E 20577 F
99. Band Heft 4
ausgegeben am 14.10.1997

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart 1997

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax (0711) 78901-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

99. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1997

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, Oftersheim
Druck: pagina media gmbH, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 99, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Bergmann, H. W. Knobloch: Hermann Schmidt 1902–1993
G. Burde, W. Schwarz: Wolfgang Franz zum Gedächtnis
K. W. Gruenberg, J. Ritter, A. Weiss: On Chinburg's root number conjecture
G. Harder: Galoismoduln und Shimura-Varietäten
J. Zabczyk: Infinite dimensional diffusions in modelling and analysis

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
99 (1997) 149–163
Mathematics Subject Classification: 22 E 30, 35 A 07

Differentialoperatoren zweiter Ordnung und Harmonische Analysis

D. Müller, Kiel

Einleitung

Im Jahre 1807 reichte J. Fourier sein berühmtes mémoire zur Theorie der Wärmeleitung bei der französischen Akademie der Wissenschaften ein, in dem er die heute nach ihm benannte Methode der Fourieranalysis zur mathematischen Behandlung dieses Problems einführte. Nach anfänglicher Skepsis führender Wissenschaftler seiner Zeit, wie z.B. Laplace und Lagrange, hat sich die Euklidische Harmonische Analysis seitdem als eines der fruchtbarsten und schlagkräftigsten Werkzeuge im Studium partieller Differentialgleichungen erwiesen.

Starken Auftrieb haben diese Methoden seit den fünfziger Jahren durch die Theorie der Singulären Integrale, der Pseudodifferentialoperatoren sowie der Fourierintegraloperatoren erhalten, welche aus der modernen Theorie beispielsweise elliptischer oder hyperbolischer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten nicht mehr wegzudenken sind und interessante Querverbindungen zu Gebieten wie Geometrie und Topologie aufgezeigt haben.

In jüngerer Zeit haben sich auch Methoden aus der nichtkommutativen Harmonischen Analysis als fruchtbar für das Studium partieller Differentialgleichungen erwiesen.

Ich möchte in diesem Essay versuchen, dies anhand einiger Fragestellungen exemplarisch zu erläutern, wobei ich mich auf lineare Differentialoperatoren 2. Ordnung beschränken werde.

Dazu seien M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension d (der Einfachheit halber sei dies hier der $\mathbb{R}^d$), $X_j = \sum_{k=1}^{d} b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, j = 1, \dots, m$, glatte Vektorfelder auf M, sowie $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ eine reelle, symmetrische $m \times m$-Matrix. Dabei nehmen wir $m \leq d$ an. Wir werden Operatoren der Gestalt

$$L = -\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j + \text{Terme niedrigerer Ordnung}$$

betrachten. Einen solchen Differentialoperator wollen wir *transversal elliptisch* nennen, wenn die Matrix A oder ihr Negatives positiv definit ist.

Es sollen drei Themenkreise, welche nachfolgend präzisiert werden, diskutiert werden, und zwar die Frage nach der Lösbarkeit eines solchen Differentialoperators sowie, im Falle eines transversal elliptischen Operators L, Fragen zu den Regularitätseigenschaften sowie zum Funktionalkalkül auf Lebesgue-Räumen.

A. Lösbarkeit. Hier möchte ich mich auf das Problem der lokalen Lösbarkeit von L beschränken, welches das wohl fundamentalste bei der Betrachtung einer Differentialgleichung ist.

Dabei heiße ein linearer Differentialoperator P auf M *lokal lösbar bei* $x_0 \in M$, wenn es eine offene Umgebung V von x_0 gibt so, daß es zu jeder glatten Funktion f mit kompaktem Träger in V eine Distribution u in V gibt mit $Pu = f$, d.h. wenn $P\mathcal{D}'(V) \supset \mathcal{D}(V)$. Wir sagen, P sei *lokal lösbar in* $\Omega \subset M$, wenn P bei jedem Punkt von Ω lokal lösbar ist. Mit ein wenig Funktionalanalysis (vergl. [17]) läßt sich auch eine quantitative Charakterisierung der lokalen Lösbarkeit angeben. Dazu sei o.B.d.A. $M = \mathbb{R}^d$. $\Lambda^s := (1-\Delta)^{s/2}$ bezeichne den *Besselschen Potentialoperator der Ordnung* $s \in \mathbb{R}$, d.h.

$$(\Lambda^s f)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\ (1+|\xi|^2)^{s/2},$$

wobei $\hat{f}(\xi) := \int f(x) e^{-i\xi x}\,dx$ die Fouriertransformierte von f sei.

Der *L_p-Sobolev-Raum der Ordnung* $s \in \mathbb{R}$, $(1 < p < \infty)$ ist dann der Raum

$$L_p^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \Lambda^s f \in L_p(\mathbb{R}^d)\},$$

versehen mit der Norm

$$||f||_{L_p^s} := ||\Lambda^s f||_{L_p} = \left(\int |\Lambda^s f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Für $p = 2$ erhält man den Standard-Sobolev-Raum $L_2^s = H^s$, dessen Norm

$$||f||_{(s)} := ||f||_{L_2^s}$$

im Falle $s \in \mathbb{N}$ äquivalent ist zu

$$\sum_{|\alpha| \le s} ||f^{(\alpha)}||_{L_2}\ .$$

P^* bezeichne den zu P formal adjungierten Operator bezüglich des kanonischen Skalarproduktes $(\ ,\ )$ auf $H^0(\mathbb{R}^d) = L_2(\mathbb{R}^d)$, d.h.

$$(P\varphi, \psi) = (\varphi, P^*\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Dann ist P lokal bei x_0 lösbar genau dann, wenn es eine offene Umgebung V von x_0 sowie Konstanten $k \in \mathbb{N},\ C > 0$ gibt mit

$$(1) \qquad ||f||_{(-k)} \le C||P^*f||_{(k)} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(V)\ .$$

B. Regularität. Der lineare Differentialoperator P auf M heiße *hypoelliptisch*, falls für jede offene Teilmenge V von M aus $u \in \mathcal{D}'(V)$ und $Pu \in C^\infty(V)$ stets $u \in C^\infty(V)$ folgt.

Hypoelliptizität des Operators L ist nur dann zu erwarten, wenn die Koeffizientenmatrix A definit ist, d.h. wenn L transversal elliptisch ist. In diesem Fall dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß L die Gestalt

$$(2) \qquad L = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 + \text{ Terme niedrigerer Ordnung}$$

besitzt.

Ist $m = d$, und sind die Vektorfelder $X_1, \ldots, X_d$ in jedem Punkt von M linear unabhängig, so liegt der „klassische" Fall eines elliptischen Operators L vor. Für elliptische Differentialoperatoren gibt es wohl ausgebaute Theorien. Beispielsweise sind sie stets hypoelliptisch, und es lassen sich mit Hilfe der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren sogenannte Parametrices, d.h. Operatoren, welche L modulo einem glättenden Pseudodifferentialoperator invertieren, angeben (siehe z.B. [17]).

Wir werden uns hier daher auf den *nicht-elliptischen Fall* konzentrieren.

Bemerkung: Mit Hilfe des Satzes von der offenen Abbildung zeigt man übrigens rasch folgende Tatsache:

Ist P hypoelliptisch, so gibt es zu jedem Punkt x_0 eine Umgebung V und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Konstanten $C > 0$ und $\ell \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\|f\|_{(k)} \leq C\|Pf\|_{(\ell)} \quad \text{für alle } f \in D(V) \; .$$

Zusammen mit (1) zeigt dies, daß P stets lokal lösbar ist, falls P^* hypoelliptisch ist.

Um den Grad der Regularität eines hypoelliptischen Differentialoperators quantitativ zu messen, führen wir folgende Definition ein:

P heiße *hypoelliptisch mit Verlust von δ Ableitungen*, wenn für alle $p \in]1, \infty[$ und $s \geq 0$ gilt: Liegt $Pu = f$ lokal in L_p^s, so liegt u lokal in $L_p^{s+m-\delta}$, wobei m die Ordnung von P bezeichne.

Beispielsweise sind elliptische Differentialoperatoren hypoelliptisch ohne Verlust von Ableitungen.

C. Funktionalkalkül. Es sei L ein hypoelliptischer Differentialoperator der Gestalt (2). Im Falle $m = d$ könnte L beispielsweise der Laplace-Beltrami-Operator auf einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit sein. Wie bei diesem findet man zu L oftmals ein glattes Maß dx auf M so, daß L eine selbstadjungierte Fortsetzung von $\mathcal{D}(M)$ auf den Hilbert-Raum $L_2(M, dx)$ besitzt. Bezeichnen wir diese ebenfalls mit L, und ist

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

die Spektralzerlegung von L, so können wir für $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ den beschränkten Operator

$$m(L) := \int_{-\infty}^{\infty} m(\lambda) dE_\lambda$$

auf $L_2(M, dx)$ definieren.

Es stellt sich dann die Frage, unter welchen Zusatzbedingungen an den Spektralmultiplikator m sich der Operator $m(L)$ von $L_p(M,dx) \cap L_2(M,dx)$ zu einem beschränkten Operator des Lebesgue-Raumes $L_p(M,dx)$ in sich fortsetzen läßt, für $p \neq 2$.

Insbesondere wüßte man gerne, für welche solcher Differentialoperatoren L Multiplikatorensätze vom Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander Typ gelten, wie man sie für den klassischen Laplace-Operator kennt.

Allen drei Problemkreisen gemein ist, daß Analysis auf nicht-kommutativen Lieschen Gruppen nutzbringend für ihr Studium herangezogen werden kann.

In besonderem Maße trifft dies auf das Problem B der Regularität zu, welches mit großer Intensität studiert worden ist und für welches mit Hilfe der Analysis auf nilpotenten Lieschen Gruppen die ersten scharfen Regularitätsaussagen bewiesen wurden. Wir werden daher mit Problem B beginnen.

Über die Probleme A und C ist erheblich weniger bekannt, aber immerhin liefert, wie wir sehen werden, das Studium invarianter Differentialoperatoren auf Lieschen Gruppen eine reichhaltige Familie von Beispieloperatoren zu diesen Problemen, und einige der im Laufe ihres Studiums entwickelten Methoden haben sich in jüngster Zeit auch für die Behandlung gewisser Klassen nicht-invarianter Differentialoperatoren als nützlich erwiesen.

1 Regularität

Seien $X_1, \dots, X_m$ glatte reelle Vektorfelder auf $M, m \leq d$. Wir sagen, daß diese die *Hörmander-Bedingung der Ordnung* $r \geq 1$ erfüllen, wenn gilt: Die Vektorfelder $X_1, \dots, X_m$ spannen zusammen mit ihren Kommutatoren

$$[X_{j_1}, [X_{j_2}, [\dots [X_{j_{k-1}}, X_{j_k}] \dots]]]$$

der Ordnung $k \leq r$ in jedem Punkt von M den Tangentialraum an M auf.

Dabei steht $[X, Y| := XY - YX$ wie üblich für den Kommutator zweier Vektorfelder X und Y.

Die Hörmander-Bedingung besitzt eine wichtige *geometrische Interpretation.* Diese geht bereits auf Carnot und Carathéodory zurück, welche die obige Bedingung im Zusammenhang mit Fragen der Kontrolltheorie und Thermodynamik eingeführt hatten (siehe [27], [2]):

Ein absolut stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to M$ heiße *zulässig*, falls gilt:

$$\dot\gamma(t) = \textstyle\sum_{j=1}^m a_j(t) X_j(\gamma(t)) \quad \text{für f.a. } t \in [0,1].$$

Definiert man die *Länge* von γ durch

$$|\gamma| := \int_0^1 (\sum_j a_j^2(t))^{\frac{1}{2}}\, dt\ ,$$

so ist der *Carnot-Carathéodory-Abstand* von x zu y gegeben durch

$$d(x,y) := \inf\{|\gamma| : \gamma \text{ zulässig mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt sei.

Die Hörmander-Bedingung stellt nun sicher, daß stets $d(x,y) < \infty$ ist, und daß d eine Metrik auf M ist , welche die natürliche Topologie induziert. In bezug auf das Problem B liegt ihre Bedeutung in folgendem fundamentalen

Satz 1 (Hörmander). *Erfüllen $X_1, \ldots, X_m$ eine Hörmander-Bedingung, so ist $L = -\sum_{j=1}^m X_j^2$ hypoelliptisch.*

Dieser Satz, welcher hier der Einfachheit halber nicht in seiner allgemeinsten Fassung zitiert wurde, verallgemeinert einen entsprechenden Satz von J. Kohn über den „Sub-Laplace“ Operator auf der Heisenberggruppe (siehe [19], [18]). Der Hörmandersche Beweis benutzt Pseudodifferentialoperatortechniken und liefert keine scharfe Regularitätsaussage für L. Eine solche wurde mit Hilfe von Methoden der Analysis auf nilpotenten Lieschen Gruppen zuerst von L.P. Rothschild und E. M. Stein [26] gegeben (später mit anderen Methoden auch durch C. Fefferman und S. Sanchez-Calle [10]).

Satz 2 (Rothschild/Stein). *Erfüllen $X_1, \ldots, X_m$ die Hörmander-Bedingung der Ordnung r, so ist $L = -\sum_{j=1}^m X_j^2$ hypoelliptisch mit Verlust von höchstens $2 - \frac{2}{r}$ Ableitungen.*

Ich möchte die Beweisidee in grob vereinfachter Form an einem Beispiel erläutern, bei dem z.B. das Problem, wie mit „Termen niedrigerer Ordnung“ zu verfahren ist (welches im allgemeinen Fall zu nicht unerheblichen zusätzlichen Schwierigkeiten führt), wegfällt.

Beispiel 1. Sei $M = \mathbb{R}^2$, mit Koordinaten (t,x), und sei

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ X_2 = \frac{x^k}{k!}\frac{\partial}{\partial t} \qquad (k \geq 1) \ ,$$

somit L ein „Grushin-Operator“ [14]

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x^{2k}}{(k!)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad .$$

Wir setzen dann

$$X_{j+2} := (ad\, X_1)^j(X_2) = \frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \ldots, k \ ,$$

wobei $ad\, X(Y) := [X, Y]$ sei. Da $X_{k+2} = \frac{\partial}{\partial t}$ ist, erfüllen X_1, X_2 somit die Hörmander-Bedingung der Ordnung $k+1$.

1. Schritt: „Lifting“. Wir fügen nun Hilfsvariablen $y_1, \ldots, y_k$ hinzu, setzen $y_{k+1} := t$ und betrachten auf $N_k := \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2 = \{(y_1, \ldots, y_k, t, x)\} = \{(y,x)\}$ die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &:= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \widetilde{X}_{j+2} &:= \frac{\partial}{\partial y_{j+1}} + x\frac{\partial}{\partial y_{j+2}} + \ldots + \frac{x^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\frac{\partial}{\partial t} \quad , j = 0, \ldots, k \ . \end{aligned}$$

Versieht man N_k mit dem Produkt

$$(y,x)(y',x') := (\eta(y,y',x),\ x+x') ,$$

mit

$$\eta(y,y',x)_j = y_j + y'_j + xy'_{j-1} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}y'_1 ,$$

so wird N_k zu einer $(k+1)$-stufig nilpotenten Lieschen Gruppe, und $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{k+2}$ bilden eine Basis der Lieschen Algebra $\mathfrak{n}_k$ aller linksinvarianten Vektorfelder auf N_k. Die nicht-trivialen Kommutatorrelationen zwischen den $\widetilde{X}_j$ sind gegeben durch

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_j] = \widetilde{X}_{j+1}, \quad j = 2, \ldots, k+1 .$$

Den Operator $\tilde{L} := -(\widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2)$ bezeichnet man dann als den *Sub-Laplace-Operator* auf N_k. Nach dem Hörmanderschen Satz ist auch $\tilde{L}$ hypoelliptisch.

$\tilde{L}$ besitzt nun zwei fundamentale Eigenschaften, welche das Studium der Regularität entscheidend vereinfachen, nämlich :

- Invarianz unter Linkstranslationen in N_k
- Homogenität.

In der Tat, definiert man „*Dilatationen*" von N_k durch

$$\delta_r(y_1, \ldots, y_{k+1}, x) := (ry_1, r^2y_2, \ldots, r^{k+1}y_{k+1}, rx), \quad r > 0 ,$$

so bilden diese eine Gruppe von Automorphismen von N_k, und $\tilde{L}$ ist *homogen* vom Grade 2, d.h.

$$\tilde{L}(\varphi \circ \delta_r) = r^2(\tilde{L}\varphi) \circ \delta_r .$$

Ähnlich wie für den klassischen Laplace-Operator auf dem $\mathbb{R}^n$ im Falle $n \geq 3$ kann man damit zeigen, daß $\tilde{L}$ eine *homogene Fundamentallösung* besitzt, d.h. eine δ_r-homogene, temperierte Distribution $K \in \mathcal{S}'(N_k)$ mit

$$\tilde{L}K = \epsilon_0 ,$$

welche glatt außerhalb der 0 ist. ϵ_0 bezeichne hier das Punktmaß im Einselement 0 der Gruppe N_k. Insbesondere ist eine Lösung der Differentialgleichung $\tilde{L}u = f$ gegeben durch $u := f * K$, wobei $*$ die *Faltung*

$$\phi * \psi(x) := \int_{N_k} \phi(y)\psi(y^{-1}x)\, dy$$

zweier geeigneter Funktionen oder auch Distributionen auf der Gruppe N_k bezeichne.

Indem mittels der natürlichen Graduierung, welche durch die Dilatationen auf der Universellen Einhüllenden Algebra von $\mathfrak{n}_k$ induziert wird, *adaptierte Sobolev-Räume* auf N_k eingeführt werden, können schließlich Techniken *singulärer Integraloperatoren* auf nilpotenten Lieschen Gruppen verwendet werden, um scharfe Regularitätsabschätzungen für $\tilde{L}$ herzuleiten.

2. Schritt: „Transfer auf M". Setzen wir $f : M \to \mathbb{C}$ zu $\tilde{f} : N_k \to \mathbb{C}$ fort durch $\tilde{f}(y_1, \ldots, y_k, t, x) := f(t, x)$, so gilt

$$\tilde{L}\tilde{f} = (\widetilde{Lf}) \, .$$

Somit vererben sich lokale Regularitätseigenschaften von $\tilde{L}$ unmittelbar auf L.

Bemerkungen. a) Die Gruppe N_k ist ein Beispiel einer *stratifizierten Lieschen Gruppe*, d.h. einer zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden Lieschen Gruppe N, deren Liesche Algebra $\mathfrak{n}$ eine Vektorraumzerlegung

$$\mathfrak{n} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

besitzt, so daß $\mathfrak{n}$ durch V_1 als Algebra erzeugt wird, und so daß für alle $j, k \in \mathbb{N}$ gilt: $[V_j, V_k] \subset V_{j+k}$ (wobei $V_j := 0$ sei für $j \geq r$).
Eine solche Gruppe ist offenbar nilpotent. Ferner wird durch

$$\delta_r\big|_{V_j} = r^j \, Id_{V_j} \; , r > 0,$$

eine einparametrige Gruppe $\{\delta_r\}_{r>0}$ von Automorphismen von $\mathfrak{n}$ definiert. Mit Hilfe der Exponentialabbildung lassen sich diese Automorphismen zu Automorphismen der Gruppe N liften, den kanonischen *Dilatationen* von N (vergl. [11]).

b) Für sogenannte *„Rockland-Operatoren"*, d.h. homogene, linksinvariante Differentialoperatoren auf stratifizierten, oder allgemeiner graduierten Gruppen, haben B. Helffer und J. Nourrigat [16] ein Darstellungs-theoretisches Kriterium für die Hypoelliptizität bewiesen, welches im Fall von Operatoren mit konstanten Koeffizienten, d.h. im Euklidischen Fall, dem bekannten Hörmanderschen Hypoelliptizitätskriterium entspricht. Insbesondere läßt sich damit ein weiterer Beweis der Hypoelliptizität des Differentialoperators $\tilde{L}$ auf der Gruppe N_k geben.

2 Lösbarkeit

Die Frage der lokalen Lösbarkeit von Differentialoperatoren der Gestalt

(3) $\quad L = -\Sigma a_{ij} X_i X_j +$ Terme niedrigerer Ordnung

hat sich als weitaus komplexer erwiesen als die nach der Regularität der im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Operatoren. Der heutige Kenntnisstand beschränkt sich überwiegend auf gewisse Klassen von Beispielen und einige wenige Ergebnisse allgemeinen Typs aus allerjüngster Zeit, von denen ich einige hier vorstellen möchte.

Sicherlich werden auch hier wie im Abschnitt 1 die Kommutatorrelationen zwischen den X_j für die Lösbarkeitsfrage von Bedeutung sein. Die Diskussion in Abschnitt 1 legt nahe, insbesondere linksinvariante Differentialoperatoren der Gestalt (3) auf nilpotenten Lieschen Gruppen zu betrachten.

Ist die Gruppe kommutativ, d.h. ein Euklidischer Raum, so ist L in geeigneten Koordinaten ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, und somit nach dem Satz von Malgrange-Ehrenpreis stets lösbar.

Beispiel 2. Es bezeichne N_1 die 2-stufig nilpotente Gruppe aus Beispiel 1, sowie $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ die entsprechende Basis von $\mathfrak{n}_1$. Die einzige nichttriviale Kommutatorrelation zwischen den $\widetilde{X}_j$ ist die Heisenbergsche Relation $[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = \widetilde{X}_3$, weshalb N_1 auch als die *Heisenberggruppe* bezeichnet wird. Setze

$$Z := \widetilde{X}_1 + i\widetilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x} + i(\frac{\partial}{\partial y_1} + x\frac{\partial}{\partial t}).$$

Führt man mittels

$$\exp_{N_1}(y_1\widetilde{X}_2 + t\widetilde{X}_3)\exp_{N_1}(x\widetilde{X}_1) = \exp_{N_1}(x\widetilde{X}_1 + y\widetilde{X}_2 + u\widetilde{X}_3)$$

Koordinaten $(x, y, u) = (x, y_1, t - \frac{1}{2}xy_1)$ ein, so stellt sich Z gerade als der *Lewy-Operator*

$$Z = (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{i}{2}(x + iy)\frac{\partial}{\partial u}$$

heraus. Wie Hans Lewy im Jahre 1957 zeigte, ist Z nicht lokal lösbar. Dies war das erste Beispiel eines linearen Differentialoperators mit analytischem Koeffizienten, welcher nicht lokal lösbar ist. Der Lewy-Operator, und allgemeiner die *Mizohata-Operatoren* $X_1 + iX_2 = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{x^k}{k!}\frac{\partial}{\partial t}$, haben in der inzwischen gut verstandenen Theorie der Differentialoperatoren vom sogenannten Haupttyp, zu der namhafte Mathematiker, wie beispielsweise Hörmander, Maslov, Egorov, Nirenberg–Treves and Beals–Fefferman (siehe [17]), beigetragen haben, eine fundamentale Rolle gespielt. Ich möchte hier kurz an diese Theorie erinnern.

