im Grundsätzlichen allgemeine Zustimmung finden, wo M. Otte den zentralen wissenschaftlichen Gegenstand der Fachdidaktik sieht: in einem „System der inhaltlich begründeten und auf dieser Grundlage organisierten Beziehungen zwischen allen an der Realisierung des Mathematikunterrichts und seiner Integration in übergreifende Zusammenhänge des Schul- und Gesellschaftssystems beteiligten Partnern“ (p. 114). Zusätzlich wird der Gegenstand der Fachdidaktik natürlich auch dadurch bestimmt, daß sie „an dieses Beziehungssystem unter dem Gesichtspunkt seiner Optimierung herangeht“ und eben hiezu trägt das Buch aus zwar besonderem, aber sicherlich relevantem Blickwinkel bei!

Wien H.-Ch. Reichel

Aschbacher, M., Sporadic Groups, Cambridge University Press 1994, 306 S., £ 35.00

Das zweite Buch von Aschbacher beeindruckt wie sein erstes „finite group theory", auch erschienen in Cambridge University Press, durch die Fülle an tiefer Mathematik, die auf relativ wenigen Seiten geboten wird. Ehrgeiziges Ziel von Aschbacher ist es, eine von Originalarbeiten unabhängige Darstellung der Theorie der sporadischen endlichen einfachen Gruppen zu geben, die Existenz und Eindeutigkeitsbeweise einschließt.

Die 1980 für abgeschlossen erklärte Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ist einer der Meilensteine der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Sie besagt, daß jede (nicht kommutative) endliche einfache Gruppe alternierend, vom Lie-Typ (das heißt ein endliches Analogon einer einfachen Lie-Gruppe) oder eine der 26 sogenannten sporadischen Gruppen ist. Hierbei bedeutet sporadisch nicht in einer Serie enthalten. Viele Teile der „Klassifikation" sind in einem unbefriedigenden Zustand, das heißt sie sind außer für eine Handvoll Spezialisten nicht nachvollziehbar. Dies gilt insbesondere für eine bisher nicht vorhandene „Theorie der sporadischen Gruppen".

Sporadische Gruppen wurden bisher in der Literatur als „Einzelstücke" behandelt. Ihre Untersuchung fand mit ad-hoc-Methoden, häufig computerunterstützt, statt. Typisches Beispiel hierfür ist der „Atlas of finite groups", Clarendon Press, Oxford, der, ohne Beweise, eine außerordentlich umfangreiche Ansammlung von Eigenschaften der sporadischen Gruppen enthält. Hierbei stellt sich die Frage der Zitierfähigkeit.

Aschbacher geht in seinem Buch den umgekehrten Weg, das heißt er versucht, einen gruppentheoretischen Zugang zu den sporadischen Gruppen zu finden. Dieser beinhaltet im wesentlichen:

1) Die Konstruktion der Kette M_{24}, Conway-Gruppe, Monster durch Konstruktion des Steinersystems von M_{24}, Leech-lattice und der Griessalgebra.
2) Die Theorie der Gruppen mit großer extraspezieller Untergruppe.
3) Den Aschbacher-Segev-Zugang zur Eindeutigkeit von sporadischen Gruppen.

1) folgt im wesentlichen den bekannten Konstruktionen von Witt, Conway, und Griess, Conway und Tits. Hierbei benutzt Aschbacher die Ideen sowohl von Griess als auch Conway und Tits um eine besonders einfache Konstruktion der Monstergruppe zu erhalten.

16 der 26 sporadischen einfachen Gruppen enthalten eine „große extraspezielle Untergruppe". Aschbacher benutzt die Theorie dieser Gruppen zur Konstruktion sporadischer Untergruppen der Monstergruppe. Er erhält auf diese Weise einen Existenzbeweis für 20 der 26 sporadischen Gruppen in seinem Buch.

Das Eindeutigkeitsproblem läßt sich folgendermaßen erläutern: Gibt es bis auf Isomorphie höchstens eine endliche einfache Gruppe, die gewisse gruppentheoretische Bedingungen erfüllt? Bei Lie-Typ-Gruppen sind verschiedene Methoden zur Beantwortung dieser Frage bekannt, z. B. Konstruktion von „Steinberg-Erzeugenden und Relationen", Konstruktion des „sphärischen Gebäudes der Gruppe". Bei sporadischen Gruppen ist das Problem mangels Methoden außerordentlich heikel. Zum Teil wurde es nur mit massivem Computereinsatz gelöst, zum Teil war die Lösung unbekannt.

Aschbacher und Segev haben hierzu eine „topologische" Methode entwickelt. Die Idee ist hierbei, aus den gruppentheoretischen Bedingungen einen simplizialen Komplex zu konstruieren und zu zeigen, daß dieser einfach zusammenhängend ist. Da jede Gruppe, die den Bedingungen genügt, Bild der „universellen" Gruppe ist, bedeutet der einfache Zusammenhang, daß sie alle isomorph sind.

Aschbacher entwickelt diese Methode in seinem Buch und wendet sie zum Eindeutigkeitsbeweis für 5 sporadische Gruppen an.

Das Aschbacher'sche Buch „sporadic groups" ist meiner Meinung nach für alle, die sich für endliche Gruppen interessieren, ein Muß. Die sporadischen Gruppen sind die faszinierendsten Objekte in der endlichen Gruppentheorie und Aschbachers Buch eröffnet erstmals auch Nichtexperten einen Zugang zu diesen Objekten, der sich nicht auf „Glauben" beschränkt.

Zum Schluß ein Wort der Kritik. Die Lektüre von „sporadic groups" ist selbst für Spezialisten außerordentlich mühsam. Gerade um diese Teile der Theorie der endlichen einfachen Gruppen auch zukünftigen Generationen von Gruppentheoretikern zugänglich zu machen, wäre eine leserfreundliche Darstellung wünschenswert. Meiner Meinung nach wären hierfür, in Anbetracht der Fülle des Materials, auch weitere 300 Seiten vertretbar.

Gießen F. G. Timmesfeld

Boehm, W., Prautsch, H., Geometric concepts for geometric design, Wellesley: AK Peters 1994, 395 S., $ 54.00

Das vorliegende Buch schließt eine Lücke auf dem Gebiet der Lehrbuchliteratur. Es will das Modellieren von Flächen mittels Splinefunktionen lehren und geht auch auf stetige und differenzierbare Übergänge zwischen solchen Flächenstücken ein. Die Autoren unterzogen sich der wichtigen Aufgabe, alle geometrischen Voraussetzungen im Buch selbst darzustellen, die für das Verständnis von Geometric Design notwendig sind, und das ist ein beachtlich großer Ausschnitt aus anderen mathematischen Theorien. Das Buch beginnt mit linearer Algebra und einer auch analytischen Beschreibung von Projektionen und durch Projektionen zu erhaltenden Bildern von Objekten des Raumes. Nächstes Thema ist der affine Raum einschließlich einer affinen Theorie der Quadriken. Daran schließt ein Kapitel über euklidische Geometrie, insbesondere über Quadriken und die Fokaleigenschaften von Kegelschnittslinien. Der Ausschnitt aus der projektiven Geometrie umfaßt projektive Koordinaten, projektive Abbildungen, eine projektive Theorie der Quadriken und rationale Bézierkurven und -flächen. Letzteres zu lehren und verständlich zu machen gehört wohl zum eigentlichen Anliegen des Buches. Es folgen Ausschnitte aus der Darstellenden Geometrie, die insbesondere die Durchdringung von Flächen betreffen. Damit wird zu Ausschnitten aus der algebraischen Geometrie übergeleitet. Ein letztes Kapitel handelt von der lokalen Differentialgeometrie euklidischer Kurven und Flächen, insbesondere von der Berührung höherer Ordnung.