Einschub: Differentialoperatoren vom Haupttyp

Ist

$$P = p(x, D) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein partieller Differentialoperator der Ordnung k auf dem $\mathbb{R}^n$, wobei wie üblich $D^\alpha = (\frac{\partial}{i\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{i\partial x_n})^{\alpha_n}$ gesetzt sei, so ist sein *vollständiges Symbol* definiert als die Funktion $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Sein *Hauptsymbol* ist der homogene Anteil der Ordnung k, also $p_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$. Im Gegensatz zum vollständigen Symbol besitzt das Hauptsymbol eine invariante Bedeutung als Funktion auf dem Kotangentialbündel $T^*\mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$, und aufgrund der ξ-Homogenität von p_k betrachtet man p_k dann als Funktion auf $\Omega := T^*\mathbb{R}^n \setminus 0 = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
Es bezeichne $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die Basisprojektion dieses Bündels. $T^*\mathbb{R}^n$ trägt eine kanonische $1-$ Form, welche in den üblichen Koordinaten gegeben ist durch $\Theta = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$. Insbesondere ist auf Ω durch $\omega := d\Theta = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ eine kanonische $2-$ Form definiert. Damit läßt sich jeder glatten, reellen Funktion a auf Ω ein Hamiltonsches Vektorfeld H_a zuordnen, welches explizit gegeben ist durch $H_a = \sum_j \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)$.

Ist γ eine Integralkurve von H_a, d.h. gilt $\dot{\gamma}(t) = H_a(\gamma(t))$, so ist a konstant entlang von γ. γ wird als *Null-Bicharakteristik* von a bezeichnet, wenn a auf γ verschwindet. Schließlich bezeichne $\Sigma := \{p_k = 0\} \subset \Omega$ die charakteristische Varietät von P.

Man sagt dann, P sei vom *Haupttyp*, falls $\partial_\xi p_k$ auf Σ nicht verschwindet (oder, allgemeiner, falls es zu jedem $\zeta \in \Sigma$ eine komplexe Zahl z gibt derart, daß $d(\Re\mathrm{e}(zp_k))(\zeta)$ und $\Theta(\zeta)$ nicht proportional sind). Die folgende Bedingung $(\mathcal{P})$ von Nirenberg–Treves entscheidet über die lokale Lösbarkeit eines partiellen Differentialoperators vom Haupttyp:

$(\mathcal{P})$. Die Funktion $\Im\mathrm{m}(zp_k)$ besitzt für jedes $z \in \mathbb{C}$ entlang jeder Null-Bicharakteristik $\gamma_z(t)$ von $\Re\mathrm{e}(zp_k)$ konstantes Vorzeichen .

Genauer ist P dann und nur dann lokal lösbar bei x_0, wenn die Bedingung $(\mathcal{P})$ über einer Umgebung von x_0 gilt.

Man beachte, daß die Bedingung $\mathcal{P}$ ausschließlich eine Bedingung an den Hauptteil des Operators ist.

Betrachte nun die Operatoren

$$\begin{aligned} L_{-1} &:= Z\overline{Z} = \widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2 - i\widetilde{X}_3 \ , \\ L_0 &:= \frac{1}{2}(Z\overline{Z} + \overline{Z}Z) = \widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2 \ . \end{aligned}$$

Mit Z ist offenbar auch L nicht lokal lösbar; dagegen ist L_0 nach dem Satz von Hörmander hypoelliptisch, und da $L_0 = L_0^*$ ist, ist L_0 damit insbesondere lokal lösbar. Allgemeiner konnten G. B. Folland und E. M. Stein [12] (siehe auch [1]) zeigen, daß $L_\alpha = \widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2 + i\alpha\widetilde{X}_3$ lösbar ist genau dann, wenn $\pm\alpha$ keine ungerade natürliche Zahl ist.

Im Gegensatz zur Klasse der Differentialoperatoren vom Haupttyp hängt hier die Lösbarkeit also entscheidend von den Termen niedrigerer Ordnung ab. Dies ist typisch für Operatoren mit *doppelten Charakteristiken* wie denjenigen vom Typ (3), bei denen das Hauptsymbol in gewissen Punkten von Σ von zweiter Ordnung verschwindet, und mit verantwortlich für die Schwierigkeiten beim Studium dieser Operatoren.

Für linksinvariante Operatoren vom Typ (3) auf einer beliebigen 2-stufig nilpotenten Lieschen Gruppe wird in einer kürzlich erschienenen gemeinsamen Arbeit mit F. Ricci die Frage der Lösbarkeit vollständig beantwortet (siehe [22], [23]).

Da die Formulierung der entsprechenden Bedingungen aufwendig ist, möchte ich mich hier auf den wichtigen Fall homogener Differentialoperatoren auf der $2n+1$-dimensionalen Heisenberggruppe $\mathbb{H}_n$ beschränken.

Deren Liesche Algebra $\mathfrak{h}_n$ besitzt eine Basis $X_1, \ldots, X_n, \ X_{n+1}, \ldots, X_{2n}, X_{2n+1} = U$, wobei die einzigen nichttrivialen Kommutatorrelationen durch

$$[X_j, X_{j+n}] = U, \quad j = 1, \ldots, n,$$

gegeben sind. In exponentiellen Koordinaten

$$(x_1, \ldots, x_{2n}, u) \mapsto \exp_{\mathbb{H}_n}(x_1X_1 + \cdots + x_{2n}X_{2n} + uU)$$

ist das Produkt in $\mathbb{H}_n$ gegeben durch

$$(x,u)\cdot(x',u') = (x+x', u+u' + \frac{1}{2}\omega(x,x')),$$

wobei

$$\omega(x,x') = {}^t x \cdot J \cdot x' \ ,$$

mit $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, die kanonische symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichne. Auf $\mathbb{H}_n$ sind automorphe Dilatationen definiert durch $\delta_r(x,u) = (rx, r^2u)$.

Satz 3 (M., Ricci). *Es seien $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots 2n}$ eine reelle symmetrische Koeffizienten-matrix, sowie $b \in \mathbb{C}$. Wir setzen dann*

$$S := -AJ \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \ .$$

Der Operator

$$L = \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk} X_j X_k + i\,bU$$

auf $\mathbb{H}_n$ ist genau dann nicht lokal lösbar, wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

i) $b \in \mathbb{R}$;
ii) *S ist halbeinfach und besitzt ein rein imaginäres Spektrum, so daß sich S durch Konjugation mit einem geeigneten Element der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ in die Normalform*

$$S = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \\ \hline -\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -\lambda_n & & & \end{array}\right)$$

bringen läßt, mit „Frequenzen" $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
iii) *Es gibt keine Konstanten $C, N > 0$ so, daß*

$$|\sum_{j=1}^{n}(2k_j+1)\lambda_j \pm b| \geq C(1+k_1+\cdots+k_n)^{-N}$$

gilt für alle $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3. Für $\lambda > 0$ ist der Operator

$$L = (X_1^2 + X_3^2) - \lambda(X_2^2 + X_4^2)$$

auf $\mathbb{H}_2$ lokal lösbar genau dann, wenn es Konstanten $C, N > 0$ gibt mit

$$|\lambda - \frac{p}{q}| > Cq^{-N}$$

für alle ungeraden $p, q \in \mathbb{N}$, d.h. wenn λ weder von der Gestalt p/q mit ungeraden $p, q \in \mathbb{N}$ noch eine Liouvillesche Zahl „ungeraden Typs" ist.

Im Beweis des Theorems spielt die Shale-Weilsche *metaplektische Darstellung* der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ (genauer der metaplektischen Gruppe, einer zweifachen Überlagerung der $Sp(n, \mathbb{R})$,) eine wichtige Rolle, um die 1-parametrigen Gruppen $e^{tLU^{-1}}$, $t \in \mathbb{R}$, zu bestimmen, sowie die *Schrödinger-Darstellung* der Heisenberggruppe (vergl. [24]).

Beispielsweise wird der Sub-Laplace-Operator $-(X_1^2 + X_2^2)$ durch die Schrödinger-Darstellung in den Hermite-Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ überführt, dessen Spektrum aus allen ungeraden natürlichen Zahlen besteht. Hierüber gehen die Koeffizienten $(2k_j + 1)$ in die Bedingung iii) ein.

Zur Hörmander-Bedingung der Ordnung $r \geq 3$

Über den Fall einer nilpotenten Gruppe der Stufe ≥ 3 sowie nicht-translationsinvarianter Differentialoperatoren ist noch wenig bekannt. Es seien jedoch drei Resultate erwähnt, die sich mit Operatoren der Gestalt

$$P_b = -X_1^2 - X_2^2 + ib[X_1, X_2]$$

befassen.

Satz 4 ([21]). *Bezeichnen $X_1 = \widetilde{X}_1$ und $X_2 = \widetilde{X}_2$ die in Beispiel 1 definierten linksinvarianten Vektorfelder auf der 3-stufig nilpotenten Gruppe N_2, so ist P_b nicht lokal lösbar genau dann, wenn $b \in \{-1, +1\}$.*

Es sei daran erinnert, daß auf der Heisenberggruppe $N_1 = \mathbb{H}_1$ der entsprechende Operator P_b genau dann nicht lösbar ist, wenn $\pm b \in 2\mathbb{N} + 1$.

Der Beweis von Satz 4 beruht auf dem Studium des asymptotischen Verhaltens des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes einer gewissen Familie von Schrödinger Operatoren.

Die Beweismethode konnte jüngst ausgebaut werden, womit sich einige interessante Resulte über nicht-translationsinvariante Differentialoperatoren erzielen ließen:

Satz 5 (Christ, Karadzhov [5]). *Auf $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, t)\}$ seien Vektorfelder gegeben durch $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x^k \frac{\partial}{\partial t}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sowie eine Funktion $b \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist der Operator*

$$-X_1^2 - X_2^2 + ib(x)[X_1, X_2]$$

nicht lokal lösbar bei 0 genau dann, wenn gilt:

i) $\pm b(0) \in 2\mathbb{N} + 1$, *falls $k = 1$, bzw. $b(0) \in \{-1, +1\}$, falls $k \geq 2$,*
sowie
ii) $b^{(j)}(0) = 0$ *für alle $j \geq 1$.*

Falls die Vektorfelder X_1 und X_2 im Punkte 0 nicht linear unabhängig sind, so wird das Bild erheblich komplizierter, wie folgender Satz zeigt:

Satz 6 (Christ, Karadzhov, M. [6]). *Auf $\mathbb{R}^2 = \{(x, t)\}$ seien $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{x^k}{k!}\frac{\partial}{\partial t}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Vektorfelder aus Beispiel 1, und es sei $b \in C^\infty(\mathbb{R})$. Für jede reelle*

Konstante a setzen wir $L_a = -X_1^2 - X_2^2 + ia[X_1, X_2]$, *und definieren* Σ_k *als die Menge aller* $a \in \mathbb{R}$, *so daß* L_a *nicht lokal lösbar ist bei* 0. *Sei*

$$L := -X_1^2 - X_2^2 + ib(x)[X_1, X_2].$$

Dann gilt:

- *Die Lösbarkeit von L hängt nur von den Taylor-Koeffizienten von b bei* 0 *ab.*
- Σ_k *ist unbeschränkt und diskret.*[1)]
- *Ist* $b(0) \notin \Sigma_k$, *so ist L lokal lösbar bei* 0.
- *Zu jedem ungeraden k und jedem* $a \in \Sigma_k$ *existieren Polynome* $P_j\colon \mathbb{R}^{2j-1} \mapsto \mathbb{R}$, *so daß gilt: Ist* $b(0) = a$, *so ist L nicht lokal lösbar bei* 0 *genau dann, wenn*

$$b^{(2j)}(0) = P_j\big(b^{(1)}(0), \dots b^{(2j-1)}(0)\big) \text{ für alle } j \geq 1. \tag{4}$$

- *Ist* $k = 2$, *so ist L nicht lokal lösbar bei* 0 *genau dann, wenn* $b(0) \in \Sigma_2$ *und* $b^{(j)}(0) = 0$ *für alle* $j \geq 1$.
- *Ist* $k \geq 4$ *gerade, so gibt es zu jedem* $a \in \Sigma_k$ *Polynome* $P_j\colon \mathbb{R}^{j-1} \mapsto \mathbb{R}$ *sowie eine Menge* $E \subset \mathbb{N}$ *der Mächtigkeit* $\leq k - 2$ *so, daß für alle Koeffizienten b mit* $b(0) = a$ *gilt: L ist nicht lokal lösbar bei* 0 *genau dann, wenn* $b^{(1)}(0) = 0$ *ist und wenn für alle* $j \geq 2$ *gilt:*

$$b^{(j)}(0) = P_j\big(b^{(1)}(0), \dots b^{(j-1)}(0)\big), \qquad \text{falls } j \notin E,$$

und

$$0 = P_j\big(b^{(1)}(0), \dots b^{(j-1)}(0)\big), \qquad \text{falls } j \in E.$$

Es wäre interessant zu wissen, unter welchen Voraussetzungen die obigen Operatoren lokal lösbar sind, wenn die Funktion b nicht nur von der Variablen x abhängt, sondern auch von den restlichen Variablen.

Die obigen Ergebnisse deuten zweierlei an:

- Die lokale Nicht-Lösbarkeit eines Differentialoperators mit reellem Hauptsymbol und doppelten Charakteristiken scheint eine sehr instabile Eigenschaft zu sein, welche unter kleinsten Perturbationen aufgehoben zu werden scheint.
- Es scheint wenig Hoffnung zu geben, daß sich die lokale Lösbarkeit eines Differentialoperators dieses Typs ähnlich wie im Falle von Operatoren vom Haupttyp durch einfache, invariante Bedingung an das Symbol charakterisieren läßt.

3 Funktionalkalkül

Wir wollen hier folgende Fragestellung betrachten (welche sich leicht auf allgemeinere „sum of squares" Operatoren im Sinne von Hörmander ausdehnen läßt):

Es sei N eine stratifizierte Liesche Gruppe wie am Ende von Paragraph 1. Bezeichnet

$$\mathfrak{n} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

[1)] Für ungerades k ist $\sum_k = \{(j(k+1) \pm 1)/k : j \in 2\mathbb{Z} + 1\}$ (siehe [13]).

die zugrunde liegende Stratifizierung der Lieschen Algebra von N, und ist $X_1, \dots, X_m$ eine fest gewählte Basis von V_1, so erfüllen $X_1, \dots, X_m$ offenbar eine Hörmander-Bedingung. Die zugehörige Carnot-Carathéodory-Metrik ist links-invariant und δ_r-homogen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} d(gx, gy) &= d(x, y) \quad \text{für alle } g, x, y \in N, \\ d(\delta_r x, \delta_r y) &= r\, d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in N. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für das Haarsche Volumen der Kugel $B_r(x)$ mit Mittelpunkt x und Radius r:

$$|B_r(x)| = C\, r^Q \ ,$$

wobei

$$Q = \sum_j j \dim V_j$$

die sogenannte *homogene Dimension von N* bezeichnet, welche im allgemeinen erheblich größer als die Euklidische Dimension $d = \sum_j \dim V_j$ ist.

Der Sub-Laplace Operator

$$L = -(X_1^2 + \ldots + X_m^2)$$

ist dann hypoelliptisch und wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(N) \subset L^2(N, dx)$, wobei dx das Haarsche Maß auf N bezeichne. Sein L_2-Spektrum liegt in der positiven reellen Achse. Somit macht die in der Einleitung gestellte Frage nach dem L_p-Funktionalkalkül Sinn für den Operator L.

Für den „klassischen" Fall des Laplace-Operators $L = -\Delta$ auf dem $\mathbb{R}^d$ liefert der folgende Satz, welcher auf Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander zurückgeht, eine partielle Antwort. Dazu sei $0 \neq \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ eine in $[1,2]$ getragene, nicht negative Abschneidefunktion, und für $\alpha > 0$ sei

$$||m||_{sloc,\alpha} := \sup_{r>0} ||\chi \cdot m(r\cdot)||_{(\alpha)} \ .$$

Satz 7 (Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander). *Ist $||m||_{sloc,\alpha} < \infty$ für ein $\alpha > d/2$, so ist $m(-\Delta)$ beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 < p < \infty$ (sowie vom schwachen Typ $(1,1)$).*

Die Bedingung $\alpha > d/2$ ist scharf.

Dieser Satz ist schrittweise in Arbeiten von De Michele-Mauceri, Hulanicki-Stein, Hulanicki-Jenkins, Christ und Mauceri-Meda (siehe [4], [20]) wie folgt auf den Fall stratifizierter Gruppen verallgemeinert worden:

Satz 8. *Ist $||m||_{sloc,\alpha} < \infty$ für ein $\alpha > Q/2$, so ist $m(L)$ beschränkt auf $L^p(N, dx)$ für $1 < p < \infty$ (und vom schwachen Typ $(1,1)$).*

Ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis dieses Satzes sind Abschätzungen des Wärmeleitungskerns $p_t(x, y)$. Von den folgenden Abschätzungen vom Gauß-Typ ist inzwischen bekannt, daß sie i.w. optimal sind (vergl. [27]):

$$p_t(x,y) \leq C_\epsilon |B_{\sqrt{t}}(x)|^{-1} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4(1+\epsilon)t}} = C'_\epsilon t^{-Q/2} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4(1+\epsilon)t}}.$$

Der Wärmeleitungskern ist dabei definiert durch die Gleichung

$$e^{-tL} f(x) = \int f(y) p_t(x,y)\, dy \ .$$

Da in der obigen Abschätzung die homogene Dimension in natürlicher Weise auftaucht, schien es plausibel zu sein, daß auch in Satz 8 die Regularitätsbedingung $\alpha > Q/2$ an den Multiplikator i.w. optimal sein sollte. Dies hätte sich auch im Einklang mit einem gewissen Prinzip befunden, wonach man den Begriff der Dimension durch den der homogenen Dimension ersetzen sollte, um Sätze vom $\mathbb{R}^d$ auf den Fall stratifizierter Gruppen zu übertragen. Dieses hatte sich in anderen Fragen zur Analysis auf solchen Gruppen stets als gültig erwiesen. Daher kam das folgende Ergebnis, welches unabhängig von E. M. Stein und mir sowie von W. Hebisch bewiesen wurde, ein wenig überraschend:

Satz 9 ([25], [15]). *Für den Sub-Laplace Operator auf der Heisenberggruppe $\mathbb{H}_n$ bleibt die Aussage in Satz 8 auch unter der schwächeren Bedingung $\alpha > d/2$ anstelle von $\alpha > Q/2$ gültig.*

Bis heute ist nicht bekannt, ob sich für beliebige Gruppen N die Bedingung $\alpha > Q/2$ durch $\alpha > d/2$ ersetzen läßt.

Nilpotente Liesche Gruppen besitzen „polynomiales" Volumenwachstum. Über Gruppen bzw. Mannigfaltigkeiten mit „exponentiellem" Volumenwachstum ist noch relativ wenig bekannt. Im allgemeinen werden L_p-Spektralmultiplikatoren für den Laplace-Beltrami-Operator einer solchen Mannigfaltigkeit im Falle $p \neq 2$ notwendigerweise reell-analytisch sein (vergl. z.B. [8], [3], [7]), so daß insbesondere kein Analogon zu Satz 7 gelten wird. Erstaunlicherweise sind dennoch einige Beispiele von Gruppen mit exponentiellem Wachstum bekannt, welche nicht-analytische L_p-Multiplikatoren zulassen (siehe z.B. [9]). Es wäre interessant zu verstehen, worin sich diese Beispiele geometrisch von denjenigen, wie z.B. den Riemannschen symmetrischen Räumen nicht-kompakten Typs, unterscheiden, bei denen die Spektralmultiplikatoren für $p \neq 2$ analytisch sein müssen. Der Unterschied scheint jedenfalls nicht in Krümmungseigenschaften auszumachen zu sein (vergl. [7]).

Literatur

[1] L. Boutet de Monvel, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, *Com. Pure and Appl. Math.* **27** (1974), 585–639.

[2] C. Carathéodory, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik, *Math. Ann.* **67** (1909), 355–386.

[3] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor, Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 15–53.

[4] M. Christ, L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **328 no.1** (1991), 73–81.

[5] M. Christ and G.E. Karadzhov, Local solvability for a class of partial differential operators with double characteristics, *preprint.*

[6] M. Christ, G.E. Karadzhov and D. Müller, Infinite dimensional families of locally nonsolvable partial differential operators, erscheint *Math. Research Letters.*

[7] M. Christ and D. Müller, On L^p spectral multipliers for a solvable Lie group, erscheint *Geom. and Funct. Analysis.*

[8] J.L. Clerc and E.M. Stein, L^p - multipliers for non-compact symmetric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **71** (1974), 3911–3912.

[9] M. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki and G. Mauceri, Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth, *Studia Math.* **112** (1994), 103–121.

[10] C. Fefferman and S. Sanchez-Calle, Fundamental solutions for second order subelliptic operators, *Ann. Math.* **124** (1986), 247–272.

[11] G.B. Folland and E.M. Stein, Hardy spaces on homogeneous groups, *Princeton Univ. Press, N.J.* (1982).

[12] G.B. Folland and E.M. Stein, Estimates for the $\overline{\partial_b}$ complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), 429–522.

[13] A. Gilioli and F. Treves, An example in the solvability theory of linear pde's, *Amer. J. of Math.* **96** (1974), 366–384.

[14] V. Grushin, On a class of hypoelliptic operators, *Mat. Sbornik* **83** (1970), 456–473; *Math. USSR Sbornik* **12** (1970), 458–476.

[15] W. Hebisch, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, *Colloquium Math.* **LXV** (1993), 231–239.

[16] B. Helffer and J. Nourrigat, Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué, *Comm. in Partial Diff. Eq.* **4** (1979), 899–958.

[17] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I–IV, *Springer Grundlehren* (1983–1985).

[18] L. Hörmander, Hypoelliptic second-order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147–171.

[19] J. Kohn, Harmonic integrals on strongly pseudo convex manifolds I, *Ann. of Math.* **78** (1963), 112–147.

[20] G. Mauceri and S. Meda, Vector–valued multipliers on stratified groups, *Revista Mat. Iberoamer.* **6** (1990), 141–154.

[21] D. Müller, Another example in the solvability theory of PDO's with double characteristics, *Comm. in Partial Diff. Eq.* **20** (1995), 2165–2186.

[22] D. Müller and F. Ricci, Solvability for a class of doubly characteristic differential operators on 2-step nilpotent groups, *Ann. of Math.* **143** (1996), 1–49.

[23] D. Müller and F. Ricci, Solvability for a class of non-homogeneous differential operators on two-step nilpotent groups, *Math. Ann.* **304** (1996), 517–547.

[24] D. Müller and F. Ricci, Solvability of second-order PDO's on nilpotent groups - a survey of recent results, *Journal of Geom. Anal.* **3** (1993), 599–619.

[25] D. Müller and E.M. Stein, On spectral multipliers for Heisenberg and related groups, *J. Math. Pure Appl.* **73** (1994), 413–440.

[26] L.P. Rothschild and E.M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.* **137** (1976), 247–320.

[27] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste and Th. Coulhon, Analysis and geometry on groups, *Cambridge Univ. Press* (1992).

Detlef Müller
Mathematisches Seminar
C.A.-Universität Kiel
Ludewig-Meyn-Str. 4
D-24098 Kiel

(*Eingegangen 10. 12. 1997*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
99 (1997) 164–180
Mathematics Subject Classification: 14H60, 14M15, 15A75, 53C07

Analogien zwischen den Modulräumen von Vektorbündeln und von Flaggen

M. Rapoport, Köln

In diesem Vortrag*) möchte ich auf Analogien zwischen zwei Objekten hinweisen, die beide zum klassischen Arsenal der Mathematik gehören. Es sind dies die Vektorbündel auf einer Riemannschen Fläche einerseits und die **Z**-filtrierten Vektorräume andererseits. Auf diese Analogien hat meines Wissens als erster Faltings hingewiesen.**) Faltings und Totaro haben diese Analogie benutzt, um Sätze, die in der Theorie der Vektorbündel bekannt waren, auf filtrierte Vektorräume zu übertragen.

Man kann etwas Entsprechendes für die *Modulräume* dieser Objekte machen. Die Modulräume von Vektorbündeln sind seit langer Zeit Gegenstand intensiver Forschung. Seit ihre Existenz gesichert ist, interessiert man sich vor allem für die singuläre Kohomologie dieser Varietäten und die Kohomologie von kohärenten Garben auf ihnen. Die Modulräume der **Z**-filtrierten Vektorräume sind einfach die Flaggenvarietäten, für die die entsprechenden Probleme äußerst einfache Antworten besitzen. Interessanter wird es, wenn man diese Fragen für die durch eine *Semistabilitätsbedingung* definierten offenen Teilmengen stellt. Es stellt sich heraus, daß diese offenen Teilmengen (die *Periodenbereiche* im Sinne von [Ra2]) ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Modulräume von Vektorbündeln. Dies will ich hier am Beispiel der Bestimmung der singulären Kohomologie dieser beiden Arten von Modulräumen demonstrieren. Die Bestimmung der entsprechenden Poincarépolynome erweist sich als eine im wesentlichen kombinatorische Aufgabe, nämlich die Inversion einer implizit gegebenen Rekursionsformel. Erstaunlich ist, daß – wie Kottwitz bemerkt hat – beide Inversionen mit dem Langlandslemma aus der Theorie der Eisensteinschen Reihen gelöst werden können (obgleich erwähnt werden sollte, daß die Rekursionsformel im Vektorbündelfall bereits zuvor von Zagier mit völlig elementaren Mitteln invertiert wurde).

---

*) Der vorliegende Text gibt den Inhalt eines Hauptvortrags auf der DMV-Tagung 1995 in Ulm wieder.

) In Vorträgen um 1989/90. Der eigentliche Ursprung dieser Entdeckung von Faltings ist anscheinend die in den letzten Jahren deutlich gewordene Ähnlichkeit zwischen den Vektorbündeln auf einer Riemannschen Fläche und den von gewissen p-adischen Kohomologietheorien zu algebraischen Varietäten über p-adischen Körpern assoziierten *gefilterten Isokristallen.* Man kann die Theorie der **Z-filtrierten Vektorräume als eine in gewissem Sinne linearisierte Version letzterer Objekte betrachten.

Der nachfolgende Text ist kein Übersichtsartikel. (Für eine Übersicht über die Modulräume von Vektorbündeln siehe [MFK]; für **Z**-filtrierte Vektorräume siehe [Ra2].) Vielmehr lade ich den Leser zu einem Streifzug durch einige schöne Gebiete der Mathematik ein. Dabei hoffe ich durch die Konzentration auf ein kombinatorisches Problem den Unterhaltungswert dieses Spaziergangs nicht völlig vernachlässigt zu haben. Im übrigen habe ich mich bemüht, mir interessant scheinende Fragen zu formulieren und so vielleicht auch dem Spezialisten die eine oder andere Anregung zu geben. Allerdings ist anzumerken, daß der tiefere Grund für die hier dargestellten Analogien ganz im Verborgenen bleibt. Insgesamt zeigt vielleicht dieser Vortrag ein wenig vom inneren Zusammenhang der Mathematik als Ganzes, der sicherlich einen Wesenszug ihres ästhetischen Reizes darstellt.

Zur Einteilung des Textes: In den ersten beiden Abschnitten führe ich die beiden Modulräume ein. In den beiden folgenden Abschnitten geht es um die Kohomologie dieser Modulräume. Im letzten Abschnitt wird die Analogie zwischen den beiden betrachteten Objekten noch vertieft.

Ich danke U. Jannsen, K. Lamotke, U. Stuhler und Th. Zink für ihre hilfreichen Kommentare über eine erste Version dieses Artikels.

1 Der Modulraum von Vektorbündeln auf Riemannschen Flächen

Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Das Klassifikationsproblem holomorpher Vektorbündel auf X (= lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln) wird sehr einfach, wenn wir sie bis auf topologische oder C^∞-Äquivalenz klassifizieren: zwei Vektorbündel sind C^∞-äquivalent, falls sie denselben Rang und denselben Grad haben. Für die Klassifikation bis auf Isomorphie fixieren wir daher diese diskreten Invarianten. Wir betrachten holomorphe Vektorbündel $\mathcal{E}$ mit festem Rang $\operatorname{rg}\mathcal{E} = n \geq 1$ und festem Grad $\deg \mathcal{E} = d$.

Der Fall des Rangs 1 (Klassifikation der Geradenbündel) wurde bereits im vergangenen Jahrhundert gelöst. Das Ergebnis kann wie folgt zusammengefaßt werden. Falls $X = \mathbf{P}^1$, d.h. $g = 0$, so gibt es bis auf Isomorphie genau ein Geradenbündel von gegebenem Grad $d \in \mathbf{Z}$. Es wird üblicherweise mit $\mathcal{O}(d)$ bezeichnet. Falls $g > 0$, so bilden die Isomorphieklassen von Geradenbündeln vom Grad d einen Modulraum, der eine algebraische Varietät ist. Diese algebraische Varietät ist ein prinzipal-homogener Raum unter einer abelschen Varietät der Dimension g.

Wir wenden uns jetzt dem Fall höheren Ranges zu. Betrachten wir zunächst wieder den Fall der projektiven Geraden. Die folgende Tatsache geht auf Birkhoff und Grothendieck zurück. Beweise finden sich an vielen Stellen, z.B. [OSS].

Proposition 1.1. *Es sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang n und Grad d auf* $\mathbf{P}^1$. *Dann ist $\mathcal{E}$ zu genau einem Vektorbündel der Form*

$$\mathcal{O}(\underline{d}) = \mathcal{O}(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(d_n)$$

isomorph, wobei

$$\underline{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbf{Z}^n \quad mit\ d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \ und \ \sum_{i=1}^{n} d_i = d \quad .$$

Diese Proposition löst das Klassifikationsproblem für $X = \mathbf{P}^1$. Bevor wir das nächste Ergebnis über Vektorbündel auf $\mathbf{P}^1$ formulieren, führen wir noch folgenden Begriff ein. *Eine Familie von Vektorbündeln auf X parametrisiert durch die algebraische Varietät S* ist ein algebraisches Vektorbündel $\mathcal{E}$ auf $X \times S$. Die Vorstellung ist dabei, daß sich die Vektorbündel

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times S}} \kappa(s) \quad , \quad s \in S \quad ,$$

(die wir als holomorphe Vektorbündel auf X ansehen können) zu einer Familie organisieren. Wir sagen, daß sich *ein Vektorbündel $\mathcal{E}$ auf X in ein anderes $\mathcal{E}'$ auf X spezialisiert,* falls es eine Familie von Vektorbündeln parametrisiert durch eine irreduzible algebraische Varietät S gibt, deren Faser in einem geometrischen allgemeinen Punkt von S isomorph zu $\mathcal{E}$ ist und deren Faser in einem speziellen Punkt $s \in S$ isomorph zu $\mathcal{E}'$ ist.

Proposition 1.2. *Es seien $\mathcal{O}(\underline{d})$ und $\mathcal{O}(\underline{d}')$ zwei holomorphe Vektorbündel vom Rang n und Grad d auf* $\mathbf{P}^1$. *Falls sich $\mathcal{O}(\underline{d})$ in $\mathcal{O}(\underline{d}')$ spezialisiert, so ist $\underline{d} \leq \underline{d}'$. Die Umkehrung gilt auch.*

Hierbei sei ganz allgemein auf der Menge

$$(\mathbf{Q}^n)_+ = \{\underline{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbf{Q}^n \ ; \quad d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n\}$$

die folgende Halbordnung definiert: $\underline{d} \leq \underline{d}'$ gdw.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{p} d_i \leq \sum\nolimits_{i=1}^{p} d_i' \quad , \quad p = 1, \ldots, n-1$$

und

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} d_i = \sum\nolimits_{i=1}^{n} d_i' \quad .$$

Die Implikation der ersten Aussage ist ein Spezialfall einer allgemeinen Tatsache über das Harder-Narasimhan-Polygon, vgl. (1.8) weiter unten. Die Umkehrung scheint dagegen eine Art Zufall zu sein, die vielleicht nur für Vektorbündel auf $\mathbf{P}^1$ richtig ist, vgl. auch die Bemerkungen nach (2.5). Sie stammt von Ramanathan [R2], und zwar in der folgenden verschärften Form.

Ein Vektorbündel vom Rang n auf $\mathbf{P}^1$ ist bis auf Isomorphie beschrieben durch seine Einschränkung auf $\mathbf{P}^1 \backslash \{0\}$, seine Einschränkung auf eine kleine offene Kreisscheibe Δ um den Ursprung und durch die Verklebungsmatrix, die die beiden Einschränkungen über $\Delta \backslash \{0\}$ verbindet. Weil jedes Vektorbündel auf $\mathbf{A}^1$ und auf Δ trivial ist, können wir daher die Menge der Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang n identifizieren mit der Menge der Doppelnebenklassen

$$GL_n(\mathbf{C}[z^{-1}]) \backslash GL_n(\mathbf{C}((z))) / GL_n(\mathbf{C}[[z]]) \quad .$$

Dabei entspricht das Vektorbündel $\mathcal{O}(\underline{d}) = \mathcal{O}(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(d_n)$ der Doppelnebenklasse von $z^{\underline{d}} = \mathrm{diag}(z^{d_1}, \ldots, z^{d_n})$.

Sei $t \neq 0$ ein zusätzlicher komplexer Parameter. Wir haben folgende Matrixidentität,

$$\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t^{-1} & t^{-1}z^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^{d_1} & 0 \\ 0 & z^{d_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ -t^{-1} \cdot z^{d_1 - d_2 + 1} & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{d_1 + 1} & -t^2 \cdot z^{d_2} \\ 0 & z^{d_2 - 1} \end{pmatrix} \ .$$

Die Doppelnebenklasse der Matrix auf der rechten Seite definiert somit eine Familie von Vektorbündeln auf $\mathbf{P}^1$, die für alle $t \neq 0$ zu $\mathcal{O}(d_1) \oplus \mathcal{O}(d_2)$ isomorph ist, aber für $t = 0$ zu $\mathcal{O}(d_1 + 1) \oplus \mathcal{O}(d_2 - 1)$ isomorph ist. Somit spezialisiert sich $\mathcal{O}(d_1) \oplus \mathcal{O}(d_2)$ in $\mathcal{O}(d_1 + 1) \oplus \mathcal{O}(d_2 - 1)$. Daraus folgt leicht die Behauptung im Falle $n = 2$, und der allgemeine Fall kann darauf zurückgeführt werden.

Bemerkung 1.3. Dieser Beweis, der einfacher ist als der Originalbeweis, ist inspiriert vom Beweis der Adhärenzrelation der Schubertzellen auf der Grassmannschen zur Schleifengruppe zur GL_n ([BL], [PS]). Kurioserweise ist die Adhärenzrelation hier gerade entgegengesetzt: für $\underline{d}, \underline{d}' \in (\mathbf{Z}^n)_+$ liegt der Punkt $z^{\underline{d}'}$ von $GL_r(\mathbf{C}((z)))/GL_r(\mathbf{C}[[z]])$ genau dann im Abschluß der Bahn unter der Operation (von links) von $GL_r(\mathbf{C}[[z]])$ des Punktes $z^{\underline{d}}$, wenn gilt $\underline{d} \geq \underline{d}'$.

Die für den Beweis von Proposition 1.2 verwendete Familie von Vektorbündeln zeigt, daß es keinen Hausdorff'schen Modulraum von Vektorbündeln höheren Ranges über einer Riemannschen Fläche geben kann. In der Tat, sonst würde aus der Tatsache, daß die Vektorbündel $\mathcal{E} \otimes \kappa(t)$ für $t \neq 0$ alle isomorph zu einem festen Vektorbündel $\mathcal{E}_0$ sind, auch $\mathcal{E} \otimes \kappa(0) \cong \mathcal{E}_0$ folgen. Eine genauere Untersuchung dieser Sprungphänomene zeigt, daß ihre tiefere Ursache in der Existenz von Vektorbündeln liegt, deren Endomorphismenalgebra die Skalarmenge $\mathbf{C}$ echt umfaßt. Es gibt zwei Methoden, um dieser Schwierigkeit zu begegnen.

Erste Methode (Mumford): Diese Methode eliminiert die Vektorbündel mit zu vielen Endomorphismen. Sei $\mathcal{E} \neq (0)$ ein Vektorbündel auf X. Der *Anstieg von* $\mathcal{E}$ ist die rationale Zahl

$$\mu(\mathcal{E}) = \deg \mathcal{E} / \operatorname{rg} \mathcal{E} \quad .$$

Definition 1.4. *Das Vektorbündel $\mathcal{E} \neq (0)$ auf X heißt* stabil, *falls für alle Untervektorbündel $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}$ (= $\mathcal{O}_X$-Untermoduln $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ mit torsionsfreiem Quotienten) gilt:*

$$(0) \neq \mathcal{F} \neq \mathcal{E} \Longrightarrow \mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}) \quad .$$

Das Vektorbündel $\mathcal{E}$ heißt semistabil, *falls die Gleichheit zugelassen ist.*

Man kann zeigen, daß ein stabiles Vektorbündel nur skalare Endomorphismen gestattet. Ein beliebiges Vektorbündel kann als sukzessive Erweiterung von semistabilen Vektorbündeln geschrieben werden, und dies in kanonischer Weise, [G, HN, Sh]:

Proposition 1.5. *Sei $\mathcal{E} \neq (0)$ ein beliebiges Vektorbündel vom Rang n auf X. Dann existiert genau eine Folge von Untervektorbündeln*

$$(0) = \mathcal{E}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{E}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{E}_2 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathcal{E}_r = \mathcal{E} \quad ,$$

so daß folgendes gilt:

(i) *$\mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}$ ist semistabil, $i = 1, \ldots, r$.*
(ii) *$\mu(\mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}) > \mu(\mathcal{E}_{i+1} / \mathcal{E}_i)$, $i = 1, \ldots, r-1$.*

Diese Filtration heißt die *Harder-Narasimhan-Filtration* von $\mathcal{E}$ (HN-*Filtration*). Es wäre übrigens eigentlich zweckmäßiger, die Sprünge $\mathcal{E}_i$ in der HN-Filtration durch den Anstieg $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ zu numerieren. Dann wird die HN-Filtration kompatibel mit dem Tensorprodukt und der Bildung des dualen Vektorbündels und auch mit jedem Homomorphismus von Vektorbündeln. Wir assoziieren zu $\mathcal{E}$ den *Anstiegsvektor* (oder HN-*Vektor*) in $\mathbf{Q}^n$,

$$\underline{\mu}(\mathcal{E}) = (\mu(\mathcal{E}_1), \ldots, \mu(\mathcal{E}_1), \mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1), \ldots, \mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1), \ldots, \mu(\mathcal{E}_r/\mathcal{E}_{r-1})) \quad .$$

Dabei ist die Multiplizität von $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ gleich $\operatorname{rg}(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$. Offenbar gilt

$$\underline{\mu}(\mathcal{E}) \in (\mathbf{Q}^n)_+ \quad .$$

Weiter gilt, falls $n = \operatorname{rg} \mathcal{E}$, $d = \deg \mathcal{E}$:

(i) $\operatorname{sum}(\underline{\mu}(\mathcal{E})) = d$. Dabei sei $\operatorname{sum}((\mu_1, \ldots, \mu_n)) = \sum \mu_i$.

(ii) Die Anzahl der verschiedenen Einträge von $\underline{\mu}(\mathcal{E})$ ist gleich der Anzahl der Sprungstellen in der HN-Filtration von $\mathcal{E}$.

(iii) $\mathcal{E}$ ist semistabil gdw. $\underline{\mu}(\mathcal{E}) = \underline{\mu}_0$. Dabei ist $\underline{\mu}_0 = (d/n, \ldots, d/n)$.

Kehren wir zum Ausgangsproblem der Konstruktion eines Modulraums der Vektorbündel zurück. Das fundamentale Ergebnis für die Methode von Mumford ist das folgende Theorem, das auf Seshadri [S1] zurückgeht, vgl. auch [N].

Satz 1.6. (i) *Es existiert eine quasiprojektive singularitätenfreie algebraische Varietät $M_X(n,d)^s$, die ein Modulraum der stabilen Vektorbündel vom Rang n und Grad d auf X ist.*

(ii) *Dieser hat als natürlichen projektiven Abschluß den Raum $M_X(n,d)^{ss}$, der die Äquivalenzklassen (nach einer gewissen Äquivalenzrelation, der Jordan-Hölder-Äquivalenz) von semistabilen Vektorbündeln vom Rang n und Grad d parametrisiert.*

Falls der g.g.T. $(n,d) = 1$, so ist offenbar ein semistabiles Vektorbündel vom Rang n und Grad d automatisch stabil, d.h. $M_X(n,d)^s = M_X(n,d)^{ss}$ ist projektiv und singularitätenfrei. Der so erhaltene Modulraum ist in vielerlei Hinsicht untersucht worden, z.B. seine singuläre Kohomologie, oder die Kohomologie kohärenter Garben auf ihm. Wir wollen uns im 3. Abschnitt mit folgendem Problem beschäftigen.

Problem 1.7. *Sei* g.g.T. $(n,d) = 1$. *Bestimme die Bettizahlen von $M_X(n,d)^s$.*

Zweite Methode (Atiyah/Bott, Bifet/Ghione/Letizia): Diese Methode eliminiert unerwünschte Endomorphismen durch Zusatzstrukturen auf den Vektorbündeln. Dabei werden *alle* Vektorbündel miterfaßt. Der dafür zu zahlende Preis ist, daß man auf diese Weise Modulräume erhält, die nicht mehr algebraische Varietäten sind. Diese Methode existiert in einer algebraisch-geometrischen und in einer differentialgeometrischen Variante. Wir skizzieren zunächst kurz die algebraisch-geometrische Variante [BGL]. Man betrachtet Paare $(\mathcal{E}, \iota)$, wobei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Vektorbündel ist und ι eine *rationale Trivialisierung.* Für den letzten Begriff betrachte man $\mathcal{E}$ als algebraisches Vektorbündel auf der X zugrundeliegenden projektiven algebraischen Kurve, deren allgemeinen Punkt wir mit $\eta = \operatorname{Spec} \mathbf{C}(X)$ bezeichnen. Dann ist ι ein Isomorphismus von $\mathbf{C}(X)$-Vektorräumen,

$$\iota : \mathcal{E}_\eta \simeq \mathbf{C}(X)^n \quad .$$

Man zeigt, daß es eine Ind-Varietät $\mathcal{D}_X(n,d)$ gibt (aufsteigende Vereinigung von projektiven algebraischen Varietäten), die die Paare $(\mathcal{E},\iota)$ parametrisiert, wobei $\operatorname{rg}\mathcal{E}=n$ und $\deg\mathcal{E}=d$. Auf dieser Ind-Varietät operiert die *Eichgruppe* $GL_n(\mathbf{C}(X))$, die als Gruppenobjekt in der Kategorie der Ind-Varietäten aufgefaßt werden kann. Indem wir jedem Paar $(\mathcal{E},\iota)$ den HN-Vektor von $\mathcal{E}$ zuordnen, erhalten wir eine disjunkte Zerlegung (die HN-*Stratifizierung*)

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}_X(n,d)=\dot{\bigcup}_{\underline{\mu}}\mathcal{D}_{\underline{\mu}} \quad .$$

Die einzelnen Strata sind dabei lokal abgeschlossene Unter-Ind-Varietäten von endlicher Codimension, die invariant unter der Operation der Eichgruppe sind. Das einzige offene Stratum ist der semistabile Ort,

$$\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}=\mathcal{D}_{\underline{\mu}_0} \quad .$$

Es gilt, in Verallgemeinerung der ersten Aussage von Proposition 1.2, über den Abschluß eines Stratums der HN-Stratifizierung folgender Sachverhalt, der auf Shatz [Sh] zurückgeht:

$$(1.8)\qquad \overline{\mathcal{D}}_{\underline{\mu}}\subset\bigcup_{\underline{\mu}\le\underline{\mu}'}\mathcal{D}_{\underline{\mu}'} \quad .$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden hier dargestellten Methoden wird durch die Aussage gegeben, daß falls g.g.T. $(n,d)=1$, die projektive Eichgruppe $GL_n(\mathbf{C}(X))/\mathbf{C}^\times$ frei auf $\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}$ operiert und daß wir den Quotienten nach dieser Operation mit $M_X(n,d)^{ss}$ identifizieren können (Vergessen der rationalen Trivialisierung ι),

$$(1.9)\qquad M_X(n,d)^{ss}=\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}/GL_n(\mathbf{C}(X)) \quad .$$

Bei der differentialgeometrischen Variante [AB] fixiert man ein C^∞-Vektorbündel vom Rang n und Grad d auf X und betrachtet dann den Raum $\mathcal{C}=\mathcal{C}_X(n,d)$ der komplexen Strukturen auf ihm. Auf diesem Raum operiert die Eichgruppe $\mathcal{G}$ (die Gruppe der C^∞-Automorphismen des fixierten C^∞-Vektorbündels). Die HN-Stratifizierung

$$\mathcal{C}=\bigcup_{\underline{\mu}}\mathcal{C}_{\underline{\mu}}$$

ist $\mathcal{G}$-invariant und für sie gelten ganz ähnliche Aussagen wie für $\mathcal{D}$. Falls g.g.T. $(n,d)=1$, operiert die projektive Eichgruppe $\mathcal{G}/\mathbf{C}^\times$ frei auf $\mathcal{C}^{ss}$, und es gilt wieder analog zu (1.9),

$$M_X(n,d)^{ss}=\mathcal{C}_X(n,d)^{ss}/\mathcal{G} \quad .$$

In dieser Methode ist $\mathcal{C}$ eine unendlich-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Sie ist übrigens isomorph zum unendlich-dimensionalen affinen Raum; erst durch die Operation der Eichgruppe wird sie zu einem interessanten Objekt.

Bemerkung 1.10. Eine dritte Variante wäre, direkt den *stack* der Vektorbündel vom Rang n und Grad d zu betrachten [LM]. Diese Variante ist leider nicht in der Literatur ausgearbeitet.

Die Theorie von Mumford und die von Atiyah/Bott können auf G-Bündel auf einer Riemannschen Fläche verallgemeinert werden. Allerdings erhält man für einfache Liegruppen G mit Liealgebra $\neq sl_n(\mathbf{C})$ nie projektive Modulräume [R1]. Bei der Verallgemeinerung auf G-Bündel spielt der Vergleich zwischen der *internen* Charakterisierung von semistabilen G-Bündeln (in Termen von G und seinen parabolischen Untergruppen) und der *externen* Charakterisierung (in Termen der Vektorbündel, die zu G-Darstellungen assoziiert sind) eine entscheidende Rolle. Ein wichtiges Ingredienz dieses Vergleichs ist der Tensorproduktsatz, vgl. Satz 5.1 weiter unten. Leider behandelt die Arbeit [BGL] nicht die Verallgemeinerung auf G-Bündel.