Es ist erstaunlich, wie vielfältig die Bereiche sind, die zum Verständnis von Geometric Design notwendig sind; sie wurden von den Verfassern sorgfältig, aber auch umfassend ausgewählt. Es ist ihnen eine klare und verständliche Darstellung gelungen, die alle Weitschweifigkeiten vermeidet. Die Inhalte und Methoden gehören zum klassischen Bestand der Geometrie; es war hoch an der Zeit, sie in Erinnerung zu rufen. Daß dies auch in einem Curriculum für Mathematik und deren Anwendungen sinnvoll geschehen kann, dafür ist das Buch eine äußerst wertvolle Hilfe.

Abschließend sei gesagt: Das Buch setzt wohl auch Standards für die künftige Ausbildung der Studenten der technischen Studienrichtungen in geometrischer Darstellungstheorie, die sich nicht mehr auf die Darstellende Geometrie im herkömmlichen Sinn beschränken sollte. Für CAGD ist – und das zeigt das Buch eindrucksvoll – ein größeres Maß an mathematischen – speziell geometrischen Vorkenntnissen nötig, als für den bisherigen Kurs aus Darstellender Geometrie. Man wird daher den Gegenstand CAGD erst später im Curriculum ansetzen können, nachdem in den ersten Semestern die Voraussetzungen, insbesondere die Elemente der Darstellenden Geometrie gelehrt worden sind. Diese wird nicht überflüssig, im Gegenteil, künftig ist eine auch analytische Erfassung ihrer Methoden erforderlich.

Dem ausgezeichneten Buch ist wegen seines Inhalts und dessen Präsentation weite Verbreitung zu wünschen. Dies liegt sowohl im Interesse der Geometrie als auch ihrer Anwender.

Graz H. Vogler

Bruggeman, R. W., Families of Automorphic Forms, Basel u. a.: Birkhäuser 1994, 328 S., DM 164,–

Die klassische Theorie der Modulformen und allgemeiner der (holomorphen oder meromorphen) automorphen Formen auf der oberen Halbebene wurde vor rund 120 Jahren durch F. Klein und H. Poincaré begründet und im 20. Jahrhundert namentlich von Hecke, Siegel, Petersson, Shimura, Weil, Serre, Langlands, Deligne und vielen anderen fortentwickelt. Dabei haben sich z. T. höchst überraschende enge Verbindungen mit vielen anderen Gebieten der Mathematik ergeben, wie z. B. der Theorie der Riemannschen Flächen, der Zahlentheorie, der Theorie der elliptischen Kurven, der Theorie der sporadischen einfachen Gruppen, der Theorie der Mannigfaltigkeiten und der Darstellungstheorie von Gruppen. Auf eine neue Art von automorphen Funktionen stieß H. Maaß 1949 bei seinen Untersuchungen über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. Bei diesen reell-analytischen automorphen Funktionen wird die Forderung der Holomorphie ersetzt durch die Bedingung, Eigenfunktion des Laplace-Beltramischen Operators für die hyperbolische Metrik auf der oberen Halbebene zu sein. Diese reell-analytischen automorphen Funktionen treten in der Darstellungstheorie von $SL_2(\mathbb{R})$ gleichberechtigt neben die holomorphen automorphen Formen. Hier und im folgenden sei Γ stets eine koendliche diskrete Untergruppe von $SL_2(\mathbb{R})$, d. h. eine Grenzkreisgruppe erster Art; die Forderung der Automorphie bezieht sich auf Γ. Roelcke und Selberg haben eine Spektraltheorie für reell-analytische automorphe Formen entwickelt, in der die (quadratisch integrierbaren) Maaß-Formen und die reell-analytischen Eisenstein-Reihen eine Schlüsselrolle spielen. Diese Theorie gipfelt in der Selbergschen Spurformel und ihren faszinierenden Anwendungen und hat Anlaß gegeben zu einem in Breite und Tiefe eindrucksvollen Kapitel Mathematik, mit dessen Ausgestaltung sich zahlreiche anspruchsvolle Arbeiten aus neuerer und neuester Zeit beschäftigen.

Grob gesprochen, gibt es zwei Typen reell-analytischer automorpher Formen, die („sporadisch“ auftretenden, quadratisch integrierbaren) Maaß-Formen und die Poincaréschen Reihen, die von einem komplexen Parameter s abhängen. Die Kenntnisse über Maaß-Formen sind nach wie vor sehr begrenzt. Typische Poincarésche Reihen sind z. B. die Eisenstein-Reihen, der Resolventenkern und die Selbergschen Poincaré-Reihen zu parabolischen Fixpunkten. Die Eisenstein-Reihen spielen in der Roelcke-Selbergschen Spektraltheorie automorpher Formen eine Schlüsselrolle, denn mit Hilfe der meromorph fortgesetzten Eisenstein-Reihen läßt sich der stetige Anteil der Spektralzerlegung des Laplace-Beltramischen Operators vollständig beschreiben. Von zentraler Bedeutung ist hier die von A. Selberg bewiesene meromorphe Fortsetzbarkeit der Eisenstein-Reihen in die volle komplexe Ebene. Der Resolventenkern spielt in der Roelcke-Selbergschen Theorie ebenfalls eine wichtige Rolle, und die Selbergschen Poincaré-Reihen zu parabolischen Fixpunkten führen zu der berühmten Selbergschen $\frac{3}{16}$-Abschätzung der Eigenwerte für Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe. Alle obigen Poincaré-Reihen gestatten meromorphe Fortsetzungen in die volle s-Ebene.

An dieser Stelle setzt das vorliegende Buch ein: Der Verfasser stellt die Frage, wie sich z. B. die Poincaréschen Reihen verhalten, wenn man auch das Gewicht und das Multiplikatorsystem als variabel betrachtet. In früheren Untersuchungen hat der Verfasser gezeigt, daß sich z. B. die Poincaréschen Reihen zur Modulgruppe meromorph fortsetzen lassen in simultaner Abhängigkeit von s und vom Multiplikatorsystem. Diese Frage wird hier für beliebige koendliche diskrete Gruppen Γ diskutiert und positiv entschieden. Der technische Aufwand ist dabei naturgemäß ganz erheblich. Für die vorliegende Untersuchung führt der Verfasser eine wesentlich größere Klasse automorpher Formen ein als bisher üblich. Es werden sowohl „kontrollierbare" Singularitäten in der oberen Halbebene zugelassen als auch „kontrolliertes" (nicht notwendig polynomiales) Wachstum in den Spitzen. Dabei erweist es sich als vorteilhaft, reell-analytische automorphe Formen nicht als Funktionen auf der oberen Halbebene zu betrachten, sondern als reell-analytische Eigenfunktionen des Casimir-Operators auf der universellen Überlagerung $\tilde{G}$ von $SL_2(\mathbb{R})$ mit dem Transformationsverhalten

$$f(\gamma g k(\Theta)) = \chi(\gamma) f(g) e^{il\Theta}$$

($\gamma \in \tilde{\Gamma}$ = koendliche Untergruppe von $\tilde{G}, g \in \tilde{G}, k(\Theta) \in \tilde{K} \subset \tilde{G}$, wobei $\tilde{K} \cong \mathbb{R}$ die universelle Überlagerung von $K = SO_2$ ist, χ = Charakter auf $\tilde{\Gamma}$, l = Gewicht). Für das angestrebte Programm ist es zunächst erforderlich, große Teile der Theorie der reell-analytischen automorphen Formen in dem oben angedeuteten allgemeineren Rahmen erneut zu entwickeln. Das geschieht in den Kapiteln 2–6; im einführenden Kapitel 1 wird die Theorie am Beispiel der Modulgruppe erläutert. So gelten für den hier betrachteten allgemeineren Formentyp z. B. Analoga der Maaß-Selberg-Relationen, und es gibt natürliche Analoga der Poincaréschen Reihen. Die Lie-Algebra von $\tilde{G}$ wird dabei konsequent eingesetzt.

Das eigentliche Anliegen des Buchs ist die meromorphe Fortsetzung von Familien automorpher Formen. Als bekannteste Beispiele bieten sich die Poincaréschen Reihen an. Diese hängen stetig ab vom Gewicht, einem unitären Charakter χ und einer komplexen Variablen s, wobei die Abhängigkeit von s sogar holomorph ist in der Konvergenzhalbebene. A priori ist hier gar nicht klar, was man unter holomorpher oder meromorpher Abhängigkeit vom Gewicht oder vom Charakter zu verstehen hat. Der Verfasser definiert in Kap. 7 den Begriff einer Familie automorpher Formen in so allgemeiner Weise, daß z. B. die Poincaréschen Reihen und auch Familien wie η^{2r} (η = Dedekindsche Eta-Funktion) erfaßt werden. Als Parameterraum dient dabei eine einfach-zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit. (Es bleibt die Frage offen, wie weit man die Ergebnisse dieses Buchs auf beliebige komplexe Räume als Parameterräume ausdehnen kann.) Der schwierigste Teil des Buchs sind die Kap. 8–10, in denen das Fortsetzungsprogramm durchgeführt wird nach dem Vorbild der meromorphen Fortsetzung der Eisenstein-Reihen von Colin de Verdière. Ganz wesentlich werden dabei Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis eingesetzt. Insbesondere ist in den Ergebnissen des Verfassers die übliche meromorphe Fortsetzbarkeit der Poincaréschen Reihen enthalten; es handelt sich hier also um eine nicht-triviale Ausdehnung einer ohnehin schon durchaus schwierigen Theorie. Als Beispiel werden in Kap. 11 die Singularitäten der Poincaréschen Reihen in Abhängigkeit von s analysiert. In Anbetracht der technischen Schwierigkeiten der wesentlichen Kapitel des vorliegenden Buchs sind die Kap. 13–15 betrachteten Beispiele (Modulgruppe, Thetagruppe, Kommutatorgruppe der Modulgruppe) sehr willkommen. – In einer früheren Untersuchung zeigte der Verf. bereits, wie Kenntnisse über die Singularitäten meromorpher Fortsetzungen zu Informationen über die Verteilung Dedekindscher Summen führen. Die gleiche Methode liefert hier kompliziertere Verteilungsaussagen. Unnötig zu sagen: Weitere Anwendungen der hier vorgelegten Untersuchungen wären sehr erwünscht.

Das vorliegende Buch ist sehr sorgfältig geschrieben und richtet sich an Interessenten mit einigen Vorkenntnissen über Modulformen und reell-analytische automorphe Funktionen. Insgesamt legt der Verfasser eine interessante Monographie vor, die wertvolle Anregungen für weitere Untersuchungen geben kann.

Münster J. Elstrodt

Constantinescu, F., de Groote, H. F., Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren, Stuttgart: Teubner 1994, pb., 366 S., DM 46,80

Das Buch besteht aus zwei Teilen: Eine Einführung in die Theorie der Supermannigfaltigkeiten und eine Einführung in die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra. Zwischen diesen beiden Teilen wird keine Beziehung hergestellt, so daß eine Rezension des Buches in natürlicher Weise aus zwei Rezensionen der beiden Teile besteht.

Supermannigfaltigkeiten sind Verallgemeinerungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die lokalen Modelle der Supermannigfaltigkeiten sind aber nicht einfach offene Mengen in (endlichdimensionalen) Vektorräumen, sondern offene Mengen in Supervektorräumen. Supervektorräume sind nichts anderes als Vektorräume V (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit einer $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, also $V = V_0 \oplus V_1$, deren Vektoren als „gerade" bzw. „ungerade" bezeichnet werden, je nachdem ob sie in V_0 oder in V_1 liegen. Supermannigfaltigkeiten finden Verwendung in der Physik bei der Formulierung von supersymmetrischen Modellen, bei denen die relevanten Teilchen in Paaren auftreten, jedes gewöhnliche Teilchen also jeweils einen Superpartner hat, und die physikalischen Gesetze bei einem Vertauschen von solchen Partnern unverändert bleiben. Häufig ist es ausreichend für die Beschreibung eines solchen supersymmetrischen Modells als Ausgangsraum eine offene Teilmenge von $V = V_0 \oplus V_1$ oder homogene Räume zu betrachten. Aber im Hinblick auf globale Fragen und aus anderen Gründen haben Physiker auch den Fall von allgemeinen Supermannigfaltigkeiten als Ausgangsraum untersucht und für die Grundlagen einer Theorie der Supermannigfaltigkeiten seit Mitte der siebziger Jahre eine Reihe von verschiedenen Vorschlägen erarbeitet. Das vorliegende Buch hat zum Ziel, einen dieser Vorschläge aufzugreifen und von Grund auf zu entwickeln. An mathematischen Vorkenntnissen wird dabei sehr wenig vorausgesetzt, Grundkenntnisse über Analysis, Lineare Algebra und Topologie sind ausreichend. Der Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wird z. B. nicht vorausgesetzt, sondern mitentwickelt.

Das grundlegende Konzept zur Formulierung einer Theorie der Supermannigfaltigkeiten in diesem Buch ist die Garbe. In der Tat ist ja der Garbenbegriff in besonderem Maße dazu geeignet, zwischen punktalen, lokalen und globalen Eigenschaften zu vermitteln. Nach einem ersten einleitenden Kapitel und einem zweiten Kapitel über die Grundlagen einer linearen Superalgebra ist daher das dritte Kapitel der ausführlichen Darstellung elementarer Eigenschaften von Garben gewidmet. Der Begriff der Supermannigfaltigkeit auf der Basis von geringten Räumen wird dann im vierten Kapitel behandelt. Im fünften Kapitel schließt die Theorie der Supermannigfaltigkeiten ab mit der Einführung der Ableitung, dem Umkehrsatz und dem Berezin-Integral auf Gebieten $G \subset V_0 \oplus V_1$. Die Beispiele aus der Physik im sechsten Kapitel beschränken sich ebenfalls auf den Fall von Gebieten $G \subset V_0 \oplus V_1$.

Die Formulierung der Supermannigfaltigkeiten mittels der Garbentheorie erscheint mir etwas langatmig, wenn dabei die Garbentheorie (ohne Garbenkohomologie!) erst einmal auf mehr als 40 Seiten ausführlich entwickelt werden muß und die globalen Aspekte der Supermannigfaltigkeiten überhaupt nicht angesprochen werden. In der Tat sind die Teile des Buches, die auf eine Anwendung der Theorie hinauslaufen – die Einführung des Berezin-Integrals im Kapitel 5 sowie das physikalische Beispiel und die Behandlung von Invarianten im Kapitel 6 – ganz und gar im Rahmen von offenen Mengen eines Supervektorraumes formuliert. Dazu hätte es keiner Garbentheorie bedurft! Der in diesem Buch eingeschlagene lange Weg zum Begriff der Supermannigfaltigkeit führt unter anderem auch dazu, daß der Autor erst auf Seite 171 zum Begriff der Ableitung kommt. Das Bestreben, den Mannigfaltigkeitsbegriff nicht vorauszusetzen und im Rahmen der geringten Räume mitzuentwickeln, macht außerdem den Aufbau des Buches unnötig kompliziert; kaum jemand wird sich über Supermannigfaltigkeiten informieren wollen, der nicht schon weiß, was eine (gewöhnliche) Mannigfaltigkeit ist. An entscheidender Stelle wird dieses Prinzip dann durchbrochen und die klassische Theorie doch vorausgesetzt, nämlich bei dem Satz von Batchelor, der besagt, daß eine Supermannigfaltigkeit sich in bestimmter Weise als ein geeignetes Vektorbündel über einer (gewöhnlichen) Mannigfaltigkeit auffassen läßt. An dieser Stelle wird der Begriff des Vektorbündels ohne Kommentar vorausgesetzt. Was man schließlich vermissen könnte bei einer so ausführlichen Einführung in die Supermannigfaltigkeiten, ist neben der Geometrie von Supermannigfaltigkeiten ein Vergleich der verschiedenen in der einschlägigen Literatur eingeführten Definitionen des Begriffes Supermannigfaltigkeit. Dieser Aspekt wird nicht einmal erwähnt, und er erschließt sich auch nicht durch das Literaturverzeichnis.