2 Gewichtete Filtrierungen von Vektorräumen

Als nächstes wollen wir die Objekte einführen, die zu Flaggenmannigfaltigkeiten als Modulräumen führen.

Definition 2.1. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper k. Sei K eine Körpererweiterung von k. Eine* $\mathbf{Z}$-Filtration auf *$V \otimes_k K$ ist eine monoton fallende Abbildung*

$$\lambda : \mathbf{Z} \longrightarrow \{\textit{Unterräume von } V \otimes_k K\} \ , \ \alpha \mapsto V_\lambda^\alpha$$

mit

$$V_\lambda^\alpha = (0) \textit{ für } \alpha >> 0 \ , \quad V_\lambda^\alpha = V \otimes_k K \textit{ für } \alpha << 0 \ .$$

Für eine $\mathbf{Z}$-Filtration λ definieren wir, in Analogie zur Situation im ersten Abschnitt

$$\begin{aligned} \deg_\lambda(V) &= \sum\nolimits_\alpha \alpha \cdot \dim V_\lambda^\alpha / V_\lambda^{\alpha+1} \\ \mathrm{rg}_\lambda(V) &= \dim V \\ \mu_\lambda(V) &= \deg_\lambda(V)/\mathrm{rg}_\lambda(V) \quad , \quad V \neq (0) \ . \end{aligned}$$

Die Definition des Grades kann man wie folgt motivieren. Die höchste äußere Potenz $\Lambda^{\max} V$ ist ein $\mathbf{Z}$-filtrierter eindimensionaler Vektorraum. Sein Grad ist gerade der Index α_0 der einzigen Sprungstelle der Filtration,

$$(\Lambda^{\max} V)_\lambda^{\alpha_0} = \Lambda^{\max} V \ , \ (\Lambda^{\max} V)_\lambda^{\alpha_0+1} = (0) \ .$$

Andererseits gilt, in Analogie zum Fall der Vektorbündel,

$$\deg_\lambda(V) = \deg_\lambda(\Lambda^{\max} V) \ .$$

Falls $V' \subset V$ ein k-Unterraum ist, sei $\lambda | V'$ die induzierte Filtration, $V'^\alpha_\lambda = (V' \otimes_k K) \cap V_\lambda^\alpha$.

Definition 2.2. *Sei K/k fest. Ein $\mathbf{Z}$-filtrierter Vektorraum (V, λ) heißt* semistabil, *falls für alle Unterräume $V' \neq (0)$ von V gilt*

$$\mu_\lambda(V') \leq \mu_\lambda(V) \ .$$

Ein Großteil der Theorie der semistabilen Vektorbündel überträgt sich auf die hier betrachteten Objekte. Zum Beispiel besitzt ein **Z**-filtrierter Vektorraum (V, λ) eine HN-Filtration durch k-Unterräume

$$(0) = V_0 \underset{\neq}{\subset} V_1 \underset{\neq}{\subset} V_2 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} V_r = V \quad ,$$

die durch die Eigenschaften (i) und (ii) in der Proposition 1.5 charakterisiert ist. Dabei sind die Faktorräume $(V_i/V_{i-1}) \otimes_k K$ mit der induzierten Filtration versehen.

Wir wollen jetzt die Analoga zu den Modulräumen $M_X(n,d)^s$ des ersten Abschnitts einführen. Wir fixieren den Grundkörper k und einen k-Vektorraum V der Dimension n. Sei

$$\underline{n} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

eine Funktion mit $\|\underline{n}\| := \sum_i \underline{n}(i) = n$. Sei $\{\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_s\}$ der Träger von $\underline{n}$ und seien $n_1, \ldots, n_s$ die Werte von $\underline{n}$ in diesen Punkten. Wir betrachten **Z**-Filtrationen λ von $V \otimes_k K$ mit

$$\dim V_\lambda^{\alpha_i} / V_\lambda^{\alpha_i + 1} = n_i \quad , \quad i = 1, \ldots, s \quad .$$

Diese bilden in offensichtlicher Weise die K-wertigen Punkte der Varietät aller Flaggen von V, die durch Unterräume der Dimensionen $n_1, n_1 + n_2, \ldots$ gebildet werden. Wir bezeichnen diese (verallgemeinerte) Flaggenvarietät mit

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(V, \underline{n}) = \mathcal{F}(V; \alpha_1, \ldots, \alpha_s; n_1, \ldots, n_s) \quad .$$

Sie ist das Analogon zur Ind-Varietät $\mathcal{D}_X(n,d)$ bzw. zur C^∞-Varietät $\mathcal{C}_X(n,d)$, die wir im ersten Abschnitt kennengelernt haben. Für jede Körpererweiterung K von k erhalten wir wieder eine HN-Stratifizierung der K-wertigen Punkte von $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}(K) = \bigcup_{\underline{\mu}} \mathcal{F}(K)_{\underline{\mu}} \quad .$$

Dabei durchläuft die Indexmenge alle r-Tupel von Funktionen $\underline{\mu} = (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$ (für variables r), wobei

$$\underline{n}_i : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad , \quad i = 1, \ldots, r$$

mit $\sum \underline{n}_i = \underline{n}$ und so daß $\|\underline{n}_i\| > 0$. Schließlich ist gefordert, daß

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{\sum x \cdot \underline{n}_i(x)}{\|\underline{n}_i\|} > \frac{\sum x \cdot \underline{n}_{i+1}(x)}{\|\underline{n}_{i+1}\|} \quad , \quad i = 1, \ldots, r-1 \quad .$$

Das semistabile Stratum ist gleich $\mathcal{F}(K)^{ss} = \mathcal{F}(K)_{\underline{\mu}_0}$, wobei $\underline{\mu}_0 = (\underline{n})$.

Die HN-Stratifizierung von $\mathcal{F}$ ist für einen allgemeinen Grundkörper k nicht algebraisch, weil die Anstiege von sämtlichen k-Unterräumen von V berechnet werden müssen. Falls jedoch k ein endlicher Körper ist, wie wir im weiteren annehmen wollen, so gibt es nur endlich viele solche Unterräume, und dann ist $\mathcal{F}(K)_{\underline{\mu}}$ die Menge der K-wertigen Punkte einer lokal abgeschlossenen Untervarietät $\mathcal{F}_{\underline{\mu}}$ von $\mathcal{F}$. Das einzige offene Stratum ist der semistabile Ort $\mathcal{F}^{ss} = \mathcal{F}_{\underline{\mu}_0}$ und es gilt, in Analogie zu (1.8),

$$(2.4) \qquad \overline{\mathcal{F}_{\underline{\mu}}} \subset \bigcup_{\underline{\mu}'} \mathcal{F}_{\underline{\mu}'} \quad .$$

Dabei durchläuft $\underline{\mu}'$ diejenigen Indizes, für die gilt

$$\operatorname{slope}(\underline{\mu}) \leq \operatorname{slope}(\underline{\mu}') \quad .$$

Hierbei ist $\operatorname{slope}(\underline{\mu}) = (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbf{Q}^n)_+$ für $\underline{\mu} = (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} y_1 = \ldots = y_{\|\underline{n}_1\|} & = & (\sum x \cdot \underline{n}_1(x))/\|\underline{n}_1\| \\ y_{\|\underline{n}_1\|+1} = \ldots = y_{\|\underline{n}_1\|+\|\underline{n}_2\|} & = & (\sum x \cdot \underline{n}_2(x))/\|\underline{n}_2\| \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\|\underline{n}_1\|+\ldots+\|\underline{n}_{r-1}\|+1} = \ldots = y_n & = & (\sum x \cdot n_r(x))/\|\underline{n}_r\| \end{array}$$

Die einzelnen Strata sind invariant unter $GL(V,k)$, dem Analogon der Eichgruppe, die wir im ersten Abschnitt kennengelernt haben.

Es ist ganz amüsant und lehrreich und, im Gegensatz zu der Situation im §1 auch relativ einfach, Beispiele für semistabile Orte zu berechnen.

Beispiele 2.5. a) Sei $\underline{n}$ mit $n_1 = 1$ und $n_2 = n - 1$. In diesem Fall ist $\mathcal{F} = \mathbf{P}(V)$ der projektive Raum aller Geraden in V. Man rechnet leicht nach, daß

$$\mathcal{F}^{ss} = \Omega(V) = \{x \in \mathbf{P}(V) \ ; \ x \text{ in keiner } k\text{-rationalen Hyperebene von } V \text{ enthalten}\} \quad .$$

Dieser Raum heißt der *Drinfeld'sche Halbraum der Dimension* $n - 1$, vgl. [Dr]. In diesem Fall werden die HN-Strata durch die Zahlen $1, \ldots, n$ aufgezählt: eine Gerade x liegt im i-ten Stratum gdw. der kleinste k-rationale Unterraum von V, der x enthält, die Dimension i hat.

b) Sei $n = 3$ und $\underline{n}$ mit $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. In diesem Fall ist $\mathcal{F}$ die Varietät der vollständigen Flaggen eines 3-dimensionalen Vektorraumes V,

$$\mathcal{F}(K) = \{(0) \underset{\neq}{\subset} V'_1 \underset{\neq}{\subset} V'_2 \underset{\neq}{\subset} V \otimes_k K\} \quad .$$

Es gilt, in Abhängigkeit vom Träger von $\underline{n}$,

$$\mathcal{F}^{ss} = \begin{cases} V'_1 \text{ in keiner } k\text{-rationalen Hyperebene enthalten,} & \alpha_1 - \alpha_2 > \alpha_2 - \alpha_3 \\ V'_2 \text{ enthält keine } k\text{-rationale Gerade,} & \alpha_1 - \alpha_2 < \alpha_2 - \alpha_3 \\ V'_1 \text{ und } V'_2 \text{ beide nicht } k\text{-rational,} & \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

c) Sei $n = 4$ und $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$. In Abhängigkeit vom Träger $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}$ erhält man jetzt, wie S. Orlik in seiner Diplomarbeit [O] gezeigt hat, 37 verschiedene Semistabilitätsmengen, die alle offene Teilmengen der Varietät $\mathcal{F}$ der vollständigen Flaggen von V sind.

Für die verschiedenen HN-Stratifizierungen von $\mathcal{F}$ gibt es noch mehr Möglichkeiten. An diesem Beispiel zeigt sich bereits, mit welchen Phänomenen man im allgemeinen Fall zu rechnen hat. Zum Beispiel erweist es sich, daß in der Relation (2.4) im allgemeinen kein Gleichheitszeichen steht; mitunter ist sogar der Abschluß eines HN-

Stratums keine Vereinigung von HN-Strata [O]. Dies steht in krassem Gegensatz zum Fall der Vektorbündel auf $\mathbf{P}^1$ (vgl. Proposition 1.2). Da die Analogie zwischen dem Modulraum der Vektorbündel und dem Modulraum der $\mathbf{Z}$-Filtrationen so überzeugend ist, neige ich dazu anzunehmen, daß für Vektorbündel auf einer Riemannschen Fläche X von höherem Geschlecht die HN-Stratifikation auf $\mathcal{D}_X(n,d)$ bzw. $\mathcal{C}_X(n,d)$ ähnlich schlechte Eigenschaften hat wie die HN-Stratifikation von $\mathcal{F}(V,\underline{n})$. Dies zu überprüfen ist aber nicht einfach, weil Vektorbündel auf Riemannschen Flächen von höherem Geschlecht keine explizite Beschreibung gestatten.

Bemerkung 2.6. Für eine detailliertere Übersicht über die Materie dieses Abschnitts vgl. [Ra2]. Dort werden die als semistabiler Ort entstehenden offenen Untervarietäten der Flaggenvarietäten als *Periodenbereiche* bezeichnet. Wir verweisen auf loc. cit. für eine Begründung für diese Namensgebung, wie auch für Varianten der hier betrachteten Periodenbereiche über beliebigem Grundkörper. Dort wird auch der Zusammenhang zur Momentenabbildung im Falle des Grundkörpers $\mathbf{C}$ erläutert. Für die Verallgemeinerung von der GL_n auf beliebige reduktive Gruppen ist wieder der Tensorproduktsatz entscheidend, vgl. Bemerkung 1.10. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie fehlt jedoch in der Literatur.

An dieser Stelle soll noch einmal hervorgehoben werden, wie mysteriös das Wesen der angeführten Analogien zwischen den Vektorbündeln und den $\mathbf{Z}$-filtrierten Vektorräumen wirklich ist. Faltings hat (in seinem ersten Beweis des Tensorproduktsatzes [FW], vgl. (5.1) weiter unten) eine Konstruktion folgender Art erdacht. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k *der Charakteristik* 0 und K eine *endliche* Körpererweiterung. Sei X eine zyklische Überlagerung der Riemannschen Zahlenkugel, die in mindestens $[K:k]$ Punkten voll verzweigt ist, mit Galoisgruppe $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Dann assoziiert Faltings zu einer $\mathbf{Z}$-Filtration λ auf $V \otimes_k K$ ein Vektorbündel $\mathcal{E}(V,\lambda)$ auf X mit

$$\operatorname{rg} \mathcal{E}(V,\lambda) = \dim_\lambda(V) \ , \ \deg \mathcal{E}(V,\lambda) = [K:k] \deg_\lambda(V) \ .$$

Diese Konstruktion kommutiert mit Tensorprodukten und $\mathcal{E}(V,\lambda)$ ist semistabil, falls (V,λ) es ist. Die Umkehrung gilt auch, falls der Überlagerungsgrad N von X über $\mathbf{P}^1$ genügend hoch ist. Wir erhalten auf diese Weise in dieser speziellen Situation einen direkten Zusammenhang zwischen den Objekten der beiden betrachteten Kategorien. In allgemeineren Fällen versagt jedoch diese Konstruktion, und es scheint mir sehr unwahrscheinlich, daß es dann einen solchen ursächlichen Zusammenhang geben kann.

3 Kohomologie I

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}$. Man kann in der Tat die singuläre rationale Kohomologie $H^*(\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}) = H^*(\mathcal{D}_X(n,d)^{ss},\mathbf{Q})$ definieren [BGL]: diese ist endlich-dimensional in jedem Grad, verschwindet allerdings nicht für hohe Grade. Es geht um die Berechnung der *Poincaréreihe* in $\mathbf{Z}[[t]]$,

$$P(\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim H^i(\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}) \cdot t^i \quad .$$

Der Zusammenhang zum ursprünglich im §1 formulierten Problem ist durch die folgende Identität gegeben, die im Fall g.g.T. $(n, d) = 1$ gilt [BGL], vgl. (1.9):

$$P(M_X(n,d)^{ss}) = (1-t^2) \cdot P(\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}) \quad .$$

Auf der linken Seite steht das Poincaré*polynom* von $M_X(n,d)^{ss}$. Für die Berechnung der Poincaréreihe von $\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}$ benutzen wir, daß die Poincaréreihe vom Gesamtraum $\mathcal{D}_X(n,d)$ leicht zu berechnen ist (sie reduziert sich auf die Kohomologie von symmetrischen Produkten von X) und auf die folgenden beiden Eigenschaften der HN-Stratifikation von $\mathcal{D}_X(n,d)$.

(3.1) $P(\mathcal{D}_X(n,d)) = \sum_{\underline{\mu}} t^{2 \cdot \operatorname{codim} \mathcal{D}_{\underline{\mu}}} \cdot P(\mathcal{D}_{\underline{\mu}}) \quad .$

(3.2) Sei $\underline{\mu} = (d_1/n_1, \ldots, d_1/n_1; d_2/n_2, \ldots, d_2/n_2; \ldots; d_r/n_r, \ldots, d_r/n_r)$, mit $n_1 + \ldots + n_r = n$ und $d_1/n_1 > d_2/n_2 > \ldots > d_r/n_r$. Dann

$$H^*(\mathcal{D}_X(n,d)_{\underline{\mu}}) = H^*(\mathcal{D}_X(n_1,d_1)^{ss}) \otimes \ldots \otimes H^*(\mathcal{D}_X(n_r,d_r)^{ss}) \quad .$$

Dabei ist die Identität (3.1) Konsequenz der *Perfektheit* der HN-Stratifikation: die Spektralsequenz, die die Kohomologie des Gesamtraums aus der Kohomologie der einzelnen Strata berechnet, zerfällt in kurze exakte Sequenzen. Die Identität (3.2) resultiert mit Hilfe der Künnethformel aus der natürlichen Inklusion, die einen Isomorphismus auf den Kohomologiegruppen induziert,

(3.3) $\mathcal{D}_X(n_1,d_1)^{ss} \times \ldots \times \mathcal{D}_X(n_r,d_r)^{ss} \subset \mathcal{D}_X(n,d)_{\underline{\mu}} \quad .$

Wir können (3.1) und (3.2) zusammen als eine Rekursionsformel für die Poincaréreihe von $\mathcal{D}_X(n,d)^{ss}$ ansehen. Der explizite Ausdruck für diese Rekursionsformel sieht wie folgt aus: Es sei

$$P_n = \frac{(1+t)^{2g}(1+t^3)^{2g}\ldots(1+t^{2n-1})^{2g}}{(1-t^2)(1-t^4)^2\ldots(1-t^{2n-2})^2\cdot(1-t^{2n})} \quad ,$$

wobei g wieder das Geschlecht von X bezeichnet. Dann ist

$$P(\mathcal{D}_X(n,d)) = P_n$$

(unabhängig von d). Die Codimension von $\mathcal{D}_X(n,d)_{\underline{\mu}}$ ist gleich

$$c(n_1,\ldots,n_r,d_1,\ldots,d_r) = \sum_{1\le i<j\le r} (n_i \cdot n_j(g-1) + d_i n_j - d_j n_i) \quad ,$$

falls $\underline{\mu}$ von der Form (3.2) ist. Weiter sei $P_{n,d} = P(\mathcal{D}_X(n,d)^{ss})$. Dann läßt sich (3.1) in folgender Form schreiben:

$$P_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_r=n \\ n_i>0}} \sum_{\substack{d_1+\ldots+d_r=d \\ d_1/n_1>\ldots>d_r/n_r}} t^{2\cdot c(n_1,\ldots,n_r;d_1,\ldots,d_r)} \cdot P_{n_1,d_1} \cdot \ldots \cdot P_{n_r,d_r}\cdot$$

Folgende Inversion dieser Rekursionsformel stammt von Zagier [Z].

Satz 3.4. *Es gilt*

$$P_{n,d} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_r=n \\ n_i>0}} P_{n_1}\ldots P_{n_r} \cdot \frac{(-1)^{r-1}\cdot t^{2M(n_1,\ldots,n_r;d/n)}}{(1-t^{2(n_1+n_2)})\ldots(1-t^{2(n_{r-1}+n_r)})} \quad .$$

Dabei ist

$$M(n_1,\ldots,n_r;d/n) = (g-1)\cdot\sum_{i<j} n_i n_j + \sum_{j=1}^{r-1}(n_j+n_{j+1})\left\langle -\frac{d}{n}\cdot\sum_{i=1}^{j} n_i\right\rangle$$

eine ganze Zahl (!). Für $x \in \mathbf{Q}$ bezeichnet hier $\langle x\rangle$ den eindeutig bestimmten Repräsentanten in $(0,1]$ der Klasse von x in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Es ist übrigens aus obigem Ausdruck nicht ersichtlich, daß falls g.g.T. $(n,d)=1$ das Produkt $(1-t^2)\cdot P_{n,d}$ ein Polynom ist.

Der Beweis von Zagier ist ein Stück ingeniöser Rechenarbeit und benutzt „Induktion" über einen *reellen* Hilfsparameter! Ein anderer Beweis [LR] stammt von Laumon und mir. Er benutzt das Langlandslemma aus der Theorie der Eisensteinschen Reihen, siehe Ende des nächsten Abschnitts. Offenbar ist es einer der Vorzüge dieses zweiten Beweises, daß er sich auch auf das Rekursionsproblem des nächsten Abschnitts anwenden läßt. Außerdem verallgemeinert er sich auch auf G-Bündel.

Bevor wir uns den Flaggenvarietäten zuwenden, sei noch bemerkt, daß die Methode von Atiyah/Bott zur selben Rekursionsformel führt [AB]. Allerdings muß in diesem Fall die Poincaréreihe ausgehend von der *äquivarianten* singulären Kohomologie bezüglich der Eichgruppe gebildet werden. Mit dieser Interpretation gelten dieselben Formeln wie oben, mit ähnlichen Begründungen.

Dieselbe Rekursionsformel entsteht auch beim Abzählproblem von Vektorbündeln auf Kurven über endlichen Körpern, vgl. [HN] und [AB].

Bemerkung 3.5. Unter Verwendung der Methode von [LR] ist es de Baño Rollin [BR] gelungen, sogar die Hodgezahlen $h^{p,q}$ von $M_X(n,d)^{ss}$ zu berechnen (g.g.T. $(n,d)=1$). Er leitet dieses Ergebnis aus einer Formel für das *motivische* Poincarépolynom von $M_X(n,d)^{ss}$ ab.

4 Kohomologie II

In diesem Abschnitt geht es um die Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{F}(V,\underline{n})^{ss}$, im Falle eines endlichen Grundkörpers k. Unter Kohomologie sei hier die Etalkohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Q}_\ell$ über einem festen algebraischen Abschluß $\bar{k}$ von k verstanden ($\ell \neq \operatorname{char} k$). Es erweist sich, daß, im Gegensatz zur Situation für $\mathcal{D}_X(n,d)$ die zur HN-Stratifikation von $\mathcal{F}(V,\underline{n})$ assoziierte Spektralsequenz *nicht* degeneriert; daher ist die Bestimmung der Kohomologie von $\mathcal{F}^{ss}$ ein anscheinend schwieriges Problem. Einfacher ist die Bestimmung der Euler-Poincaré-Charakteristik der Kohomologie mit kompakten Trägern, als *virtuelle Darstellung* der endlichen Gruppe $G(k) = GL(V,k)$,

$$\chi_c(\mathcal{F}^{ss}) = \sum_i (-1)^i H_c^i(\mathcal{F}^{ss} \otimes_k \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) \quad ,$$

und diese verläuft, wie ich jetzt erklären will, ganz analog zur Bestimmung der Poincaréreihe im letzten Abschnitt. Zunächst ist die Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{F}$ ganz einfach (Schubertzellen). Sie liefert

$$\chi_c(\mathcal{F}) = \frac{n!}{n_1! \dots n_s!} \cdot \mathbf{1} \quad .$$

Weiter gelten die zu (3.1) und (3.2) analogen Relationen

$$\text{(4.1)} \quad \chi_c(\mathcal{F}) = \sum_{\underline{\mu}} \chi_c(\mathcal{F}_{\underline{\mu}})$$

$$\text{(4.2)} \quad \chi_c(\mathcal{F}_{\underline{\mu}}) \cong \mathrm{Ind}_{P_{\underline{\mu}}(k)}^{G(k)} (\chi_c(\mathcal{F}(k^{\|\underline{n}_1\|}, \underline{n}_1)^{ss} \otimes \dots \otimes \chi_c(\mathcal{F}(k^{\|\underline{n}_r\|}, \underline{n}_r)^{ss})) \ .$$

Dabei ist $\underline{\mu} = (\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r)$ wie im zweiten Abschnitt und $P_{\underline{\mu}} = P_{(\|\underline{n}_1\|, \dots, \|\underline{n}_r\|)}$ bezeichnet die parabolische Untergruppe der $GL(V)$, die eine Flagge, gebildet von Unterräumen der Dimensionen $\|\underline{n}_1\|, \|\underline{n}_1\| + \|\underline{n}_2\|, \dots$ stabilisiert. Die Beziehung (4.1) ist Konsequenz der Additivität der Euler-Poincaré-Charakteristik für Kohomologie mit kompakten Trägern, während die Relation (4.2) analog zu (3.3) aus einer Faserung mit zusammenziehbaren Fasern entsteht,

$$\mathcal{F}_{\underline{\mu}} \longrightarrow \dot{\bigcup_{G(k)/P_{\underline{\mu}}(k)}} \mathcal{F}(k^{\|\underline{n}_1\|}, \underline{n}_1)^{ss} \times \dots \times \mathcal{F}(k^{\|\underline{n}_r\|}, \underline{n}_r)^{ss} \quad .$$

Wieder können (4.1) und (4.2) als Rekursionsformel angesehen werden. Die Auflösung nach $\chi_c(\mathcal{F}(V, \underline{n})^{ss})$ stammt von Kottwitz und mir.