In dem zweiten, wesentlich kürzeren Teil des Buches wird eine elementare Einführung in die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra *Vir* gegeben. Die Virasoro-Algebra tritt auf als die zentrale Erweiterung der Witt-Algebra *W*. Die Witt-Algebra wiederum ist die Lie-Algebra der polynomialen komplexwertigen Vektorfelder auf der Einheitskreislinie $\mathbb{S}$, wird also als $\mathbb{C}$-Vektorraum von den Vektorfeldern

$$L_n := -z^{n+1}\frac{d}{dz}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

erzeugt. Man kann zeigen, daß die Gruppe der konformen Transformationen der kompaktifizierten Minkowski-Ebene $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ bezüglich der Lichtkegelkoordinaten die Gruppe $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})\times\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ (als Komponente der Identität) enthält. Deshalb hat das Produkt $W\times W$ die Interpretation als Lie-Algebra von infinitesimalen konformen Transformationen auf der Minkowski-Ebene $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$. Zugleich läßt die Witt-Algebra aber auch bezüglich der euklidischen Ebene eine Interpretation als Lie-Algebra von infinitesimalen (meromorph-) konformen Transformationen zu, indem die $L_n := -z^{n+1}\frac{d}{dz}$ als meromorphe Vektorfelder der komplexen Ebene aufgefaßt werden. Diese zwei Interpretationen erklären die Bedeutung der Witt-Algebra für klassische Feldtheorien in 2 Dimensionen mit konformer Symmetrie und die Bedeutung der Virasoro-Algebra für (euklidische 2-dimensionale) Quantenfeldtheorien mit konformer Symmetrie.

Die Einführung in die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra beginnt mit einer Zusammenstellung der benötigten Begriffe über Lie-Algebren und ihre Darstellungen in Kapitel 7, um dann in Kapitel 8 die Verma-Moduln und allgemeinere Höchstgewichtsdarstellungen von *Vir* zu behandeln. In Kapitel 9 wird der Kalkül der Vertexoperatoren bezüglich einer unitären Fockraumdarstellung von *Vir* entwickelt. Dieser Kalkül wird mathematisch rigoros eingeführt und verwendet. Das kann sehr hilfreich sein bei der Lektüre der Originalliteratur, bei der aus mathematischer Sicht manchmal nicht klar wird, mit welchen Objekten überhaupt gerechnet wird. Die nächsten beiden Kapitel 10 und 11 sind einem sorgfältigen Beweis der für die Theorie sehr wichtigen Determinantenformel von Kac gewidmet. Schließlich wird im letzten Kapitel 12 über die Folgerungen dieser Formel für die Existenz von unitären Höchstgewichtsdarstellungen der Virasoro-Algebra berichtet.

Alles in allem handelt es sich bei diesem zweiten Teil des vorliegenden Buches um eine ausgewogene und gründliche Einführung in die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra *Vir* auf etwa 100 Seiten, die im Vergleich zu anderen Darstellungen einige sehr hilfreiche ergänzende Argumentationen aufzuweisen hat. Als positiv ist außerdem zu bewerten, daß einerseits die fundamentalen Begriffe ausführlich behandelt werden, daß andererseits sich die Einführung nicht in der Beschreibung von Definitionen erschöpft, sondern mit der Determinantenformel auch ein schwieriges und wichtiges Resultat erarbeitet wird.

München M. Schottenloher

Grenander, U., General Pattern Theory, A Mathematical Study of Regular Structures, Oxford University Press 1994, 883 S., £ 130.–

Das Buch präsentiert das beachtliche Ergebnis einer etwa 25 Jahre dauernden Forschung des Autors und seiner Mitarbeiter an der Brown University. Es ist ein wohl erfolgreicher Versuch, eine in sich schlüssige und doch hinreichend flexible theoretische Basis zu schaffen für die mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen, die sich der Korrespondenz von Erscheinungen der Realität einerseits und verallgemeinerten, mehr oder weniger regulären Strukturen, sogenannten Mustern (pattern), andererseits widmen. Das Hauptziel seiner *General pattern theory* sieht der Autor in der Schaffung einer Darstellung von Mustern der natürlichen und menschengemachten Umwelt in Form algebraischer Systeme mit probabilistischen Maßen und Teilstrukturen. Jedoch ist auch etwa die Hälfte des Buches den beiden Nebenzielen gewidmet, nämlich zum einen der Analyse der regulären Strukturen vom Standpunkt der Algebra, der Topologie und des probabilistischen Schließens her und zum anderen der Schaffung von Werkzeugen, Programmen und Experimentierbeispielen aus der Vielfalt denkbarer Anwendungen.

Der Autor grenzt sein Anliegen bewußt von der Mustererkennung ab, als einschränkend der Erkennung zugewandt, um mehr die Muster selbst in den Mittelpunkt zu rücken und die vielfältigen assoziierten Aufgaben um diese herum zu ordnen: die Erzeugung, die systematische oder die zufällige Beeinflussung (u. U. im Sinne der Störung) sowie die Wiederherstellung von Mustern und das Schlußfolgern einschließlich der Mustererkennung. Die einschätzbare Nützlichkeit der *General pattern theory* ist an die Akzeptanz des inhärenten Credos gebunden, das verfügbare Sachwissen einer jeden Anwendung in einem präzisen mathematischen Modell formalisieren zu können, ohne den Realismus zu verlieren. Zur Überprüfung der Realitätsadäquatheit ruft der Autor zu geeigneten, den Vergleich durch den Menschen gestattenden Computerexperimenten auf.

Das Buch enthält 20 Kapitel in 7 Hauptkapiteln (Parts). Die Parts I, II und IV stellen die Grundlagen der *General pattern theory* dar und werden den meisten Lesern neuartig, eventuell sogar fremd erscheinen. In ihnen wird zunächst eine *Pattern algebra* auf atomaren Elementen, den *Generatoren,* und auf aus diesen über *Connectoren* aufgebauten *Configurationen* definiert. Danach wird die Verbindung zum Beobachter hergestellt, indem über *Identification rules* die Äquivalenz von Konfigurationen erklärt und *Image algebras, Images* und *Patterns* als Äquivalenzklassen definiert werden.

Schließlich werden in Part II die topologischen Eigenschaften von Konfigurationsräumen und Image-Algebren beschrieben. Dabei wird besonders Wert auf die zentrale topologische Eigenschaft der Kontinuität gelegt.

Im Part III wird mit der Beschreibung und Erzeugung abstrakter biologischer und dynamischer Muster (Wachstumsmuster) eine sehr interessante Nebenlinie der Theorie beleuchtet. Es werden nicht nur qualitative Haupteigenschaften biologischer Strukturen demonstriert, sondern auch die auf diesem Gebiet typische Untersuchungsmethodik des Aufprägens äußerer Störungen und des Beobachtens der Strukturveränderungen als Reaktion angewandt.

Part IV ist mit der *Metric pattern theory* von fundamentaler Bedeutung. Es werden Wahrscheinlichkeitsmaße auf algebraischen Strukturen definiert durch Erklärung bzw. Hinzufügung von Zufallsvariablen. Diese werden benutzt, um die beschränkte Beobachtbarkeit und die stochastischen Störungen zu modellieren und probabilistische Schlußfolgerungsmethoden anwenden zu können. Die Brücke zu bekannten Methoden wird über die Markoffschen Modelle geschlagen, und wir finden wegweisende Schritte zur anwendungsbezogenen Modellbildung.

In den Kapiteln 8, 9 und 10 werden Grenzwertprobleme behandelt einmal bezüglich der Strenge der Kopplung über die Wahrscheinlichkeitsmaße und zum anderen bezüglich der Endlichkeit der Größe der Konfigurationen. In diesen Abschnitten werden wesentliche Eigenschaften und Zusammenhänge der theoretischen Basis in Form von Theoremen beleuchtet.

Sehr interessant ist die Aufteilung der Mustervariabilität in einen musterinhärenten Teil, modelliert durch Änlichkeitstransformationen, und einen durch den Beobachter verursachten Störanteil (Part V, Kapitel 12). Beide Teile können probabilistisch sein. Beim musterinhärenten Teil führt das zur partiellen Irregularität. Hier gibt es deutliche Parallelen zu bekannten Herangehensweisen der Strukturellen Mustererkennung.

Die Parts VI und VII geben dem mit der Musterbeschreibung und -erkennung vertrauten Leser die Möglichkeit, Assoziationen zu bekannten theoretischen Ansätzen und Methoden zu finden. Im Kapitel 13 werden die bekannten Aufgabenklassen Bildrestauration, Bildanalyse, Bildapproximation und -extrapolation, Mustererzeugung und Bildverstehen auf die *General pattern theory* abgebildet und als Untersuchungen in algebraischen Systemen dargestellt. Zentral für alle Analyseaufgaben ist die Beherrschung der Mustersynthese sowohl im mathematischen Modell als auch im Experiment. Die Bayessche Herangehensweise an Schlußfolgerungsaufgaben wird im Kapitel 14 bezüglich der Methodik, in Kapitel 15 an diskreten und im Kapitel 16 an kontinuierlichen Mustern beschrieben. Aber auch die Ableitung nicht-Bayesscher Methoden aus der *General pattern theory* findet man im Kapitel 17. Den bekannten Aufgaben der Mustererkennung, z. B. auch dem Lernen von Musterklassen, ist Kapitel 18 gewidmet. Die Kapitel 19 und 20 im Part VII sind besonders wichtig für alle, die sich konkreten Anwendungen zuwenden wollen. Es werden Methoden besprochen und Werkzeuge gegeben, um die anwendungsbezogene Konkretisierung der Elemente und Strukturen vornehmen zu können.

Das Buch ist eine sehr in sich verbundene Abhandlung. Ein anwendungsbereites Verständnis ist nur durch systematisches, nahezu vollständiges Studium des Buches zu erreichen. Es wird etwas erleichtert durch einführende Hinweise des Autors und sehr unterstützt durch systematisch verwendete und wiederkehrende Beispielstrukturen. Von Vorteil ist die Kenntnis der Programmiersprache APL, da wesentliche Beispielalgorithmen darin nachvollziehbar formuliert sind.

Das Buch wendet sich in erster Linie an Wissenschaftler, die an dem theoretischen Fundament musterassoziierter Aufgabenstellungen interessiert sind und dem pragmatischen Vorgehen der Ingenieurdisziplinen auf diesem Feld die längst notwendige Ergänzung zufügen wollen. Am ehesten ist die Anwendungsbereitschaft in Bezug auf die Synthese von Mustern zu erkennen.

Nicht explizit angesprochen, jedoch von naheliegendem Interesse erscheint die Beziehung der *General pattern theory* zu der in den letzten 5 Jahren ausgebauten Digitalen Topologie in der Bildverarbeitung und zur Behandlung von fraktalen Mustern.

Dresden S. Fuchs

Kostrikin, A. I., Tiep, P. H., Orthogonal Decompositions and Integral Lattices (de Gruyter expositions in Matematics vol 16), Berlin u. a.: de Gruyter 1994, 534 S., in Leinen, DM 218,–

Die Entdeckung des Thompson-Smith Gitters und die damit verbundene Konstruktion der sporadischen Thompson Gruppe F_3 führte zu einer systematischen Untersuchung orthogonaler Zerlegungen komplex einfacher Lie-Algebren. Das Buch „Orthogonal decompositions and integral lattices“ ist eine Zusammenstellung der Ergebnisse, die zum größten Teil an der Moskauer Mathematischen Schule erzielt wurden, zu einem zusammenhängenden Bild einer noch sehr jungen Theorie. Die Autoren zeigen langjährige Erfahrung und detaillierte Kenntnisse im Umgang mit komplex einfachen Lie-Algebren.

Allerdings fordern die meist konstruktiven Beweise mit vielen Fallunterscheidungen vom Leser einige Energie und Geduld, die aber durch eine explizite Beschreibung der Ergebnisse belohnt wird. Am Ende jedes Kapitels schließt sich ein informativer Abschnitt „Commentary" an, in dem die Autoren Literaturhinweise und eine historische und fachliche Einordnung des jeweiligen Kapitels geben.

Wie der Titel schon andeutet, gliedert sich das Buch in zwei Teile. Der erste Teil behandelt orthogonale Zerlegungen komplex einfacher Lie-Algebren, der zweite einige mit Hilfe der Automorphismengruppen dieser Zerlegungen in der Lie-Algebra konstruierte ganzzahlige Gitter.

Ein Hauptergebnis des ersten Teils ist die vollständige Klassifikation aller multiplikativen orthogonalen Zerlegungen komplex einfacher Lie-Algebren $\mathscr{L}$. Eine orthogonale Zerlegung

$$\mathscr{D}: \mathscr{L} = H_0 \oplus \ldots \oplus H_h$$

der Lie-Algebra $\mathscr{L}$ in eine orthogonale Summe von Cartan-Teilalgebren heißt *multiplikativ,* falls für alle i, j ein $0 \leq k \leq h$ existiert mit $[H_i, H_j] \subseteq H_k$. (h ist die Coxeterzahl von $\mathscr{L}$.) Es stellt sich heraus, daß alle multiplikativen Zerlegungen irreduzible Zerlegungen sind, d. h. die Untergruppe $Aut(\mathscr{D})$ der Automorphismengruppe der Lie-Algebra $\mathscr{L}$, die die Zerlegung respektiert, operiert irreduzibel auf $\mathscr{L}$. Für diese auch im Hinblick auf die Untersuchungen im zweiten Teil interessanteste Klasse der irreduziblen orthogonalen Zerlegungen wird eine vollständige Klassifikation nur für die Typen A_n, B_n und die Ausnahmetypen erzielt. Für die Lie-Algebren vom Typ C_n und D_n sind nur Teilresultate bekannt.

Die irreduziblen orthogonalen Zerlegungen haben meist eine erstaunlich einfache Gestalt: Ist $\mathscr{L}$ vom Typ A_n, so gibt es genau dann eine irreduzible orthogonale Zerlegung, wenn $n = p^m - 1$ für eine Primzahl p und $m \in \mathbb{N}$ ist. Die irreduziblen orthogonalen Zerlegungen von A_{p^m-1} stehen in Bijektion zu transitiven „symplectic spreads" von $\mathbb{F}_p^m$, sind also für $p^m \neq 27$ eindeutig. Ist $\mathscr{L}$ vom Typ B_n, so ist die Klassifikation etwas subtiler, da auflösbare Gruppen als Automorphismengruppen von Zerlegungen auftreten können, aber auch hier läßt sich eine einfache kombinatorische Struktur erkennen. Für die Ausnahmetypen gründet sich die Klassifikation auf die Existenz eines regulären Automorphismus von Primzahlordnung $h + 1$.