Satz 4.3. *Es gilt*

$$\chi_c(\mathcal{F}(V, \underline{n})^{ss}) = \sum_{\underline{\mu}} (-1)^{a_{\underline{\mu}}} \cdot v_{P_{\underline{\mu}}} \quad .$$

Dabei ist $a_{\underline{\mu}} = r - 1$, falls $\underline{\mu} = (\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r)$ und für eine beliebige parabolische Untergruppe P von $GL(V)$ ist v_P die folgende Darstellung von $GL(V,k)$,

$$v_P = C(GL(V,k)/P(k)) / \sum_{P' \underset{\neq}{\supset} P} C(GL(V,k)/P'(k)) \quad .$$

Hier bezeichnet $C(X)$ die Menge der $\mathbf{Q}_\ell$-wertigen Funktionen auf dem Raum X.

Im Fall des Drinfeld'schen oberen Halbraumes $\Omega(V)$ kann man aus der obigen Formel die Darstellung von $GL(V,k)$ auf den individuellen Kohomologiegruppen bestimmen. Der Grund dafür ist, daß die Kohomologie von $\Omega(V)$ als Kohomologie eines Komplements eines Hyperebenenarrangements [OT] *rein* ist (im Sinne der Absolutwerte des Frobenius), so daß es keine Kürzungen beim Bilden der alternierenden Summe der Kohomologiegruppen geben kann. Insbesondere ist

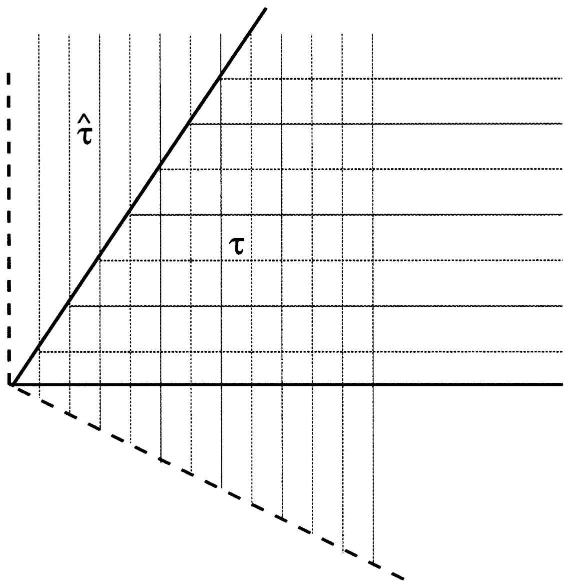
$$H_c^i(\Omega(V) \otimes_k \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) = 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq \dim V - 2 \quad .$$

Es scheint unwahrscheinlich, daß ein ähnlicher Verschwindungssatz für allgemeine semistabile Orte $\mathcal{F}(V, \underline{n})^{ss}$ gilt, aber Beispiele hierfür sind mir nicht bekannt.

Wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt wurde, basiert der Beweis für die Auflösung der Rekursionsformel auf dem Langlandslemma [A] aus der Theorie der Eisensteinschen Reihen (für einen besonders einfachen Beweis siehe [La]; vgl. auch [L] im Fall der GL_n). Sei Q eine parabolische Untergruppe einer reduktiven Gruppe G. Dann gilt, mit den in dieser Theorie üblichen Bezeichnungen,

$$\sum_{Q \subset P \subset G} (-1)^{a_P - a_Q} \tau_Q^P \cdot \hat{\tau}_P^G = \delta_{Q,G} \quad . \tag{4.4}$$

Dabei durchläuft P die Menge der parabolischen Untergruppen zwischen Q und G. Rechts erscheint das Kronecker-Delta. Die τ bzw. $\hat{\tau}$ bezeichnen die charakteristischen Funktionen von gewissen Kegeln im euklidischen Raum, die in Termen des Wurzelsystems von G definiert sind.



τ_P^G und $\hat{\tau}_P^G$ für $G = SL_3$, $P =$ Borel.

Die Beziehung (4.4) oben ist analog zu einer bekannten kombinatorischen Identität. Falls I eine endliche Menge ist, so gilt für jedes $K \subset I$

$$\sum_{K \subset J \subset I} (-1)^{|J|-|K|} = \delta_{K,I} \quad .$$

Sei jetzt für jedes $J \subset I$ ein Element a_J einer festen abelschen Gruppe gegeben. Wir suchen Elemente b_J mit

$$a_J = \sum_{K \subset J} b_K \quad , \quad J \subset I \quad .$$

Obige Identität zeigt, daß die einzige Lösung dieser impliziten Rekursionsformel gegeben ist durch

$$b_J = \sum_{K \subset J} (-1)^{|J|-|K|} \cdot a_K \quad .$$

Ganz ähnlich verwendet man die Formel (4.4), um die impliziten Rekursionsformeln (4.1) bzw. (3.1) zu invertieren. Dabei beschreiben die in (4.4) auftretenden charakteristischen Funktionen τ_P^G gerade die Positivitätsbedingungen, die die Indizes der HN-Strata erfüllen, vgl. (2.3) und (3.2).

5 Weitere Analogien, abschließende Bemerkungen

In diesem Abschnitt führen wir weitere Beispiele für die angesprochene Analogie zwischen Vektorbündeln auf Riemannschen Flächen und **Z**-numerierten Filtrationen auf Vektorräumen an.

Satz 5.1. *Das Tensorprodukt von semistabilen Objekten ist wieder semistabil.*

Für Vektorbündel folgt dies aus einem tiefliegenden Satz von Narasimhan und Seshadri [NS], der stabile und semistabile Vektorbündel in Beziehung zu unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe der Riemannschen Fläche setzt. Ein anderer Beweis für diese Beziehung stammt von Donaldson [Do]. Beide Beweise sind analytischer Natur. Ein rein algebraischer Beweis für den Tensorproduktsatz für Vektorbündel wurde von Maruyama [M] gegeben. Die entsprechende Aussage für Vektorbündel auf einer projektiven nichtsingulären Kurve über einem Körper positiver Charakteristik ist falsch.

Für **Z**-filtrierte Vektorräume stammt der Satz von Faltings und Totaro. Genauer gesagt hat Faltings [FW] zunächst diesen Satz über einem Grundkörper der Charakteristik 0 durch Reduktion auf den Satz von Narasimhan/Seshadri gezeigt (vgl. die Bemerkungen am Schluß des zweiten Abschnitts). Totaro [T1] gab daraufhin einen einfacheren Beweis (immer noch über einem Grundkörper der Charakteristik 0), der die Verwendung des Resultats von Narasimhan/Seshadri vermeidet. Der Fall eines beliebigen Grundkörpers wurde von Faltings [Fa2] und Totaro [T2] unabhängig voneinander und gleichzeitig gelöst. Dabei ist der Beweis von Faltings arithmetischer Natur, während der Beweis von Totaro Methoden der geometrischen Invariantentheorie verwendet. Der Satz hat, über die Verallgemeinerung der Theorie auf beliebige reduktive Gruppen hinaus (vgl. §2) auch Anwendungen in der diophantischen Approximation [FW]. Seine Aussage wurde von einer berühmten Vermutung von Fontaine [Fo] über die p-adische Kohomologie inspiriert.

Eine weitere Analogie gibt es im Zusammenhang zwischen dem Stabilitätsbegriff, wie er hier erklärt wurde, und dem in der geometrischen Invariantentheorie gebräuchlichen.

Satz 5.2. *Der semistabile Ort kann durch das Hilbert-Mumford-Kriterium charakterisiert werden.*

Für die genaue Aussage, die im Falle von $\mathcal{D}_X(n,d)$ bzw. $\mathcal{C}_X(n,d)$ von Mumford und Seshadri stammt (und die eine wichtige Rolle beim Beweis von Satz 1.6 spielt) und im Falle von $\mathcal{F}(V,\underline{n})$ von Totaro, verweise ich auf [N] bzw. [T2] (siehe auch [PV]). Der von Totaro bewiesene Satz war von Zink und mir [RZ] vermutet worden.

Zum Abschluß führe ich noch folgende kohomologische Charakterisierung von semistabilen Vektorbündeln an, die von Faltings [Fa1] stammt. Für eine vereinfachte Darstellung des Originalbeweises vgl. [S2].

Satz 5.3. *Sei $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel auf der Riemannschen Fläche X. Genau dann ist $\mathcal{E}$ semistabil, wenn es ein zweites Vektorbündel $\mathcal{E}'$ gibt mit*

$$H^0(X,\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}') = H^1(X,\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}') = (0) \quad .$$

Mir ist es nicht gelungen, ein Analogon dieser Aussage für $\mathbf{Z}$-filtrierte Vektorräume zu finden. Sollte hier die so stimmig scheinende Analogie zwischen Vektorbündeln auf Riemannschen Flächen und $\mathbf{Z}$-filtrierten Vektorräumen versagen?

Bibliographie

[A] Arthur, J.: A trace formula for reductive groups I: Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$, Duke Math. J. **45**, 911–953 (1978)

[AB] Atiyah, M.F., Bott, R.: The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **308**, 523–625 (1982)

[BL] Beauville, A., Laszlo, Y.: Conformal blocks and generalized theta functions, Commun. Math. Phys. **164**, 385–419 (1994)

[BGL] Bifet, E., Ghione, F., Letizia, M.: On the Abel-Jacobi map for divisors of higher rank on a curve, Math. Ann. **299**, 641–672 (1994)

[BR] del Baño Rollin, S.: The motif of moduli spaces of vector bundles on a curve, preprint Polytechnic Univ. Barcelona, 1996

[Do] Donaldson, S.: A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, J. Diff. Geom. **18**, 269–277 (1983)

[Dr] Drinfeld, V.G.: Coverings of p-adic symmetric regions, Funct. Anal. and Appl. **10**, 29–40 (1976)

[Fa1] Faltings, G.: Stable G-bundles and projective connections, J. Alg. Geom. **2**, 507–568 (1993)

[Fa2] Faltings, G.: Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie, Proc. ICM Zürich, 648–655, Birkhäuser 1995

[FW] Faltings, G., Wüstholz, G.: Diophantine approximations in projective spaces, Invent. Math. **116**, 109–138 (1994)

[Fo] Fontaine, J.-M.: Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, Astérisque **65**, 3–80 (1979)

[G] Grayson, D.: Finite generation of K-groups of a curve over a finite field (after Quillen). In: Dennis, R. (ed.): Algebraic K-theory. Proceedings, 1980, part 1; Lect. Notes Math. **966**, 69–90; Springer 1982

[HN] Harder, G., Narasimhan, M.S.: On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles over curves, Math. Ann. **212**, 215–248 (1975)

[La] Labesse, J.-P.: La formule des traces d'Arthur-Selberg, Séminaire Bourbaki, 1984–85, Astérisque **133–134**, 73–88 (1986)

[L] Laumon, G.: Cohomology of Drinfeld modular varieties, II, to appear, Cambridge Univ. Press

[LM] Laumon, G., Moret-Bailly, L.: Champs algébriques, preprint Univ. d'Orsay, 1992

[LR] Laumon, G., Rapoport, M.: The Langlands lemma and the Betti numbers of stacks of G-bundles on a curve, Int. J. of Math. **7**, 29–45 (1996)

[M] Maruyama, M.: The theorem of Grauert-Mülich-Spindler, Math. Ann. **255**, 317–333 (1981)

[MFK] Mumford, D., Fogarty, J., Kirwan, F.: Geometric invariant theory, 3rd enlarged ed., Springer 1994

[NS] Narasimhan, M.S., Seshadri, C.S.: Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. Math. **82**, 540–567 (1965)

[N] Newstead, P.E.: Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces; Tata Lectures, Springer 1978

[OSS] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H.: Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. **3**, Basel: Birkhäuser 1980

[OT] Orlik, P., Terao, H.: Arrangements of hyperplanes, Grundlehren **300**, Springer 1992

[O] Orlik, S.: Semistabilität von gewichtet filtrierten Vektorräumen, Diplomarbeit Wuppertal 1996

[PS] Pressley, A., Segal, G.: Loop groups, Clarendon Press, Oxford 1986

[PV] van der Put, M., Voskuil, H.: Symmetric spaces associated to split algebraic groups over a local field, J. reine angew. Math. **433**, 69–100 (1992)

[R1] Ramanathan, A.: Stable principal bundles on a compact Riemann surface, Math. Ann. **213**, 129–152 (1975)

[R2] Ramanathan, A.: Deformations of principal bundles on the projective line, Invent. math. **71**, 165–191 (1983)

[Ra1] Rapoport, M.: Non-archimedean period domains, Proceedings ICM Zürich, 423–434, Birkhäuser 1995

[Ra2] Rapoport, M.: Period domains over finite and local fields, Proc. of the AMS Summer School on Algebraic Geometry 1995, to appear

[RZ] Rapoport, M., Zink, Th.: Period spaces for p-divisible groups, Ann. Math. Studies **141**, Princeton University Press 1996

[S1] Seshadri, C.S.: Spaces of unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. Math. **85**, 303–336 (1967)

[S2] Seshadri, C.S.: Vector bundles on curves, in: Elman, R.S. et al. (ed.): Linear algebraic groups and their representations, Contemp. Math. **153**, 163–200 (1993)

[Sh] Shatz, S.: The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles, Compos. Math. **35**, 163–187 (1977)

[T1] Totaro, B.: Tensor products of semistables are semistable, Geometry and Analysis on Complex Manifolds, World Scientific, 242–250 (1994)

[T2] Totaro, B.: Tensor products in p-adic Hodge theory, Duke Math. J. **83**, 79–104 (1996)

[Z] Zagier, D.: Elementary aspects of the Verlinde formula and of the Harder-Narasimhan-Atiyah-Bott formula, Israel Math. Conf. Proc. **9**, 445–462 (1996)

M. Rapoport
Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
Weyertal 86–90
D-50931 Köln
e-mail: rapoport@mi.uni-koeln.de

(*Eingegangen 23. 01. 97*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1997 B. G. Teubner Stuttgart
99 (1997) 181–195
Mathematics Subject Classification: 05 E 20

Endliche Strukturen, ihre Theorie, ihre Konstruktion und Anwendungen

A. Kerber, Bayreuth

1 Einführung

Anhand dreier Beispiele soll über einige Erfahrungen berichtet werden, die bei der Durchführung einiger auch anwendungsorientierter Forschungsprojekte (gemeinsam mit R. Laue und Mitarbeitern[1]) gemacht worden sind.

Der Wunsch nach einer Entwicklung der *konstruktiven* Theorie endlicher Strukturen ergibt sich insbesondere aus Anwendungen, bei denen man solche Strukturen konstruieren will und manchmal sogar vor sich sehen *muß*. Dies hat bei den angekündigten Beispielen diverse Gründe:

• Fehlerkorrigierende lineare *Codes* will man konstruieren, um sie direkt industriell einsetzen zu können, beispielsweise zur Übertragung von Satellitenphotos. Der Qualitätsunterschied wird dabei vor allem durch ihre Fähigkeiten zur Fehlerkorrektur bestimmt, und man will natürlich die diesbezüglich besten Codes konstruieren, was insbesondere durch die Minimaldistanz angegeben, also durch die sogenannte Hamming-Metrik induziert wird. Kurz formuliert lautet das Konstruktionsproblem hier: *In der Codierungstheorie will man die Isometrieklassen endlicher Vektorräume durch eine Basis eines ihrer Repräsentanten angeben.*

• Das graphentheoretische Modell chemischer *Moleküle* erfordert die Generierung (und graphische Darstellung!) aller chemischen Moleküle, die zu vorgegebenen, meist spektroskopischen, Daten passen. Zur Summenformel C_6H_6 gehören beispielsweise 217 zusammenhängende molekulare Graphen, das Dioxin besitzt genau 22 Isomere, ... Aufgabe der Mathematik im Rahmen der täglich anfallenden Strukturaufklärungsprobleme chemischer Labors ist dementsprechend die Konstruktion eines vollen Satzes molekularer Graphen, die zu einer vorgegebenen Summenformel und (optional) weiteren Nebenbedingungen passen. Hier geht es also um die *Berechnung vollständiger Kataloge von (mit Atomnamen gefärbten) Graphen mit gewissen Parametern.*

• In der Theorie der *Designs* gibt es viele Existenzfragen. Man will beispielsweise wissen, ob es zu einem vorgegebenen Quadrupel (t, v, k, λ) ein sogenanntes

---

[1] gefördert durch DFG und BMBF

$t-(v, k, \lambda)$-Design gibt. Viele Jahre lang hat man – nach der Entdeckung von 6-Designs – vergeblich nach 7-Designs mit kleinen Parametern gesucht (bisher gibt es einen Existenzsatz nur für astronomisch große Parameter). Solche Designs kann man als 0,1-Lösungen großer linearer Gleichungssysteme auffassen. Für $t=7$ waren die untersuchten Gleichungssysteme viel zu groß, als daß man mit den bisherigen Mitteln eine Lösung hätte berechnen können. Die *Frage der Existenz von 7-Designs mit kleinen Parametern* stellte sich auf diese Weise als Herausforderung sowohl an die Theorie, als auch an die Praxis dar.

Man kann die konstruktive Theorie endlicher Strukturen demnach mit diversen Anwendungs- und Existenzproblemen in Mathematik und Naturwissenschaften motivieren. Ich will versuchen, einige unserer Erfahrungen bei der Lösung dieser drei Probleme zu schildern. Für mehr Details und weitere Anwendungen sei auf [7] und [9] verwiesen. Vor allem geht es mir dabei um den Nachweis, daß man

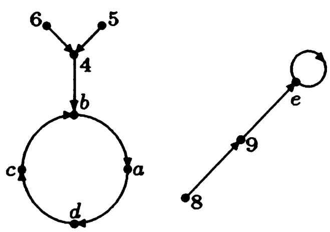
– in vielen Fällen *dieselben grundlegenden algebraischen Methoden* verwenden kann,
– daß diese Methoden *einfach beschreibbar* sind und schon in Grundvorlesungen eingeflochten werden können,
– und daß sie *effizient* sind – und zwar sowohl vom praktischen als auch vom theoretischen Standpunkt her gesehen.

Es muß allerdings noch darauf hingewiesen werden, daß die konkrete Anwendung dann allerhand Verfeinerungen erfordert, die hier aus Platzgründen (im Vortrag während der DMV-Tagung aus Zeit- und Notationsgründen) nicht beschrieben werden konnten, wie beispielsweise die Methoden der Computeralgebra zur Darstellung und Anwendung von Permutationsgruppen oder die sogenannte ordnungstreue Erzeugung von Bahnenrepräsentanten wie sie schon R. C. Read beschrieben hat, auch die verfeinerten Methoden der Abzählungstheorie nach Burnside, Redfield, Pólya usw., deren Resultate unter anderem auch als Abbruchregeln dienen können. Ganz zu schweigen von den Beziehungen zur Darstellungstheorie, insbesondere zur Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen, dem Einsatz von Schurpolynomen, Charakteren usw.

2 Numerierte Strukturen

Es ist klar, daß man komplizierte Konstruktionsprobleme für endliche Strukturen in der Regel nur mit Hilfe von Computern lösen kann, diese können jedoch nur *numerierte* Strukturen verarbeiten, während man oft mehr an den *unnumerierten* Strukturen, also beispielsweise an unnumerierten Graphen interessiert ist. Dennoch haben auch die numerierten Strukturen ihren Reiz. Eine Neuentwicklung, die sich mit erzeugenden Funktionen für Anzahlen sowohl von numerierten als auch von unnumerierten Strukturen beschäftigt, ist die seit gut 10 Jahren in Kanada entwickelte Theorie der *Spezies* (vgl. [2]). Werfen wir einen kurzen Blick auf diese, genauer, auf eines ihrer Glanzlichter, den Beweis von A. Joyal (der diese Theorie initiiert hat, vgl. [6]) für den Satz von Cayley, der besagt, daß es genau n^{n-2} numerierte Bäume mit n Punkten gibt.

Dazu geht man von den *Endofunktionen* einer Menge von n Elementen aus, also von den Abbildungen dieser Menge in sich. Das sind natürlich genau n^n Funktionen. Wenn man sie bildlich darstellt, beispielsweise



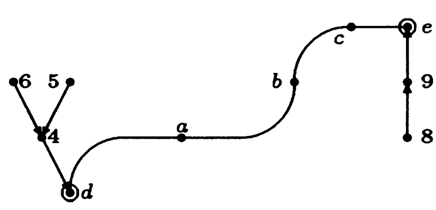
so zeigt sich, daß es zwei Sorten von Punkten gibt: solche, die auf einem Zyklus liegen (im Beispiel sind dies die Punkte a, b, c, d, e), und solche, die nicht auf einem Zyklus liegen. Die Punkte auf den Zyklen sind jeweils Wurzeln von Wurzelbäumen. *Endofunktionen sind* demnach – und weil Permutationen aus Zyklen bestehen – interpretierbar als *Permutationen von Wurzelbäumen;* unser Beispiel ist die Permutation $(d, c, b, a)\,(e)$, in Zykelschreibweise, der Wurzelbäume mit den Wurzeln a, b, c, d, e, bzw. $[d, a, b, c, e]$ in Listenschreibweise, kurz:

Endofunktionen = Permutationen (Wurzelbäume).

(Diese Einsetzung von Wurzelbäumen in Permutationen heißt *Plethysmus,* sie ist eine Kranzproduktbildung, und wer die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen kennt, wird sich deshalb nicht wundern, daß dementsprechend die (exponentielle) erzeugende Funktion der Anzahlen von Endofunktionen der Plethysmus der erzeugenden Funktionen der Anzahlen von Permutationen mit der erzeugenden Funktion der Anzahlen von Wurzelbäumen ist.) Kommt es uns jetzt nur auf die Anzahlen an, dann können wir Permutationen durch lineare Ordnungen ersetzen – beispielsweise indem wir die Permutation in Listenschreibweise kanonisch auf lineare Ordnungen abbilden, im Beispiel wäre das die Abbildung $[d, a, b, c, e] \mapsto d < a < b < c < e$. Wir erhalten auf diese Weise die folgende Äquivalenz, die als Gleichheit von erzeugenden Funktionen verstanden werden soll:

Permutationen (Wurzelbäume) $\equiv$ Totalordnungen (Wurzelbäume).