Die Automorphismengruppe $Aut(\mathscr{D})$ einer irreduziblen orthogonalen Zerlegung $\mathscr{D}$ ist immer enthalten in der endlichen Gruppe $A \wr S_{h+1}$, wo A die Automorphismengruppe des zu H_0 gehörigen Wurzelsystems bezeichnet. Die Darstellung ist induziert von einer rationalen Darstellung, also operiert $Aut(\mathscr{D})$ rational auf $\mathscr{L}$ und läßt folglich ein volles $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathscr{L}$ fest. Der zweite Teil des Buches beschäftigt sich mit der Bestimmung aller invarianten Gitter vom Typ $\mathscr{L}$, das sind volle $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathscr{L}$, mit definiter Einschränkung der Killingform, auf denen eine irreduzible Untergruppe der Automorphismengruppe einer orthogonalen Zerlegung von $\mathscr{L}$ operiert. Bei der Bestimmung und Untersuchung der invarianten Gitter legen die Autoren Wert auf nachvollziehbare Argumente, die ohne Hilfe von Computern auskommen. Als Untergruppen von Automorphismengruppen der invarianten Gitter erhalten Kostrikin und Tiep unter anderem Lie-Realisationen der einfachen Gruppen $L_4(3)$ (Typ F_4), $\Omega_7(3)$ und Fi_{22} (Typ E_6) und $L_4(5)$ und F_3 (Typ E_8). Die Autoren untersuchen auch die metrischen Eigenschaften (Diskriminante und Minimum) der invarianten Gitter und zeigen neue Serien unimodularer Gitter auf. Im letzten Kapitel geben sie eine Übersicht über weitere neuere Gitterkonstruktionen u. a. durch Konstruktion global irreduzibler Darstellungen endlicher Gruppen, die auch als Automorphismengruppen von Mordell-Weil-Gittern auftreten.

Es ist erfrischend zu sehen, daß die sehr aktive Theorie der Gitter jetzt auch noch von der Theorie der Lie-Algebren befruchtet wird. Jeder, der sich mit Gittern, endlichen

Gruppen oder Lie-Algebren beschäftigt, wird dieses Buch anregend finden. Es ist eine wertvolle Ergänzung der vorhandenen Literatur.

Aachen G. Nebe

Leptin, H., Ludwig, J., Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups (de Gruyter Expositions in Mathematics vol. 18), Berlin u. a.: de Gruyter 1994, 200 S., in Leinen, DM 198,–

Die unitäre Darstellungstheorie Liescher Gruppen besitzt zwei wesentliche Zweige, den der Darstellungstheorie der einfachen bzw. halbeinfachen Lieschen Gruppen, und den der auflösbaren Lieschen Gruppen. Beide besitzen Ursprünge in Fragen der Physik, insbesondere der Quantenmechanik. Halbeinfache Gruppen treten dabei oftmals in Gestalt von Symmetriegruppen auf, während auf der anderen Seite der Satz von Stone und von Neumann, welcher die möglichen Darstellungen der Heisenbergschen Kommutatorrelationen zwischen den Orts- und Impulsoperatoren der Quantenmechanik durch selbstadjungierte Operatoren auf Hilbertschen Räumen beschreibt, auch als eine Charakterisierung des unitären Duals derjenigen 2-stufig nilpotenten Gruppe interpretiert werden kann, welche heute i. a. als Heisenberggruppe bezeichnet wird.

Eine weitreichende Verallgemeinerung erfuhr der Satz von Stone und von Neumann in der Mackeyschen Theorie der induzierten Darstellungen lokal kompakter Gruppen, insbesondere im Imprimitivitätssatz, welcher Bedingungen dafür liefert, wann eine irreduzible unitäre Darstellung einer Gruppe von einer Untergruppe induziert ist. Damit wurde ein systematisches Studium des unitären Duals auflösbarer Gruppen möglich. Nach grundlegenden Arbeiten von Dixmier gelang es 1962 Kirillov, eine vollständige Beschreibung des unitären Duals zusammenhängender, einfach zusammenhängender nilpotenter Liescher Gruppen mittels der sogenannten Bahnenmethode anzugeben (er griff dabei sogar nur auf den Satz von Stone und von Neumann zurück). Die Kirillovsche Theorie wurde anschließend mit Hilfe der Mackeyschen Theorie auf auflösbare Gruppen ausgedehnt, wobei vor allem die Namen Takenouchi, Bernat, Pukanszky, Vergne sowie L. Auslander und Kostant zu nennen sind.

Insbesondere für die Klasse der exponentiellen Lieschen Gruppen, d. h. derjenigen auflösbaren Lieschen Gruppen, bei denen die Exponentialabbildung die Liesche Algebra bijektiv auf die Gruppe abbildet, ergab sich ein vergleichbar rundes Bild der Darstellungstheorie wie im nilpotenten Fall. Es sieht folgendermaßen aus:

Es bezeichne $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ die Exponentialabbildung der Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$ der exponentiellen Gruppe G. Sei $l \in \mathfrak{g}^*$ eine Linearform auf $\mathfrak{g}$, und ω_l bezeichne die schiefsymmetrische Form auf $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, welche durch $\omega_l(X, Y) = l([X, Y])$ definiert ist. Unter einer Polarisierung für l versteht man eine Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$, welche isotrop bzgl. der Form ω_l ist und maximale Dimension unter solchen Unteralgebren besitzt. Ist $\mathfrak{h}$ eine Polarisierung für l, so wird durch $\chi(\exp X) = e^{il(X)}$, $X \in \mathfrak{g}$, ein unitärer Charakter der Untergruppe $H = \exp \mathfrak{h}$, welche zu $\mathfrak{h}$ gehört, definiert. Es bezeichne dann $\pi(l, \mathfrak{h}) = \mathrm{ind}_H^G \chi$ die von χ auf G induzierte unitäre Darstellung von G. Ferner bezeichne $\Omega_l \subset \mathfrak{g}^*$ die G-Bahn von l unter der koadjungierten Darstellung Ad^* von G auf $\mathfrak{g}^*$. Dann gilt:

– $\pi(l, \mathfrak{h})$ ist irreduzibel genau dann, wenn $\mathfrak{h}$ die Pukanszky-Bedingung $l + \mathfrak{h}^{\perp} \subset \Omega_l$ erfüllt (dies ist im nilpotenten Fall stets so).

– Sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ zwei Polarisierungen zu l, welche beide die Pukanszky-Bedingung erfüllen, so ist $\pi(l, \mathfrak{h}_1)$ äquivalent zu $\pi(l, \mathfrak{h}_2)$; jedem $l \in \mathfrak{g}^*$ kann somit eine eindeutige Klasse $\pi(l) = [\pi(l, \mathfrak{h})]$ im unitären Dual $\hat{G}$ von G zugeordnet werden.

– Sind $l_1, l_2 \in \mathfrak{g}^*$, so ist $\pi(l_1) = \pi(l_2)$ genau dann, wenn l_1 und l_2 auf derselben G-Bahn liegen, d. h. wenn $\Omega_{l_1} = \Omega_{l_2}$.
– Jedes $\pi \in \hat{G}$ ist von der Form $\pi(l)$ für ein $l \in \mathfrak{g}^*$.

Bezeichnet $\mathfrak{g}^*/G$ den Bahnenraum von G in $\mathfrak{g}^*$, so wird durch $K: \Omega_l \mapsto \pi(l)$ somit eine Bijektion K von $\mathfrak{g}^*/G$ auf $\hat{G}$ definiert. Die Abbildung K wird als Kirillov-Abbildung bezeichnet. Sie liefert offenbar eine sehr zufriedenstellende mengentheoretische Parametrisierung des Duals $\hat{G}$.

Nun besitzen sowohl der Bahnenraum $\mathfrak{g}^*/G$ als auch $\hat{G}$ natürliche Topologien, nämlich $\mathfrak{g}^*/G$ die Quotiententopologie von $\mathfrak{g}^*$, und $\hat{G}$ die Topologie, welche durch die kanonische Abbildung von $\hat{G}$ auf den Raum Prim $C^*(G)$ der primitiven Ideale in der C^*-Hülle von G induziert wird. Für nilpotentes G hatte bereits Kirillov gezeigt, daß K stetig ist und vermutet, daß K ein Homöomorphismus ist. Die Stetigkeit von K für allgemeine exponentielle Gruppen wurde 1968 durch Pukanszky bewiesen. Der Nachweis der Stetigkeit von K^{-1} für nilpotente Gruppen und damit der Beweis der Kirillovschen Vermutung gelang dagegen erst im Jahre 1973 I. D. Brown. Sein Beweis beruht im wesentlichen darauf, daß es im nilpotenten Fall genügt, die Stetigkeit von K^{-1} für freie nilpotente Liesche Gruppen zu beweisen, und daß diese große Automorphismengruppen besitzen.

Leider ist eine Erweiterung dieses Beweisansatzes auf den Fall exponentieller Gruppen nicht möglich, da es keine „freien Modelle" allgemeiner exponentieller Gruppen gibt. Dementsprechend blieb die (verallgemeinerte) Kirillovsche Vermutung für expotentielle Gruppen lange Zeit offen. Erste Fortschritte wurden 1984 durch H. Fujiwara erreicht, der zeigte, daß K eine dichte offene Menge in $\mathfrak{g}^*/G$ homöomorph auf eine dichte offene Menge von $\hat{G}$ abbildet. Der eigentliche Durchbruch gelang jedoch J. Ludwig um 1987. Seine grundlegende Idee war es, nicht nur mit einer festen exponentiellen Gruppe zu arbeiten, sondern mit einer ganzen Schar exponentieller Gruppen, welche stetig von einem Parameter abhängen – sogenannten „variablen" exponentiellen Gruppen –, und einen Induktionsbeweis nach der Dimension der variablen Gruppe zu führen. Damit konnte die nötige Flexibilität, wie sie im nilpotenten Fall mit Hilfe von geeigneten Automorphismen erzeugt wird, hier gleichsam in die Struktur der „variablen" Gruppen hineingebaut werden. Die auch technisch sehr anspruchsvollen Ideen Ludwigs lagen längere Zeit nur in Form eines (recht knappen und unvollständigen) Preprints vor und waren damit nur einem kleinen Expertenkreis zugänglich.

Das Hauptanliegen der vorliegenden Monographie von Leptin und Ludwig ist es, einen vollständigen Beweis des Ludwigschen Satzes – sprich der Kirillovschen Vermutung für exponentielle Gruppen – zu geben. Diesen findet man in Kapitel 3 des Buches (man möge mir die lange Einleitung verzeihen – diese schien mir jedoch nötig, um dieses Anliegen deutlich zu machen).

Darüber hinaus wird in Kapitel 1 die vorab beschriebene Parametrisierung des Duals einer exponentiellen Lieschen Gruppe G durch den Bahnenraum $\mathfrak{g}^*/G$ vollständig hergeleitet. Insbesondere wird der Mackeysche Imprimitivitätssatz (in seiner beinahe allgemeinsten Form für lokal kompakte Gruppen) in einer von Blattner beschriebenen Version vollständig bewiesen, und als Vorbereitung für Kapitel 3 werden die Kerne von Einschränkungen irreduzibler Darstellungen auf Untergruppen bzw. von von Untergruppen induzierten Darstellungen untersucht. Schließlich wird in § 6 eine Unteralgebra der Gruppenalgebra $L^1(G)$ definiert, welche im nilpotenten Fall gerade die Algebra der Schwartzfunktionen ist, und welche in gewissem Sinne deren Rolle für allgemeine exponentielle Gruppen übernimmt. Insbesondere kann diese dazu benutzt werden zu zeigen, daß $\pi(L^1(G))$ für jedes $\pi \in \hat{G}$ Operatoren endlichen Ranges enthält. Allerdings ist die Konstruktion dieser Algebra nicht kanonisch, sondern hängt von der Wahl ganz spezieller Basen von $\mathfrak{g}$ ab.

Kapitel 2 schließlich enthält die Grundlagen der Theorie variabler Gruppen und Algebren, welche enge Bezüge zu anderen Theorien, wie die der Gruppoide, Bündel und Kontraktionen, aufweist.

Die Bedeutung des vorliegenden Buches wird schon daraus evident, daß es nur sehr wenig Textbuchliteratur über auflösbare Liesche Gruppen und deren Darstellungstheorie gibt – das Buch „Représentations des groupes de Lie résolubles" von Bernat et al. aus dem Jahre 1972 war bislang noch die wichtigste Quelle zu diesem Gebiet. Das Buch von Leptin und Ludwig wird sicher eine weitere Standardreferenz zu diesem Gebiet werden. Allerdings setzt es vom Leser bereits gute Kenntnisse über Liesche Gruppen, Gruppenalgebren, deren Einhüllende C^*-Algebren sowie deren Darstellungstheorie voraus, wie man sie beispielsweise durch die Lektüre des Dixmierschen Buches über C^*-Algebren erwerben kann.

Darüber hinaus wird der Stoff oftmals sehr straff und auf das oben beschriebene Ziel hin ausgerichtet entwickelt, was dem Leser einiges abverlangt. Ich hätte mir an der einen oder anderen Stelle einige illustrative Beispiele gewünscht, die die Lektüre erleichtern würden. Auch mit Hinweisen zur Literatur, sowohl Textbuchliteratur, als auch Originalarbeiten, wird sehr sparsam umgegangen (wofür die Autoren sich vorsorglich entschuldigen). Schließlich stößt man bei der Lektüre gelegentlich auf Druckfehler, welche i. d. Regel jedoch kaum ernsthafte Probleme hervorrufen. Im Beweis von Proposition 7, § 5, Ch. I z. B., häufen sich solche allerdings auf unglückliche Weise. Dort werden mehrfach die Rollen der Darstellungen σ und τ vertauscht, wie auch die Buchstaben φ und Φ, es wird in der letzten Formel auf S. 53 fälschlicherweise über die Untergruppe K und nicht über G integriert, und auf S. 54 bezeichnet Φ_α gleichzeitig Matrixkoeffizienten der Darstellungen σ, π_σ und später auch τ.

Bereits die obigen Ausführungen machen klar, daß es sich hier nicht um ein Lehrbuch zur Darstellungstheorie auflösbarer Liescher Gruppen im klassischen Sinne handelt – dazu wäre auch die Stoffauswahl zu eng. Jedem, der sich ernsthaft mit dieser Theorie beschäftigen will, ist das Buch jedoch sehr zu empfehlen.

Kiel D. Müller

Ziegler, G. M., Lectures on Polytopes (Graduate Texts in Math. 152), Berlin u. a.: Springer 1994, 370 S. pb DM 48,– (hc DM 108,–)

Die Theorie der (konvexen) Polytope hat in den letzten drei Jahrzehnten wachsende Beachtung gefunden. Polytope sind als konvexe Hülle endlich vieler Punkte in euklidischen Räumen sehr natürliche Objekte. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß sie in so verschiedenen mathematischen Gebieten wie Lineare und Kombinatorische Optimierung, Funktionalanalysis, Algebraische Geometrie und Semialgebraische Geometrie zahlreiche Anwendungen finden.

Das vorliegende Buch geht nicht im einzelnen auf diese Anwendungsgebiete ein, sondern konzentriert sich auf die Polytoptheorie selbst, die mittlerweile einen enormen Umfang und Tiefe erreicht hat. Es fehlen aber nicht zahlreiche Verweise auf Bezüge zu anderen Gebieten. Im Kapitel 0 wird eine sehr motivierende, beispielsorientierte Einführung gegeben, durch die der Leser bereits einen Eindruck von der interessanten Materie bekommt und nebenbei die grundlegenden Begriffe kennenlernt. Das Kapitel erläutert ausführlich die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Polytopen, die von Bedeutung für die algorithmische Geometrie sind.