Wenn wir uns nun eine Totalordnung einer Menge von Wurzelbäumen skizzieren, so erhalten wir beispielsweise die lineare Ordnung $d < a < b < c < e$ von Wurzelbäumen (die durch den Namen ihrer Wurzel beschrieben werden) als Resultat:



Totalordnungen von Wurzelbäumen sind also *zweifach punktierte* Bäume:

Totalordnungen (Wurzelbäume) = Bäume$^{\bullet\bullet}$.

Da man jeden der n Punkte für die Punktierung verwenden kann (sogar beidemale), gilt aber für die entsprechenden Anzahlen:

n^2 · Anzahl der Bäume = Anzahl zweifach punktierter Bäume,

und wir erhalten schließlich insgesamt:

n^n = Anzahl der Endofunktionen = n^2 · Anzahl der Bäume,

was den Satz von Cayley impliziert!

Numerierte Strukturen haben also ebenfalls ihren Reiz, dennoch liegt hier das Hauptaugenmerk auf unnumerierten Strukturen, denen wir uns jetzt zuwenden wollen.

3 Unnumerierte Strukturen

Viele Strukturen der Mathematik, auch die Graphen, sind (oder können aufgefaßt werden als) *Inzidenzstrukturen* und dienen in Anwendungen als *Wechselwirkungsmodelle.* Solche unnumerierten Strukturen werden meist als *Äquivalenzklassen numerierter Strukturen* definiert. Diese Tatsache führt uns auf den ersten Aspekt der konstruktiven Theorie endlicher Strukturen:

• **Strategie 1:** *Ersetze die definierende Äquivalenzrelation durch eine Gruppenoperation.*

Das heißt, man wähle eine geeignete Menge X und eine passende (etwa multiplikativ geschriebene) Gruppe G, sowie eine Abbildung

$$G \times X \to X, (g, x) \mapsto gx, \quad \text{mit } g(g'x) = (gg')x,\ 1x = x,$$

(hierfür, also für die Vorgabe einer solchen Abbildung, schreiben wir auch kurz ${}_GX$) dergestalt, daß ihre *Bahnen*

$$G(x) := \{gx \mid g \in G\}$$

mit den Äquivalenzklassen übereinstimmen. Die Menge der gesuchten unnumerierten endlichen Strukturen kann dann mit der Menge

$$G \backslash\backslash X := \{G(x) \mid x \in X\}$$

aller Bahnen identifiziert werden. Diese *Definition* einer unnumerierten Struktur mag umständlich erscheinen, zahlt sich jedoch schon beim nächsten Schritt aus, wie wir gleich sehen werden.

4 Das Fundamentallemma und Doppelnebenklassen

Nach erfolgter Definition einer endlichen Struktur als Bahn einer endlichen Gruppe auf einer endlichen Menge kann man für die weiteren Untersuchungen alle Hilfsmittel verwenden, die die umfangreiche Theorie der Operationen von Gruppen auf Mengen zur Verfügung stellt. Grundlegend ist hierbei das folgende alte Resultat:

Das Fundamentallemma: *Ist* $_GX$ *eine Operation einer Gruppe* G *auf einer Menge* X, x *ein Element von* X *und* $G_x := \{g \mid gx = x\}$ *dessen Stabilisator, dann gilt:*

– *Die folgende Abbildung ist eine Bijektion der Bahn* $G(x)$ *von* x *auf die Menge* G/G_x *der Linksnebenklassen von* G_x:

$$\varphi : G(x) \to G/G_x : gx \mapsto gG_x.$$

– *Diese Abbildung* φ *ist mit der Operation von* G *vertauschbar:*

$$\varphi(gx) = g\varphi(x),$$

die beiden Operationen von G *auf* $G(x)$ *und auf* G/G_x *(per Linksmultiplikation) sind demnach im wesentlichen gleich (man nennt das* ähnlich):

$$_G(G(x)) \approx {_G(G/G_x)}.$$

– *Ist* U *eine Untergruppe von* G, *dann ist also die folgende Abbildung eine Bijektion der Menge der Bahnen von* U *auf* $G(x)$ *auf die Menge der* (U, G_x)*-Doppelnebenklassen in* G:

$$U \backslash\backslash G(x) \to U \backslash G/G_x : U(gx) \mapsto UgG_x.$$

– *ist* $\mathcal{D}_x$ *eine Transversale von* $U\backslash G/G_x$, *so ist*

$$\mathcal{T} := \bigcup_{x \in T} \{gx \mid g \in \mathcal{D}_x\}$$

eine Transversale der Bahnenmenge $U \backslash\backslash X$, *wenn* T *eine Transversale von* $G \backslash\backslash X$ *bezeichnet.*

Aus diesem Fundamentallemma ergibt sich die

• **Strategie 2:** *Für die Konstruktion endlicher unnumerierter Strukturen wähle man geeignete Mengen* X, *Gruppen* G, G*-Operationen* $_GX$ *von* G *auf* X *und Untergruppen* U *von* G, *so daß* X *die Menge der numerierten Strukturen darstellt und* $U \backslash\backslash X$ *die Menge der Äquivalenzklassen numerierter Strukturen, sprich die Menge der unnumerierten Strukturen.*

Danach berechne man eine Transversale T *von* $G \backslash\backslash X$, *zu jedem ihrer Elemente* x *eine Transversale* $\mathcal{D}_x$ *der Doppelnebenklassenmenge* $U\backslash G/G_x$ *und daraus die gewünschte Transversale* $\mathcal{T}$ *der Menge* $U \backslash\backslash X$ *unnumerierter Strukturen auf* X.

5 Anwendungsbeispiele

Wir wollen die Nützlichkeit dieser Resultate an einigen interessanten Beispielen illustrieren. Ein recht allgemeiner *Ansatz*, der viele verschiedene Beispiele endlicher Strukturen abdeckt, ist der folgende (der sich vom Ansatz der Speziestheorie dadurch unterscheidet, daß man nicht nur Bahnen symmetrischer Gruppen betrachtet, was auf Inzidenzstrukturen zugeschnitten ist, die auf Punktemengen „leben“). Man geht von zwei geeigneten Gruppenoperationen ${}_GX$ und ${}_HY$ aus und betrachtet die Menge

$$Y^X := \{f\colon X \to Y\}$$

aller Abbildungen von X nach Y sowie eine geeignet zu wählende unter den folgenden Gruppenoperationen von $G, H, H\times G, H\wr_X G$ auf Y^X:

- $G\times Y^X \to Y^X : (g,f) \mapsto f\circ \bar{g}^{-1}$, d. h. (g, f) wird auf $\tilde{f}$ abgebildet, wobei (mit $\bar{g}: x\mapsto gx$)

$$\tilde{f}(x) := (f\circ \bar{g}^{-1})(x) = f(g^{-1}x).$$

- $H\times Y^X \to Y^X : (h,f) \mapsto \bar{h}\circ f$, d. h. (h,f) wird auf $\tilde{f}$ abgebildet, wobei

$$\tilde{f}(x) := (\bar{h}\circ f)(x) = hf(x).$$

- $(H\times G)\times Y^X \to Y^X : ((h,g),f) \mapsto \bar{h}\circ f\circ \bar{g}^{-1}$, d. h. $((h,g),f)$ wird auf $\tilde{f}$ abgebildet, wobei

$$\tilde{f}(x) := (\bar{h}\circ f\circ \bar{g}^{-1})(x) = hf(g^{-1}x).$$

- Das Kranzprodukt besteht aus der Grundmenge

$$H\wr_X G := H^X\times G = \{(\psi, g) \mid \psi\colon X\to H, g\in G\},$$

und der Multiplikation

$$(\psi, g)(\psi', g') := (\psi\psi'_g, gg'),$$

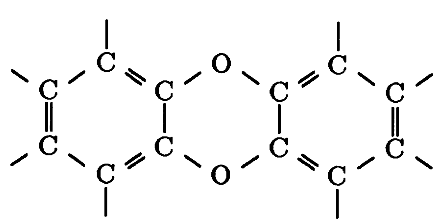
wobei $\psi\psi'_g(x) := \psi(x)\psi'_g(x) := \psi(x)\psi'(g^{-1}x)$. Es induziert auf Y^X die folgende Operation:

$$H\wr_X G\times Y^X \to Y^X : ((\psi, g),f) \mapsto \tilde{f},$$

wobei $\tilde{f}$ definiert wird durch

$$\tilde{f}(x) := \psi(x)f(g^{-1}x).$$

Das erste Anwendungsbeispiel entstammt der Chemie, es handelt sich dabei um die Konstruktion der molekularen Graphen, die die *Permutationsisomere* des Dioxin (mit der chemischen Formel $C_{12}O_2H_4Cl_4$) beschreiben. Diese Isomere erhält man aus dem Skelett des Dioxin, das ist die folgende Substruktur aus zwei Benzolringen, die über zwei Sauerstoffbrücken miteinander verbunden sind:



Die Isomere erhält man hieraus, indem man auf alle wesentlich verschiedenen Weisen vier Wasserstoffatome und vier Chloratome auf die insgesamt acht freien Valenzen verteilt. Diese Verteilungen kann man offenbar als Elemente der Menge von Abbildungen

$$Y^X := \{H, CL\}^8$$

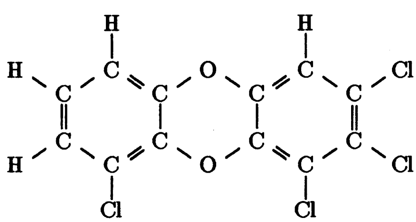
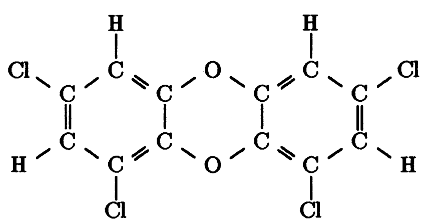
verstehen. Was man mit „wesentlich verschieden" meint, ist definiert durch die Symmetrie des Skeletts: Zwei solche Verteilungen sind genau dann im wesentlichen gleich, wenn sie durch eine Symmetrieoperation ineinander übergeführt werden können. Die Symmetriegruppe wiederum ist allerdings nicht zuletzt auch eine Sache der Chemie. Nimmt man an, diese Isomere seien erstens regelmäßig und zweitens planar, dann ist diese Symmetriegruppe die des Rechtecks, also die Kleinsche Vierergruppe V_4. Wir können die Isomere also mit einer Teilmenge der Bahnenmenge

$$V_4 \backslash\!\backslash \{H, Cl\}^8$$

identifizieren. Zeigen wir noch, daß und auch warum es genau 22 solche Isomere gibt. Dazu verwenden wir Strategie 2. Die Symmetriegruppe liefert $U = V_4$, als Gruppe G nehmen wir die symmetrische Gruppe S_8, sie hat als Bahn $G(x)$ eines beliebigen dieser Isomere (mit genau vier Wasserstoffatomen) gerade die gesuchte Menge aller Dioxinisomere (verbal: S_8 ist transitiv auf dieser Menge), der Stabilisator eines dieser Isomere ist $S_4 \oplus S_4$, so daß wir gemäß Strategie 2 eine Bijektion der folgenden Form bekommen:

Isomere des Dioxin $\rightarrow V_4 \backslash S_8 / (S_4 \oplus S_4)$.

Auf diesen Zusammenhang zwischen Permutationsisomeren und Doppelnebenklassen haben E. Ruch, W. Hässelbarth und B. Richter hingewiesen ([12]), weitere Anwendungen in den Naturwissenschaften finden sich in dem Übersichtsartikel von E. Ruch und D. Klein ([13]). Hier sind zwei wesentlich verschiedene der insgesamt 22 Isomere (die Anzahl 22 kann man leicht mit Hilfe einer Formel für die Anzahl von Doppelnebenklassen gewinnen, wichtiger ist natürlich eine *Konstruktion* der zugehörigen molekularen Graphen, dies leistet beispielsweise MOLGEN [1] in einem Bruchteil einer Sekunde):

Ein weiteres einfaches Beispiel ist die Definition unnumerierter Graphen auf p Punkten. Hierzu geht man von einer Menge P von p Punkten aus und der darauf von der symmetrischen Gruppen induzierten Operation. Dann bildet man die Menge $X := \binom{P}{2}$ aller Zweiermengen (= ungeordneter Punktepaare), auch auf dieser operiert die symmetrische Gruppe S_P. Die numerierten Graphen mit p Punkten kann man auf diese Weise leicht mit der Menge von Abbildungen

$$Y^X := 2^{\binom{P}{2}}$$

von $\binom{P}{2}$ in die Menge $2 = \{0, 1\}$ identifizieren, indem man ein Punktepaar als verbunden ansieht, wenn es auf 1 abgebildet wird. Die Menge aller unnumerierten Graphen mit p Punkten entspricht dann der Bahnenmenge

$$S_P \backslash\backslash 2^{\binom{P}{2}}.$$

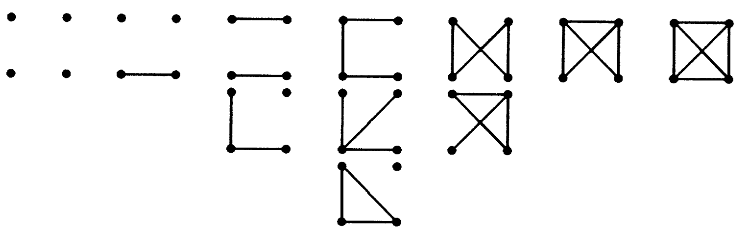
Die Anwendung der Strategie 2 erfolgt nun so: Die Wahl von

$$X := \binom{P}{2}, \quad G := S_{\binom{P}{2}}, \quad U := S_P$$

($S_{\binom{P}{2}}$ ist auf der Menge der Graphen auf P mit k Kanten transitiv!) ergibt nach dem Fundamentallemma eine Bijektion

Graphen mit p Punkten und k Kanten $\rightarrow S_P \backslash S_{\binom{P}{2}} / (S_{\binom{P}{2}-k} \oplus S_k)$.

Berechnet man für alle k eine Transversale dieser Menge von Doppelnebenklassen, so kann man aus diesen Transversalen durch Rückübersetzen alle Graphen mit p Punkten gewinnen. Die Abbildung zeigt die Graphen mit 4 Punkten, sortiert nach Kantenzahl.



Ein *Linearer Code*[2] ist ein Unterraum eines endlichen Vektorraums

$$Y^X := GF(q)^n.$$

Die Gesamtheit aller (n, k)-Codes in $GF(q)^n$ ist die Menge $\mathcal{U}(n, k, q)$, die aus allen Unterräumen der Dimension k besteht. Solche linearen Codes sind sehr nützlich, vor allem dienen sie sehr gut als *fehlerkorrigierende Codes.* Diese Korrektureigenschaften benutzen die *Hamming-Metrik:* Für Vektoren a und b in $GF(q)^n$ setzt man

$$d(a, b) := |\{i \mid a_i \neq b_i\}|.$$

Ein wichtiger Indikator für die Qualität eines fehlerkorrigierenden Codes C ist seine *Minimaldistanz*

$$d := \min \{d(a, b) \mid a, b \in C, a \neq b\}.$$

Ein Code $C \in GF(q)^n$ der Dimension k heißt deshalb (n, k, d)-Code genau dann, wenn d die Minimaldistanz ist. Die Qualität eines (n, k, d)-Codes hängt vom

[2] Dieses Beispiel mußte beim Vortrag in Jena leider aus Zeitgründen wegfallen.

Quotienten k/n und von der Minimaldistanz d ab. Um einen Überblick über die Gesamtheit der linearen Codes zu erhalten, die in einem endlichen Vektorraum $GF(q)^n$ liegen, führen wir jetzt eine geeignete Äquivalenzrelation auf der Gesamtheit aller Codes ein. Und da wir Codes anhand metrischer Eigenschaften unterscheiden, tun wir dies durch Benutzung der Gruppe aller *Isometrien* von $GF(q)^n$, definieren also – gemäß oben erwähnter Strategie – die Äquivalenzrelation gleich durch eine Gruppe und deren Operation auf dem Vektorraum $GF(q)^n$. Die Isometriegruppe besteht aus den Matrizen, die in jeder ihrer n Zeilen und Spalten genau einen von 0 verschiedenen Eintrag enthalten. Man kann nämlich leicht sehen, daß die einzigen Isometrien simultane Permutationen der Koordinaten der Vektoren sind, zusammen mit simultanen Multiplikationen von Koordinaten mit von 0 verschiedenen Körperelementen. Diese Gruppe ist gerade das Kranzprodukt

$$H \wr_X G := GF(q)^* \wr S_n.$$

Wir wiederholen seine Operation auf $GF(q)^n$, die wir oben als pragmatisches Beispiel eingeführt haben:

$$(\psi, \pi)(a_1, \ldots, a_n) := (\psi(1)a_{\pi^{-1}1}, \ldots, \psi(n)a_{\pi^{-1}n}).$$

Wir sagen, zwei lineare Codes sind genau dann *äquivalent,* wenn sie isometrisch sind. Die Menge der Äquivalenzklassen linearer Codes ist also gerade die Menge aller Bahnen der Isometriegruppe auf dem Verband

$$\mathcal{L}(n,q) = \bigcup_k \mathcal{U}(n,k,q)$$

aller Unterräume. Die Menge der Bahnen der Isometriegruppe kann dementsprechend nach der Dimension der Unterräume aufgegliedert werden:

5.1 $$GF(q)^* \wr S_n \backslash\!\backslash \mathcal{L}(n,q) = \bigcup_k GF(q)^* \wr S_n \backslash\!\backslash \mathcal{U}(n,k,q).$$

Die Doppelnebenklassenstrategie führt auch hier zu einer Bijektion: Da die volle lineare Gruppe $GL_n(q)$ *transitiv* auf der Menge der Unterräume der Dimension k operiert, erhalten wir, wenn $GL_n(q)_{C_0}$ den Stabilisator eines festen Unterraums C_0 der Dimension k bezeichnet, eine Bijektion

Isometrieklassen von (n, k)-Codes $\to GF(q)^* \wr S_n \backslash GL_n(q) / GL_n(q)_{C_0}$.

Hier haben wir jedoch das Problem, daß die Mengen $\mathcal{U}(n,k,q)$ zu abstrakt sind, um nach dem gegenwärtigen Stand der Programmiertechnik direkt von einem Computer verarbeitet werden zu können. Wir müssen vielmehr Basen einführen, und die Vektorräume durch Generatormatrizen ersetzen, d. h. durch Matrizen, deren Zeilen eine Basis des in Frage stehenden Unterraums bilden. Jede solche Matrix ist eine $k \times n$-Matrix über $GF(q)$. Sie kann also als ein Element der Menge

$$(GF(q)^k)^n$$

betrachtet werden. Wir haben jedoch zu beachten, daß jeder Unterraum viele Basen hat und im allgemeinen noch mehr Generatormatrizen besitzt. Die volle lineare Gruppe $GL_k(q)$ ist jedoch transitiv auf der Menge aller Basen eines solchen Unterraums, weshalb wir uns jetzt mit Bahnen beschäftigen, nicht nur der Isometriegruppe, sondern des direkten Produkts von dieser mit $GL_k(q)$. Wir betrachten also jetzt die Bahnenmenge

$$GL_k(q) \times GF(q)^* \wr S_n \backslash\backslash (GF(q)^k)^n.$$

Offensichtlich können wir uns aus codierungstheoretischen Gründen auf Generatormatrizen beschränken, die keinerlei Spalte enthalten, die aus lauter Nullen besteht. Wir können uns deshalb auf die folgende Menge von Bahnen beschränken:

$$GL_k(q) \times GF(q)^* \wr S_n \backslash\backslash (GF(q)^k \setminus \{0\})^n.$$

Jetzt sind wir aber in einer Position, die folgendes Resultat (von W. Lehmann) anzuwenden erlaubt:

Hilfssatz ([10]): *Die folgende Abbildung ist eine Bijektion:*

$$\Phi : H \wr_X G \backslash\backslash Y^X \to G \backslash\backslash (H \backslash\backslash Y)^X : H \wr_X G(f) \mapsto G(F),$$

wenn $F \in (H \backslash\backslash Y)^X$ *definiert wird durch* $F(x) := H(f(x))$.

Wir erhalten daraus eine Neuformulierung der Codes als Bahnenmenge

$$GL_k(q) \backslash\backslash GF(q)^* \wr S_n \backslash\backslash (GF(q)^k \setminus \{0\})^n,$$

aus der sich schließlich mit dem Hilfssatz die folgende Version ergibt:

$$GL_k(q) \backslash\backslash S_n \backslash\backslash (GF(q)^* \backslash\backslash GF(q)^k \setminus \{0\})^n.$$

Die innere Bahnenmenge der multiplikativen Gruppe kann durch die Menge der Abbildungen in den projektiven Raum als $P_{k-1}(q)$ ersetzt werden, denn jede solche Bahn ist gerade ein eindimensionaler Unterraum. Wir erhalten also letztendlich die folgende Bahnenmenge:

5.2 $$GL_k(q) \backslash\backslash (S_n \backslash\backslash P_{k-1}(q)^n).$$

Sie zeigt den engen Zusammenhang zwischen der Theorie der linearen Codes und der endlichen Geometrie. Wir können aber noch mehr ablesen. Die innere Bahnenmenge kann nämlich genau angegeben werden, denn eine Bahn von S_Y auf Y^X ist durch die Vielfachheiten $|f^{-1}(y)|$ charakterisiert, mit denen ihre Elemente f die Werte $y \in Y$ annehmen. Eine spezielle dieser Bahnen ist also die Mengen aller injektiven Abbildungen in den projektiven Raum. Sind diese Abbildungen zusätzlich noch surjektiv, dann sind diese Codes die sogenannten *Simplex-Codes.* Das sind die zu den *Hamming-Codes* dualen Codes. Obige Beschreibung der Isometrieklassen linearer Codes zeigt demnach *einerseits die Bedeutung der projektiven Räume für die Codierungstheorie und darüber hinaus auch die Sonderrolle, die die Simplexcodes und die Hammingcodes spielen!*

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung der Doppelnebenklassenstrategie zeigt deren Bedeutung für die *Datenreduktion* und führt uns auf eine weitere Strategie, die wir bei der Konstruktion der ersten 7-Designs mit Erfolg verwendet haben.

Ein $t-(v,k,\lambda)$-*Design* ist ein Paar $(V,\mathcal{B})$, bestehend aus einer Menge V von Punkten (vertices) und einer Menge $\mathcal{B}$ von Blöcken, mit

$$|V| = v, \mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}, \quad \forall\, T \in \binom{V}{k} : |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}| = \lambda.$$

Man kann diese Designs mit Hilfe einer Matrix $M_{t,k}^v$ beschreiben: Ihre Zeilen gehören zu den $T \in \binom{V}{t}$, ihre Spalten zu den $B \in \binom{V}{k}$, und die Elemente m_{TB}^v von $M_{t,k}^v$ sind so definiert:

$$m_{TB}^v := \begin{cases} 1, & \text{falls } T \subseteq B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein $t-(v,k,\lambda)$-Design $(V,\mathcal{B})$ ist demnach eine Teilmatrix von $M_{t,k}^v$, die gerade aus den Spalten besteht, die zu den Blöcken des Designs gehören. Dies wiederum kann man leicht in der Sprache der linearen Gleichungssysteme formulieren:

Folgerung: *Die $t-(v,k,\lambda)$-Designs mit Punktemenge V entsprechen den 0-1-Lösungen x des linearen Gleichungssystems*

$$M_{t,k}^v \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Blöcke des Designs zu x sind die k-Teilmengen von V, die durch die von Null verschiedenen Koordinaten von x bestimmt werden.

Bei der Suche nach 7-Designs hatte man schon seit vielen Jahren die Hoffnung, es könne $7-(33,8,\lambda)$-Designs geben, λ war aber unbekannt, auch das wohl ein Grund dafür, daß dieses Problem so lange offen blieb. Bei diesen Parametern erhält man eine Matrix $M_{7,8}^{33}$ mit etwa $6 \cdot 10^{13}$ Elementen, und es ist klar, daß die Suche nach 0-1-Lösungen einer Gleichung mit einer derart großen Koeffizientenmatrix hoffnungslos ist. Die Strategie, die hier dennoch zu einer Lösung führte ist hier die folgende:

• **Strategie 3:** *Man schränkt die Betrachtung bei zu umfangreichen Problemen auf Strukturen mit vorgegebener Stabilisatorklasse ein.*

Dieses Verfahren ist natürlich ziemlich riskant, wenn es um die Lösung von Existenzproblemen geht, denn es kann natürlich sehr leicht sein, daß es zu vorgegebener Konjugiertenklasse von Untergruppen *keine* Struktur von diesem Typ gibt. Aber es gibt auch andere Fälle, zu denen glücklicherweise gewisse 7-Designs gehören: Ein Element π der symmetrischen Gruppe S_V heißt genau dann ein *Automorphismus* des Designs $(V,\mathcal{B})$, wenn gilt

$$\pi\mathcal{B} := \{\pi B := \{\pi b \mid b \in B\} \mid B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}.$$

Eine Gruppe aus solchen Automorphismen heißt *eine Gruppe von Automorphismen* des Designs, und die maximale Gruppe dieser Art, also

$$Aut(V,\mathcal{B}) := \{\pi \in S_V \mid \pi\mathcal{B} = \mathcal{B}\},$$

heißt *die (volle) Automorphismengruppe* von $(V,\mathcal{B})$. Die Aufgabe ist, alle Designs mit vorgegebenen Parametern und vorgegebener Gruppe $A \leq Aut(V,\mathcal{B})$ zu ermitteln. (Das naheliegende weiterführende Problem der Bestimmung aller Designs mit $A = Aut(V,\mathcal{B})$ wollen wir hier nicht diskutieren, vgl. [15], [16].)

Um dieses Problem in die Reichweite moderner Computertechnik zu bringen, betrachtet man anstelle von $M_{t,k}^v$ die folgende wesentlich kleinere Matrix. Zu vorgegebener Untergruppe $A \leq S_V$ bildet man eine sogenannte *Kramer/Mesner-Matrix*

$$M_{t,k}^A := (m_{T,K}^A).$$

(Diese Matrix ist übrigens eine Teilmatrix der Matrix $A^\wedge$ zum Verband der Teilmengen von V, vgl. [11], [7], Kapitel 3.) T durchläuft dabei eine Transversale von $A \backslash\backslash \binom{V}{t}$ und K eine Transversale von $A \backslash\backslash \binom{V}{k}$. Die Einträge dieser Matrix werden wie folgt definiert:

$$m_{T,K}^A := |\{K' \in A(K) | T \subseteq K'\}|.$$

Das fundamentale Resultat ist

Der Satz von Kramer und Mesner *Die Menge aller $t-(v,k,\lambda)$-Designs mit A als einer Gruppe von Automorphismen ergibt sich aus der Menge aller 0-1-Lösungen x des linearen Gleichungssystems*

$$M_{t,k}^A \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Auch hier greift Strategie 2, denn sie liefert Bijektionen

$$A - \binom{V}{t} \to A \backslash S_V / S_{v-t} \oplus S_t, \quad A - \binom{V}{k} \to A \backslash S_V / S_{v-k} \oplus S_k.$$

Für die Parameter $t = 7, v = 33, k = 8$ und die Wahl von $A := P\Gamma L_2(32)$ ergibt das eine Matrix mit nur noch ca. $3 \cdot 10^3$ Einträgen, wir erhalten also eine Datenreduktion um den *Faktor* $2 \cdot 10^{10}$. Nachdem A. Betten die Kramer/Mesner-Matrix berechnet hatte, gelang es A. Wassermann mit Hilfe einer verbesserten Version des *LLL*-Algorithmus (zur Konstruktion kurzer Vektoren), eine Lösung zu finden, das weltweit erste 7-Design mit moderaten Parametern (vgl. [3], [4]). Mittlerweile hat sich herausgestellt, daß es zu diesen Parametern und dieser Symmetriegruppe insgesamt fast fünf Millionen nichtisomorpher Designs gibt (vgl. [17]). Darüberhinaus konnte für viele weitere Parametersätze die Existenz von 6- und 7-Designs nachgewiesen werden ([5]). Der systematischen Generierung von Designs mit vorgegebener Automorphismengruppe dient das in Bayreuth entwickelte Programmsystem DISCRETA (vgl. http://www.mathe2.uni-bayreuth.de).

6 Doppelnebenklassentransversalen

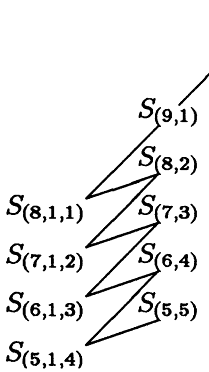
Es ist jetzt an der Zeit, über die Berechnung von Doppelnebenklassentransversalen zu reden. Einfachheitshalber wollen wir uns auf den Fall konzentrieren, der die Operationen der Form ${}_G(Y^X)$ abdeckt, also auf Doppelnebenklassenmengen der Form

$$\bar{G} \backslash S_X / \oplus_i S_{f^{-1}(i)}.$$

Zusätzlich wollen wir annehmen, daß $X = \{1, \ldots, n\}$, also $S_X = S_n$ gilt, und

$$\oplus_i S_{f^{-1}(i)} = S_{(a,b,c,\ldots)} = S_{\{1,\ldots,a\}} \oplus S_{\{a+1,\ldots,a+b\}} \oplus S_{\{a+b+1,\ldots,a+b+c\}} \oplus \ldots,$$

also eine sogenannte *Young-Untergruppe* von S_n ist. Die Methode zur Ermittlung von Transversalen von Doppelnebenklassen, die jetzt beschrieben werden soll, wurde von B. Schmalz erfunden und erfolgreich angewandt ([14], [15], [16]). Sie basiert auf der Beobachtung, daß $\bar{G} \setminus S_n / S_{(a,b,..)}$ als Menge von Bahnen von $\bar{G}$ auf $S_n / S_{(a,b,..)}$, einer Menge von Linksnebenklassen, aufgefaßt werden kann. Wir können uns einer Lösung des Problems dadurch nähern, daß wir von S_X / S_X (beachte, daß $S_X = S_{(n)}$ gilt) nach $S_X / S_{(a,b,...)}$ längs eines *Leporello* von Young-Untergruppen von S_n gehen. Was mit „Leporello" (= Faltblatt) gemeint ist, wird anhand folgenden Beispiels klar, dessen Anwendungen wir sofort beschreiben werden:

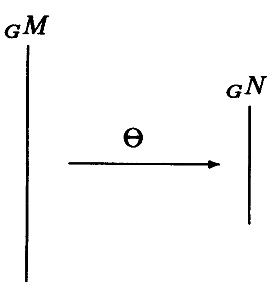


Diesen Leporello von Untergruppen der S_{10} kann man beispielsweise zur sukzessiven Berechnung von Transversalen von

$$S_5 \setminus S_{10} / S_{10}, \quad S_5 \setminus S_{10} / S_9 \oplus S_1, \quad \ldots, \quad S_5 \setminus S_{10} / S_5 \oplus S_5$$

verwenden, um daraus gemäß obiger Argumentation die Graphen mit 5 Punkten ($\binom{5}{2} = 10$) und 0, 1, 2, 3, 4, 5 Kanten zu ermitteln. (Die übrigen Graphen mit 6, 7, 8, 9, 10 Kanten können daraus mittels Komplementierung gewonnen werden.) In einem solchen Leporello von Untergruppen gibt es *Abwärtsschritte,* bei denen Nebenklassen der ersten Young-Untergruppe in solche der zweiten *zerfallen* können, entsprechend für die Bahnen von $\bar{G}$. Zur Bewältigung dieser Abwärtsschritte kann man folgendes allgemeine Prinzip heranziehen:

Das Homomorphie-Prinzip: *Seien $_GM$ und $_GN$ zwei Operationen von G und $\Theta : M \to N$ ein G-Homomorphismus, also*



mit $\Theta(gm) = g\Theta(m)$.

Weiterhin sei eine Transversale T der Bahnen von G auf N gegeben. Dann gilt:

- *Jede Bahn $\omega \in G \backslash\backslash M$ ist in genau einem der Urbilder $\Theta^{-1}(n)$ der Transversalenelemente $n \in T$ repräsentiert:*

$$\forall\, \omega \in G \backslash\backslash M \, \exists_1 \, n \in T : \omega \cap \Theta^{-1}(n) \neq \emptyset.$$

- *Die Operation von G auf dem Urbild von n kann durch die Operation des Stabilisators ersetzt werden:*

$$G \backslash\backslash \Theta^{-1}(n) = G_n \backslash\backslash \Theta^{-1}(n).$$

Demnach ergibt sich eine Transversale T_G von $G \backslash\backslash M$ als disjunkte Vereinigung von Transversalen der Urbilder:

$$T_G := \bigcup_{n \in T} T(n),$$

wobei $T(n)$ eine Transversale von $G_n \backslash\backslash \Theta^{-1}(n)$ bezeichne.

Für die weitere strukturtheoretische Behandlung und Verfeinerung dieser Methoden, für weitere Details und Anwendungen sei erneut auf die angegebene Literatur (insbesondere [7], [8] und [9]) verwiesen.

7 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, daß man in der Theorie und Praxis endlicher Strukturen zunächst einmal auf den Unterschied zwischen numerierten und unnumerierten Strukturen trifft. Unnumerierte Strukturen können oft mit Gewinn als Bahnen endlicher Gruppen auf endlichen Mengen beschrieben werden.

Das Fundamentallemma zeigte dann, wie Bahnentransversalen mit Doppelnebenklassen in bijektive Beziehung gebracht werden können. Schließlich zeigt die Verwendung von Leporellos aus Untergruppen, wie man Transversalen von Doppelnebenklassen schrittweise berechnen kann.

Die beschriebenen Methoden sind mit Erfolg zur Aufstellung von Katalogen endlicher unnumerierter Strukturen wie Graphen, Codes, Designs und Isomere verwendet worden, sie erweisen sich als grundlegend, vielseitig verwendbar und einfach zu formulieren. Natürlich mußte aus Platzgründen so manches an Verfeinerungen und Zwischenschritten unterdrückt werden, beispielsweise die gesamte Abzähltheorie mit dem Cauchy-Frobenius-Lemma, seine Verallgemeinerungen, die Theorie der erzeugenden Funktionen für die Anzahlen endlicher Strukturen, Anwendungen der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen, Schurpolynome usw.

Literatur

[1] Benecke, C.; Grund, R.; Hohberger, R.; Kerber, A.; Laue, R.; Wieland, T.: MOLGEN, a Computer Algebra System for the Generation of Molecular Graphs. In: Fleischer, J.; Grabmeier, J.; Hehl, F. W.; Küchlin, W. (Hrsg.): Computer Algebra in Science and Engineering, S. 260–272. Singapore: World Scientific 1995

[2] Bergeron, F.; Labelle, G.; Leroux, P.: Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes. Publication du LACIM, vol. 19, 1994

[3] Betten, A.; Kerber, A.; Kohnert, A.; Laue, R.; Wassermann, A.: Es gibt 7-Designs mit kleinen Parametern! Bayreuther Math. Schr. **49** (1995) 213

[4] Betten, A.; Kerber, A.; Kohnert, A.; Laue, R.; Wassermann, A.: The Discovery of Simple 7-Designs with Automorphism Group $P\Gamma L(2, 32)$. In: Cohen, G.; Giusti, M.; Mora, T. (Hrsg): Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Springer Lecture Notes in Computer Science **948** (1995) 131–145

[5] Betten, A.; Laue, R.; Wassermann, A.: Some simple 7-designs. To appear in: Proceedings of the First Pythagorean Conference, Spetses (Greece), June 1996, London Math. Soc. Lecture Notes

[6] Joyal, A.: Une théorie combinatoire des séries formelles. Advances in Mathematics **42** (1981) 1–82

[7] Kerber, A.: Algebraic Combinatorics Via Finite Group Actions. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1991

[8] Kerber, A.; Laue, R.: Group actions, double cosets, and homomorphisms: unifying concepts for the constructive theory of discrete structures. Erscheint in Acta Applicandae Mathematica, Sonderheft zur Kaloujnine-Gedächtnis-Tagung 1994

[9] Laue, R.: Construction of combinatorial objects – a tutorial. Bayreuther Mathematische Schriften **43** (1993) 53–96

[10] Lehmann, W.: Ein vereinheitlichender Ansatz für die Redfield-Pólya-de Bruijnsche Abzähltheorie. Dissertation, Aachen 1996

[11] Plesken, W.: Counting with groups and rings. J. Reine u. Angew. Mathematik **334** (1982) 40–68

[12] Ruch, E.; Hässelbarth, W.; Richter, B.: Doppelnebenklassen als Klassenbegriff und Nomenklaturprinzip für Isomere und ihre Abzählung. Theoretica Chimica Acta **19** (1970) 288–300

[13] Ruch, E.; Klein, D. J.: Double cosets in chemistry and physics. Theoretica Chimica Acta **63** (1983) 447–472

[14] Schmalz, B.: Verwendung von Untergruppenleitern zur Bestimmung von Doppelnebenklassen. Bayreuther Mathematische Schriften **31** (1990) 109–143

[15] Schmalz, B.: t-Designs zu vorgegebener Automorphismengruppe. Bayreuther Mathematische Schriften **41** (1992) 1–164

[16] Schmalz, B.: The t-designs with prescribed automorphism group, new simple 6-designs. J. Comb. Designs **1** (1993) 125–146

[17] Wassermann, A.: Finding simple t-designs with enumeration techniques. (Submitted to the Journal of Combinatorial Designs)

Prof. Dr. A. Kerber
Universität Bayreuth
Lehrstuhl II für Mathematik
D-95440 Bayreuth

(Eingegangen 31. 1. 1997, in revidierter Form 9. 4. 1997)

Buchbesprechungen

Avdonin, S. A., Ivanov, S. A., Families of Exponentials, Cambridge University Press 1995, 302 S., £ 35.00

Während die Entwicklung der Steuerungstheorie dynamischer Systeme endlich vieler Freiheitsgrade weit in das letzte Jahrhundert hineinreicht und als Regelungstheorie/technik – versinnbildlicht im Maxwellschen Fliehkraftregler – die technologische Nutzung vieler Energieressourcen erst möglich gemacht hat, sind Fragen nach Steuerung, Regulierung und Stabilisierung von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden (sogenannte „verteilte Systeme") insbesondere also von Systemen, die durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden, in den 40iger Jahren dieses Jahrhunderts erstmals diskutiert worden. Zunächst standen dabei Fragen nach optimaler Aufheizung resp. Abkühlung von Produkten in Schmelzöfen oder von Raketenoberflächen im ballistischen Flug, sowie Fragen nach optimaler Dämpfung von elastischen Schwingungen in mechanischen Bauteilen im Mittelpunkt des Interesses. Erst in den frühen sechziger Jahren entwickelte sich aus den versprengten, problemorientierten Ansätzen eine mathematische Theorie, die wesentlich zunächst auf die *Anwendung* der Resultate über nichtharmonische Fourierreihen fixiert war. Unter Ausnutzung der Halbgruppentheorie in Banachräumen wurden Fragen nach Steuerbarkeit/Erreichbarkeit von Zuständen als Charakterisierung des Bildbereichs von (zunächst linearen) Operatoren mit spezieller Struktur verstanden. In der dadurch möglichen abstrakten Operatorschreibweise entsprach (entspricht) die Theorie in vielen Aspekten der korrespondierenden endlich-dimensionalen Steuerungstheorie, und dieser Umstand hat eine unübersehbare Fülle von Veröffentlichungen, im Versuch, jenen endlichdimensionalen Methoden nachzutasten, nach sich gezogen. Erst gegen Ende der achtziger Jahre hat sich das Interesse den spezifischen Methoden der partiellen Differentialgleichungen – in Theorie und Numerik – zugewandt und insbesondere in der Verwendung der „mikrolokalen Analysis" ein reiches Instrumentarium erschlossen.

Gleichwohl hat sich in jüngster Zeit gezeigt, daß die Momententheorie keinesfalls ihre Relevanz eingebüßt hat, daß mit ihrer Hilfe auch mehrdimensionale Steuerungsprobleme zugänglich, und scharfe Regularitätsaussagen möglich sind, wo andere Theorieansätze versagen oder umständlich sind.

Die Autoren haben in diesem Buch eine erste umfassende Darstellung der Momententheorie der *vektorwertigen Exponentialsysteme* aus einer „russischen Tradition" heraus in englischer Sprache vorgelegt und erschließen damit einer großen Leserschaft eine Fülle von Resultaten, die zuvor nur mit großer Mühe aus einzelnen, teils schwer zugänglichen Originalarbeiten zusammengetragen werden mußten. Es ist in weiten Zügen eine Übersetzung eines 1989 erschienenen Buches derselben Autoren aus dem Russischen und wurde von Vielen mit Spannung erwartet. Die Erwartungen wurden insbesondere dadurch noch übertroffen, daß die Autoren, in kritischer Auseinandersetzung mit den jüngsten Entwicklungen der Steuerungstheorie partieller Differentialgleichungen in den „westlichen Ländern", den Inhalt wesentlich erweitert und damit die Potentialität der Momententheorie in ein neues Licht gestellt haben.

Das Buch ist in 7 Kapitel untergliedert, wobei das zweite Kapitel über die Familien vektorwertiger Exponentiale den Kern der Theorie bildet. Besonders zu begrüßen ist eine sehr ausführliche (17seitige) Einleitung, die den Leser in die Problematik einführt und eine interessante Gegenüberstellung der Entwicklung der Theorie in der damaligen Sowjet-Union und den westlichen Ländern enthält. Hier wird bereits ein „Fahrplan" erkennbar, nach dem das Buch organisiert ist: verschiedenen „Graden" der linearen Unabhängigkeit der Exponentialfamilien können verschiedene „Grade" der Steuerbarkeit linearer Systeme zugeordnet werden. Neben der blanken linearen Unabhängigkeit wird von W-unabhängigen Familien $\{\xi_n\}$ gesprochen, bei denen die schwache Konvergenz von $\sum c_n\xi_n$ gegen 0 das Verschwinden aller Koeffizienten c_n nach sich zieht. Es zeigt sich, daß diese Situation die approximative Steuerbarkeit (Dichtheit des Bildes der Steuerungs-Zustandsabbildung) charakterisiert. Im Lichte der partiellen Differentialgleichungen entspricht dies einem Eindeutigkeitsresultat, wie es für komplexere Geometrien etwa aus dem Holmgremschen Satz gefolgert werden kann. Die stärkere M-Unabhängigkeit (Minimalität) bezeichnet die Situation, in der jedes Element ξ_n nicht im linearen Abschluß der übrigen Elemente liegt. Diese Eigenschaft ermöglicht die Konstruktion eines Biorthogonalsystems, mit Hilfe dessen sich die sogenannte spektrale Steuerbarkeit erweisen läßt: jede (endliche) Linearkombination der Familie ist steuerbar (erreichbar). Um schließlich die Abgeschlossenheit des Bildraumes jener Steuerungs-Zustandsabbildung und damit die sogenannte exakte Steuerbarkeit zu sichern, benötigt man den Begriff der Riesz-Basis. Diese letzte Eigenschaft stiftet eine Äquivalenz von Normen zwischen dem zugrundliegenden Hilbertraum und Folgenräumen bezüglich der Koeffizienten c_n. Die entsprechenden wechselseitigen Ungleichungen zwischen den Normen spiegeln sich in der Sprache der partiellen Differentialgleichungen in sogenannten Energieabschätzungen wieder.

Nach einer kurzen Einführung in Grundtatsachen aus der Hilbertraumtheorie (Kapitel I) wird im Kapitel II die Theorie der Hardy-Klassen entwickelt, werden zunächst Vektor-Exponentialfamilien auf der Halbachse und sodann qua Projektion auf dem endlichen Intervall betrachtet. Mit diesem umfangreichen und tiefliegenden Instrumentarium aus der komplexen Analysis (→ innere/äußere Zerlegungen, Nagy-Foias-Theorie, Blaschke-Produkte, Carleson-Mengen, Cartwright-Klassen etc.) werden sodann die oben erwähnten Eigenschaften charakterisiert. Das dritte Kapitel stellt die formale Umsetzung in die Sprache der Steuerungstheorie zur Verfügung. Die Anwendungen finden sich dann im Kapitel IV und Kapitel V mit Bezug auf parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen. Das Kapitel VI geht insbesondere auf die Steuerung von Membranschwingungen ein. Hier wird mit dem alten Vorurteil aufgeräumt, Momententheorie sei im Kern nur für eindimensionale Probleme von Nutzen. Es werden dort scharfe Regularitätsaussagen bewiesen und einschlägige Vermutungen über die Steuerbarkeit von niederdimensionalen Mannigfaltigkeiten aus widerlegt. Das Buch schließt mit einem Kapitel über gekoppelte Systeme schwingender Saiten.

Der Text ist sehr gut lesbar, die Beweise sind in aller Regel so ausgeführt, daß man ihn als Lehrbuch für Studenten im Hauptstudium verwenden kann. In jedem Fall ist es nicht nur für Spezialisten von großem Wert, sondern auch für solche Leser, die an Querverbindungen zwischen partiellen Differentialgleichungen, Steuerungstheorie und komplexer Analysis interessiert sind.

Bayreuth G. Leugering

Berezansky, Yu. M., Kondratiev, Yu. G., Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers 1995, xvii + 576 S. (Vol. 12/1), viii + 432 S. (Vol. 12/2), gebunden, US-$ 495.–, UK-£ 320.–

Die Geschichte dieses zweibändigen Werks ist schon alt. Als einen unter mehreren Startpunkten kann man Ju. M. Berezanskijs Bücher „Die Entwicklung selbstadjungierter Operatoren nach Eigenfunktionen" [Russisch; Kiev: Naukova Dumka 1966; Zbl. 167.429] und „Selbstadjungierte Operatoren in Räumen von Funktionen unendlich vieler Variabler" [Russisch; Kiev: Naukova Dumka 1978; Zbl. 449.47001; Engl. Übersetzung: Providence: Amer. Math. Soc. 1986; Zbl. 596.47019] ansehen, in denen schon eine ausführliche Darstellung der Spektralanalysis selbstadjungierter Operatoren in Tensorprodukten von Hilberträumen (vom Autor „Räume von Funktionen unendlich vieler Variabler" genannt) gegeben wird. Vor 8 Jahren erschien dann das Buch „Spektralmethoden der unendlichdimensionalen Analysis" [Russisch; Kiev: Naukova Dumka 1988; Zbl. 707.47001] von Ju. M. Berezanskij und Ju. G. Kondrat'ev, dessen überarbeitete, erweiterte und ins Englische übersetzte Fassung hier zu besprechen ist.