Kapitel 1 und 2 präsentieren die Grundlagen aus der Konvexgeometrie und die wichtigsten Fakten über die Seitenverbände von Polytopen. Im dritten Kapitel werden die Kantengraphen von Polytopen studiert. In ausführlicher Weise werden hier die neuesten Ergebnisse über die Durchmesser solcher Graphen dargestellt. Diese sind von besonderer Bedeutung für die Lineare Optimierung, da sie das schlechtestmögliche Verhalten eines bestmöglichen, kantenfolgenden Algorithmus reflektieren. Weiterhin wird Kalais außerordentlich eleganter Beweis der Tatsache präsentiert, daß der komplette Seitenverband eines einfachen Polytops schon durch einen Kantengraph bestimmt ist. Die Seitenverbände einfacher Polytope sind genau diejenigen, die zu Polytopen gehören, deren Facettenstützhyperebenen in allgemeiner Lage sind. Solche Polytope treten genau als die Zulässigkeitsmengen nichtentarteter, beschränkter Linearer Optimierungsprobleme auf.

Kantengraphen dreidimensionaler Polytope sind genau die planaren, dreizusammenhängenden Graphen. Dies ist die Aussage eines Satzes von Steinitz, der Grundlage vieler Ergebnisse über dreidimensionale Polytope ist. Im vierten Kapitel wird den zahlreichen Beweisen dieses Satzes ein neuer zur Seite gestellt, der aufgrund einer von Trümper stammenden Graphenreduktion einige Komplikationen der früheren Beweise vermeidet. Die beiden folgenden Kapitel widmen sich Realisierbarkeitsfragen höherdimensionaler Polytope. Wie im Satz von Steinitz geht es hier darum, die Frage zu beantworten, ob Zellkomplexe mit gegebenen geometrischen oder kombinatorischen Eigenschaften isomorph zum Seitenverband von Polytopen sind. Für solche Untersuchungen hat sich in den letzten Jahren die Theorie der orientierten Matroide und der Gale-Diagramme als schlagkräftig erwiesen. Als neue Anwendungen dieser Theorie wird neben vielen anderen erstmals ein fünfdimensionales Polytop vorgestellt, bei dem die Form einer zweidimensionalen Seite nicht beliebig vorgeschrieben werden kann. Richter-Gebert hat mittlerweile auch ein vierdimensionales Polytop mit dieser Eigenschaft konstruiert und damit ein in dem Buch vorgestelltes Problem gelöst. Die Theorie der orientierten Matroide, die für die Polytoptheorie benötigt wird, stellt der Verfasser in sehr gelungener Weise dar. Das siebte Kapitel vertieft diese Theorie und wendet sie auf Zonotope und zu Polytopen verwandte Objekte wie Fächer, Arrangements von Hyperebenen und Pflasterungen an.

Das achte Kapitel stellt die spektakulären Ergebnisse über die Seitenzahlen von Polytopen, das „Upper-Bound-Theorem" und das „g-Theorem" dar. Das für diese Theoreme wichtige Konzept der Schälbarkeit und der durch sie definierbaren h-Vektoren wird erläutert und erstmals ein Polytop konstruiert, bei dem eine begonnene „Schälung" nicht fortgesetzt werden kann.

Im letzten Kapitel werden die für Gröbner-Basen bedeutsamen Faserpolytope beschrieben. Als Anwendung stellt der Verfasser seine Konstruktion des Permuto-Assoziaeders dar. Das umfangreiche Literaturverzeichnis rundet das Buch ab.

Alle Kapitel enthalten eine große Sammlung von Problemen, die von einfacheren Übungsaufgaben bis zu sehr bedeutsamen offenen Problemen reichen.

Das Buch zeichnet sich durch eine stets klare Beweisführung, die durch zahlreiche ausgezeichnete Illustrationen unterstützt wird, aus. Die Ergebnisse werden in auch für Studenten motivierender Weise vorgestellt. Es eignet sich daher hervorragend als Grundlage für einen Kurs über Polytope.

Nach Erscheinen des Buches sind – nicht zuletzt durch die darin enthaltenen Anregungen – einige neue Ergebnisse erzielt worden. Der Verfasser hat hierzu erfreulicherweise einen WWW-Server (http://winnie.math.tu-berlin.de/~ziegler) eingerichtet, der neben einigen wenigen Korrekturen zum Buch die interessanteren neuen Entwicklungen referiert. Ich halte dies für einen erfreulichen Dienst am Leser.

Da das Buch alle wichtigen Techniken der Polytoptheorie und zahlreiche neue Ergebnisse enthält, ist es für jeden Fachmann, aber auch für den Mathematiker und Informatiker, der Polytope in einem der genannten Anwendungsgebiete verwendet, unentbehrlich.

Passau P. Kleinschmidt

Schulze, B.-W., Pseudo-Differential Boundary Value Problems, Conical Singularities, and Asymtotics, Berlin: Akademie-Verlag 1994, 580 S., DM 120,–

Randwertprobleme für elliptische Differentialoperatoren sind ein zentraler Gegenstand in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und ihrer Anwendungen, und die mathematische Behandlung derartiger Probleme hat vielfältige Entwicklungen in der Mathematik ausgelöst. Einige Ansätze zur Lösung von elliptischen Randwertproblemen führen auf Gleichungen in der Randmannigfaltigkeit, und die dann zu behandelnen Operatoren sind keine Differentialoperatoren mehr, sondern singuläre Integraloperatoren oder Pseudodifferentialoperatoren. Für glatt berandete offene Mengen (oder Mannigfaltigkeiten) ist die Theorie der elliptischen Randwertprobleme gut studiert und dokumentiert. Im Falle von nicht glatten Randmannigfaltigkeiten treten neue Phänomene auf. Grob gesprochen schlägt sich eine Singularität in der Geometrie nieder als eine Singularität in der Lösung. Von Wichtigkeit ist es nun, den Mechanismus zu finden, wie die geometrische Singularität die Regularität der Lösung beeinflußt.

Herr Schulze hat sich in einem sehr umfangreichen Programm dieser Aufgabenstellung angenommen, wobei nicht einzelne Fragestellungen separat behandelt werden sollen, sondern es soll ein allgemeiner Kalkül aufgestellt werden. Die geometrischen Singularitäten werden hierzu hierarchisch geordnet und auf Seiten der (Pseudo-)Differentialoperatoren (incl. Randoperatoren) entspricht dem eine Hierarchie der (i. allg. operatorwertigen) Symbole. Hierüber hat Herr Schulze schon in mehreren, sich ergänzenden Monographien berichtet. Die vorliegende Monographie ordnet sich diesem Programm unter, allerdings liegt nun ein Werk vor, welchen dem motivierten Leser den Einstieg wesentlich erleichtert. In Kapitel 1 (ca. 220 S.) wird eine gründliche Einführung von Mellin-Pseudodifferentialoperatoren gegeben, und es wird erläutert, warum Singularitäten in der Geometrie das Studium dieser Operatoren erfordern. Kapitel 2 (ca. 330 S.) behandelt Pseudodifferentialoperatoren auf der Halbachse, diskutiert die Transmissionsbedindung, um sich schließlich den Randwertproblemen zu widmen. Vieles ist hier erstmals in Buchform dargestellt und die klassische Theorie (von Visik-Eskin) wird wesentlich erweitert. Die Darstellung ist dem Gegenstand entsprechend sehr technisch, aber in den Notes zu den einzelnen Abschnitten wird nicht nur der Bezug zur Literatur hergestellt, sondern auch bestens motiviert, weshalb dieses technische Niveau nötig ist.

Ein wichtiges Buch, welches von einer regen Forschungstätigkeit des Autors zeugt.

Tübingen und Erlangen Niels Jacob