Das Buch besteht aus 7 Kapiteln, getrennt nach Kapitel 1 bis 4 (Band I) und 5 bis 7 (Band II). Das erste Kapitel stellt einige funktionalanalytische Hilfsmittel zusammen, vor allem Ergebnisse über endliche und unendliche Tensorprodukte sowie (unbeschränkte) Bilinearformen. Mit dem zweiten Kapitel beginnen die Autoren dann das, was sie unendlichdimensionale Analysis nennen. Nach der Bereitstellung einiger maßtheoretischer Grundlagen werden der Fock-Raum und die Fourier-Wiener-Transformation eingeführt. Der Rest des zweiten Kapitels ist dem ausführlichen Studium glatter und verallgemeinerter Funktionen mit unendlich vielen Variablen gewidmet, und zwar sowohl in koordinatenbezogener Form (Tensorprodukt-Darstellung) als auch in koordinatenfreier Form (invariante Darstellung).

Das dritte Kapitel ist kommutierenden Familien normaler (insbesondere selbstadjungierter) Operatoren gewidmet: Zerlegung der Eins für Operatoren, Darstellung der Identität als Integral über (verallgemeinerte) Projektoren auf (verallgemeinerte) Eigenräume, Zerlegung eines Hilbertraums in solche Eigenräume, Spektraleigenschaften von Carleman-Operatoren. Anwendungen des Spektralprojektionssatzes stehen im Mittelpunkt des vierten Kapitels. Zunächst diskutieren die Autoren den Fall, daß die betrachtete kommutierende Operatorenfamilie eine algebraische Struktur (Gruppe, Halbgruppe, Vektorraum usw.) hat; ein typisches Beispiel liefern Sätze vom Stone-Typ über die unitäre Repräsentation eines reellen Hilbertraums. Anschließend besprechen die Autoren kompliziertere Operatorenfamilien; unter der Voraussetzung, daß eine Operatorenfamilie als hyperkomplexes System mit einer lokalkompakten Basis realisiert werden kann, erhalten sie eine Darstellung der Operatoren einer solchen Familie als Spektralintegral. Zuletzt wird noch der Fall nichtkommutierender Operatoren diskutiert.

Das fünfte Kapitel ist Anwendungen des Spektralprojektionssatzes in der (unendlichdimensionalen) harmonischen Analysis gewidmet. Zunächst werden einige Kriterien für die Selbstadjungiertheit eines Operators gegeben, z. B. solche, die aus der Betrachtung der zugehörigen Evolutionsgleichungen folgen. Anschließend wird ein gewisses unendlichdimensionales Momentenproblem betrachtet, nämlich das Problem der Darstellbarkeit von Funktionalen mit einer (unbegrenzt) wachsenden Zahl von Variablen als Moment eines geeigneten Maßes in einem unendlichdimensionalen Raum. Schließlich geben die Autoren ein allgemeines Verfahren an, mit dem die Spektraldarstellung positivdefiniter Kerne mittels verallgemeinerter Eigenvektoren der betrachteten kommutierenden Operatorenfamilien konstruiert werden kann.

Die letzten beiden Kapitel stellen nach Ansicht des Rezensenten das Herzstück des zweibändigen Werkes dar; sie diskutieren die Anwendbarkeit der bisher erzielten theoretischen Ergebnisse auf „unendlichdimensionale" Differentialoperatoren. Im sechsten Kapitel studieren die Autoren elliptische Operatoren, speziell Quantisierungsoperatoren von Schrödinger-Darstellungen und ihre Störungen durch Potentiale (Mehler-Formel, zweite Quantisierung, zugehörige Funktionalintegrale, Kato-Ungleichung, Feynman-Kac-Formel). Anschließend werden Zusammenhänge zwischen Potentialstörungen der zweiten Quantisierungsoperatoren und unendlichdimensionalen elliptischen Operatoren zweiter Ordnung hergestellt, die von Dirichlet-Formen erzeugt werden. Der Rest des Kapitels befaßt sich mit Differentialgleichungen im Zusammenhang mit Dirichlet-Operatoren. Insbesondere beweisen die Autoren, daß die Störungen der entsprechenden hyperbolischen Gleichungen endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben; dies macht die Anwendung klassischer Selbstadjungiertheits-Kriterien möglich.

Im siebten Kapitel werden einige der Ergebnisse auf Modelle der Quantenfeldtheorie und statistischen Quantenphysik angewendet. Zunächst wird eine allgemeine Operatordarstellung formaler Hamiltonsysteme solcher Modelle angegeben, die Dirichlet-Operatoren sind. Es wird ebenso gezeigt, ob und wie (renormalisierte) Hamiltonsysteme als Integralfunktionale konstruiert werden können. Einige der im sechsten Kapitel diskutierten Operatordarstellungen werden anhand von Modellen linearer oder quadratischer Feldtheorien illustriert. Dies wird auf sogenannte „harmonische Systeme" angewendet, die gekoppelte Oszillatoren beschreiben. Anwendungen der oben diskutierten Dirichlet-Operatoren auf Spektraleigenschaften von Systemen mit unendlich vielen Teilchen werden im letzten Teil gegeben. Dies erfordert wiederum den Aufbau einer „nichtklassischen" Streutheorie, die Potentialstörungen harmonischer Systeme einschließt. Schließlich werden einige Beispiele von Potentialen betrachtet, bei denen die Modelle explizit lösbar sind (d. h. bei denen die zugehörigen Wellenoperatoren explizit angegeben werden können).

Jeder Band schließt mit einer Sammlung von Literaturhinweisen und einem Literaturverzeichnis ab. Die inzwischen verbreitete Praxis, Literaturhinweise nicht über den Text verstreut, sondern am Schluß gebündelt zu geben, ist nach Ansicht des Rezensenten hilfreich und vernünftig. Positiv hervorzuheben ist auch, daß die Autoren sich entschlossen haben, hier – im Gegensatz zum russischen Vorläufer von 1988 – endlich einmal auch einige englischsprachige Arbeiten und Bücher, die ja von russischen Autoren oft immer noch hartnäckig ignoriert werden, in das Literaturverzeichnis aufzunehmen. Leider zitieren die Autoren diese englischsprachige Literatur – wenn überhaupt – nur kurz in der erwähnten Sammlung von Literaturhinweisen, statt sich im Text selbst an passender Stelle damit auseinanderzusetzen. Diese (vorsätzlich?) verpaßte Chance mindert den Wert der Bücher natürlich erheblich und macht diese doch wieder nur zu einer Darstellung des „Russian state of the art". Bedauerlich ist auch, daß im zweiten Band zwar ein Stichwort- und Symbolverzeichnis vorhanden ist, im ersten Band jedoch nicht.

Es ist den Autoren, die zu den weltweit führenden Vertretern auf dem Gebiet der „unendlichdimensionalen" Spektralmethoden gehören, gelungen, ein umfassendes Werk über die Entwicklung dieses Gebietes vor allem der letzten 25 Jahre (und, wie gesagt, vor allem in der Sowjetunion) zu geben. Westliche Spezialisten, die sich hierüber ausführlich informieren wollen, mögen das Werk nützlich finden. Leider wird der Preis, der inzwischen selbst die Schmerzgrenze der meisten Bibliotheken überschritten haben dürfte, einer weiten Verbreitung entgegenstehen.

Würzburg J. Appell

Borwein, P., Erdélyi, T., Polynomials and Polynomial Inequalities (Graduate Texts in Mathematics 161), New York u. a.: Springer-Verlag 1995, 480 S., DM 98,–

Das vorliegende Buch beschäftigt sich mit der analytischen Behandlung von Polynomen in einer Veränderlichen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Auch Erweiterungen auf rationale Funktionen und Analoga für trigonometrische Polynome finden Berücksichtigung.

Dieses Gebiet hat historisch gesehen zwei völlig unterschiedliche Wurzeln. Die eine ist das *Nullstellenproblem,* das im letzten Jahrhundert noch ganz zur Algebra gehörte, wie die großartigen Lehrbücher von Netto, Serret oder Weber zeigen, obwohl die Methoden überwiegend analytischer Natur sind. Die andere sind *Extremalprobleme,* bei denen das Polynom als Objekt einer Funktionenklasse betrachtet und sein Wachstums- und Approximationsverhalten studiert wird, was zu *Ungleichungen* führt. Dieses Teilgebiet beginnt mit Tschebyscheff 1853; es folgen 1885 der Weierstraßsche Approximationssatz und danach bedeutende Beiträge von Markoff und später von Bernstein.

Obwohl schon bald hervorragende Mathematiker wie etwa Schur oder Szegö es verstanden, beide Teile (Nullstellenproblem und Extremalprobleme) zu verbinden, ist in der Lehrbuchliteratur eine Trennung bis in die heutige Zeit sichtbar geblieben. Nachdem das Nullstellenproblem aus den Algebrabüchern verschwunden war, verselbständigte es sich in einigen wenigen Monographien (z. B. Dieudonné, Marden, Obreschkoff). Die Extremalprobleme fanden dagegen nur als Anhängsel zur Approximationstheorie eine bescheidene Berücksichtigung.

Neben einem erst 1994 erschienenen Buch von Milovanović, Mitrinović und Rassias gehört das vorliegende zu den ersten, in denen beide Zweige der Analysis der Polynome vereint behandelt werden. Der seltsame Titel (ein Gebiet wird neben ein Teilgebiet gestellt) soll vermutlich andeuten, daß zwar alle Aspekte angesprochen werden, der Schwerpunkt aber auf Extremalproblemen liegt. Dies ist eine sehr zu begrüßende Zielsetzung. Sie gewinnt noch besondere Attraktivität dadurch, daß sich die Autoren besonders um aktive moderne Forschungsthemen bemühen, die bisher noch nicht in Büchern Aufnahme fanden.

Das Buch besteht aus sieben Kapiteln und fünf Anhängen. Als einige Titel von Kapiteln seien genannt: Chap. 3 Chebyshev and Descartes Systems, Chap. 4 Denseness Questions, Chap. 6 Inequalities in Müntz Spaces, Chap. 7 Inequalities for Rational Function Spaces. Sie lassen eine Ausrichtung auf moderne Approximationstheorie erkennen, während sich die übrigen drei Kapitel mehr einführendem und klassischem Stoff widmen. Zu den behandelten Ungleichungen gehören die von Markoff, Bernstein, Tschebyscheff, Nikolskii, Remez, L^p-Varianten solcher Ungleichungen, Verschärfungen für Lückenpolynome (Müntz-Polynome) und Erweiterungen auf rationale Funktionen. Ein Anhang trägt den Titel „Algorithms and Computational Concerns". Dort findet man ein breites Spektrum von Algorithmen, z. B. neben dem Newton-Verfahren auch die schnelle Fourier-Transformation, den Remez-Algorithmus und verschiedene Nullstellenzählverfahren. Ferner werden Komplexitätsfragen große Aufmerksamkeit geschenkt. Die anderen vier Anhänge bringen Ergänzungen oder Anwendungen zu früheren Abschnitten.

Insgesamt fällt auf, daß sich die Stoffauswahl sehr stark an den Arbeitsgebieten der Autoren orientiert. Dies zeigt auch sehr deutlich das Literaturverzeichnis, wo die Verfasser mit 51 Arbeiten vertreten sind, die größtenteils aus den letzten fünf Jahren stammen, während z. B. Schur mit nur einer, Walsh mit vier und Erdös mit fünf Arbeiten vorkommen. Dank der vielseitigen Interessen der Autoren besitzt das Buch dennoch eine erstaunliche Breite.

Eine weitere Besonderheit soll nun diskutiert werden. Es läßt sich allgemein feststellen, daß nordamerikanische Autoren selbst bei Monographien über ein kaum in der Lehre etabliertes Gebiet eine starke Vorliebe für Übungsaufgaben zeigen. Das vorliegende Buch erreicht in dieser Hinsicht einen neuen Höhepunkt. Wie die Autoren selbst hervorheben besteht mehr als die Hälfte ihres Buches aus „Exercises". Sie sehen dabei im bekannten Werk von Pólya und Szegö (Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2 Bände) ein gewisses Vorbild.

Der typische Aufbau eines Abschnitts ist folgendermaßen. Auf etwa 40% seines Gesamtumfangs werden Begriffe eingeführt und grundlegende Sätze bewiesen, wobei auch hier schon öfters lästige Teile eines Beweises auf spätere Übungsaufgaben abgeschoben werden. Die restlichen etwa 60% beginnen unter der Überschrift „Comments, Exercises, and Examples" mit knappen, aber sehr interessanten historischen Bemerkungen und Literaturhinweisen (meist nicht mehr als 15 Zeilen). Danach folgen zirka 10 bis 20 mit E markierte Absätze. Sie sollen manchmal als „Example", überwiegend jedoch als „Exercise" verstanden werden. Dabei handelt es sich weniger um Folgerungen aus den bewiesenen Sätzen, sondern vorwiegend um neue, der Originalliteratur entnommene Sätze, zu denen dem Leser mit mehrstufigen Anleitungen ein Beweis entlockt wird. Öfters ist auch, wie schon angedeutet, eine Lücke in einem früheren Beweis zu schließen. Manchmal geben die Autoren zu einer Aufgabe selbst eine vollständige Lösung an, während sie in einigen anderen Fällen den Leser mit einer Literaturangabe zum Studium der Quellen ermutigen wollen. Letztlich erwarten sie aber gar nicht, daß man ihre Aufgaben wirklich löst. Die Beschäftigung mit den E-Absätzen darf sich auf ein „browsing" (Originalton) beschränken.

Mich hat die starke Einbindung und Aktivierung des Lesers zunächst fasziniert, in ihrer Unverbindlichkeit dann aber doch verunsichert. Für einen Test nahm ich mir zufällig eine Aufgabe auf Seite 18 vor, in der eine Ungleichung von Schur über die Anzahl der positiven reellen Nullstellen eines Polynoms zu beweisen ist. Es zeigt sich, daß man bereits im zweiten Schritt eine andere Aufgabe benötigt, die erst auf Seite 178 gestellt wird. Ich befürchte, daß ein Student, der noch keinen Überblick über das gesamte Gebiet hat, damit überfordert wird.

Ich meine, man sollte die E-Absätze als *Ergänzungen* ansehen, mit denen weitere interessante Ergebnisse nur mit einer Beweisskizze (als solche kann man die Anleitungen ansehen) angeboten werden. Tatsächlich wird nämlich so das Buch auf eine elegante Weise in seinem Stoffumfang erweitert, wobei Beweisschritte sichtbar werden, während die Last der technischen Details entfällt. Zum Beispiel bringt der nur 23 Seiten umfassende Abschnitt über orthogonale Polynome Ergebnisse, die selbst in Monographien dieses Themas nicht Standard sind: die Lösbarkeit des Momentenproblems, Auswahl- und Konvergenzsatz von Helly und den Satz von Favard, wonach eine Polynomfolge dann und nur dann orthogonal ist, wenn sie einer gewissen dreigliedrigen Rekursionsformel genügt. Dies alles als Übungsaufgaben! Bewiesen wird dagegen das unseren Studenten schon von den Grundvorlesungen her bekannte Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt.

Insgesamt erstreckt sich das Buch auf ein umfangreiches Stoffgebiet, wie es die Überschriften der Kapitel nicht erahnen lassen. Allerdings werden viele Bereiche nur kurz gestreift. Zum Beispiel ist das für Ingenieure wichtige Routh-Hurwitz-Problem nur im Anhang durch eine Aufgabe über den Cauchy-Index berührt. Die vorhandenen Bücher über Polynome behalten weitgehend ihren Rang. Dies ist aber ganz im Sinne der Autoren, denn sie betonen in ihrem Vorwort, daß sie keines der bekannten Bücher neu schreiben wollten. Die Bedeutung des vorliegenden Buches sehe ich vorrangig in der Erschließung und Kultivierung von neuen oder zu Unrecht unbeachtet gebliebenen alten Forschungsbeiträgen.

Das Buch gehört in jede mathematische Institutsbibliothek. Vorstellbar ist eine Verwendung in Seminaren, wobei E-Absätze zu Vorträgen ausgearbeitet werden könnten. Wer sich für konkrete Probleme innerhalb der modernen Approximationstheorie interessiert, sollte sich das Buch selbst anschaffen. Er erwirbt eine Fundgrube, in der sich viele interessante Sachen entdecken lassen. Als ergänzende Literatur ist das Buch ferner für alle Anwender von Polynomen zu empfehlen.

Erlangen G. Schmeißer

Chung, K. L., Brownian Motion to Schrödinger's Equation (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 312), Berlin u. a.: Springer 1995, 292 S., DM 148,–

Der Titel dieses neuen Buches suggeriert eine direkte Fortsetzung von Chung's „Lectures from Markov Processes to Brownian Motion", die ebenfalls als Band der „Grundlehren der Mathematik" erschienen sind. Das trifft aber, wie Chung selber im Vorwort vermerkt, nur sehr eingeschränkt zu. Während Chung's vorheriges Lehrbuch ein großes, klassisches Teilgebiet der Mathematik behandelt, ist das neue Buch von Chung und Zhao im wesentlichen einem einzigen, relativ speziellem Thema gewidmet.

Es geht, wie der Titel bereits sagt, um den Zusammenhang zwischen der *Brownschen Bewegung* (P^x, X_t) und der *Schrödinger-Gleichung* $(\frac{1}{2}\Delta + q)u = 0$ auf dem R^d. Genauer gesagt, geht es um Eigenschaften der *gestoppten* Brownschen Bewegung auf einem Gebiet $D \subset R^d$ und um deren Zusammenhang mit der Schrödinger-Gleichung $(\frac{1}{2}\Delta + q)$ $u = 0$ auf D mit Dirichletschen Randbedingungen. Der üblicherweise im Vordergrund stehende Fall $D = R^d$ spielt in diesem Buch praktisch keine Rolle – getreu dem Credo der Autoren: *Time must have a stop!*

Allgemein bekannt ist ja die sogenannte *Feynman-Kac-Formel,* die beispielsweise für beschränktes q besagt, daß durch

$$(1) \qquad u(.) \mapsto P_t^q u(.) = E^{\cdot}\left(\exp\left[\int_0^t q(X_s)ds\right] \cdot u(X_t)\right)$$

eine Halbgruppe definiert wird, deren Erzeuger genau der Schrödinger-Operator $\frac{1}{2}\Delta + q$ ist. Zu beachten dabei ist, daß diese Halbgruppe zwar i.a. nicht mehr kontrahierend ist, zumindest aber noch beschränkt ist und zwar auf jedem $L^p(R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, durch

$$\| P_t^q \|_{p,p} \leq \sup_x E^x \left(\exp\left[\int_0^t q(X_s)\, ds\right]\right) \leq \exp\left[\| q \|_\infty \cdot t\right].$$

Ein völlig anderes Bild ergibt sich, wenn man in (1) die feste Zeit t durch eine *zufällige Zeit* τ ersetzt, etwa durch den ersten Zeitpunkt τ_D, zu dem die Brownsche Bewegung aus einem gegebenen, beschränkten Gebiet $D \subset R^d$ austritt. Hier tritt ein zunächst überraschendes Phänomen auf. Der Ausdruck

$$(2) \qquad E^x\left(\exp\left[\int_0^{\tau_D} q(X_s)\, ds\right]\right),$$

der (betrachtet als Funktion des Startpunktes x) als *Gauge-Funktion* bezeichnet wird, muß keineswegs endlich sein. Das hat weder mit „Singularitäten" von q noch mit „Irregularitäten" von D zu tun. Für konstantes $q \equiv \alpha$ etwa ist die Gauge-Funktion gegeben durch den Erwartungswert $E^x(\exp[\alpha \cdot \tau_D])$, der unendlich sein kann, obwohl natürlich $E^x(\tau_D) < \infty$ ist. Tatsächlich existiert stets eine Zahl $0 < \alpha_D < \infty$, so daß

$$(3) \qquad E^x(\exp[\alpha \cdot \tau_D]) < \infty \quad \text{und} \quad E^x(\exp[\alpha' \cdot \tau_D]) = \infty$$

für alle $x \in D$ und $\alpha < \alpha_D \leq \alpha'$.

Das *Gauge-Theorem* von Chung und Rao aus dem Jahre 1981 besagt nun, daß die Gauge-Funktion (2) in *D entweder* beschränkt *oder* identisch $+\infty$ ist. Der Zusammenhang zur Schrödinger-Gleichung besteht darin, daß die Gauge-Funktion genau dann beschränkt ist, wenn das Spektrum des Schrödinger-Operators $\frac{1}{2}\Delta + q$ auf D mit Dirichletschen Randbedingungen im Intervall $(-\infty, 0)$ enthalten ist.

Dieses Gauge-Theorem zusammen mit seinen Varianten und Korollaren steht im Mittelpunkt des zu besprechenden Buches. K. L. Chung hat in den vergangenen 15 Jahren diesen Themenkreis zum Schwerpunkt seines wissenschaftlichen Schaffens gemacht. Es existieren mittlerweile zahlreiche Verschärfungen und Verallgemeinerungen. Im vorliegenden Buch beschränken sich die Autoren darauf, diese Resultate im Falle der Brownschen Bewegung auf dem R^d vorzustellen.

Die beiden ersten Kapitel des Buches dienen der *Einführung der Brownschen Bewegung* und bieten eine Zusammenfassung von Resultaten der *probabilistischen Potentialtheorie* auf dem R^d. Im dritten Kapitel wird die *Kato-Klasse* (die hier mit J statt wie üblicherweise mit K_d bezeichnet wird) definiert und es werden die im folgenden benötigten Resultate über Kato-Funktionen hergeleitet. Der erste Höhepunkt ist in Kapitel 4 erreicht, in dem das oben erwähnte *Gauge-Theorem* (zusammen mit zahlreichen Anwendungen) hergeleitet wird. Der vorgestellte Beweis beruht im wesentlichen darauf, daß zunächst für lokale Lösungen der Schrödinger-Gleichung $(\frac{1}{2}\Delta + q)u = 0$ in D eine *Harnack-Ungleichung* gezeigt wird.

In den Kapiteln 5–7 werden Verallgemeinerungen des Gauge-Theorems, insbesondere das sogenannte *konditionierte Gauge-Theorem,* behandelt. Letzteres besagt, daß die konditionierte Gauge-Funktion $E_y^x(\exp[\int_0^t q(X_s)\,ds])$ als Funktion des Startpunktes $x \in D$ *und* des Endpunktes $y \in \bar{D}$ der konditionierten Brownschen Bewegung (P_y^x, X_t) in $D \cup \{y\}$ entweder identisch $+\infty$ oder beschränkt ist. Und zwar ist sie genau dann beschränkt, wenn die Gauge-Funktion beschränkt ist. Die Beschränktheit der konditionierten Gauge-Funktion hat weitreichende Konsequenzen. So folgt etwa, daß die Green-Funktionen (und ebenso die Poisson- bzw. Martin-Kerne) für die Operatoren $\frac{1}{2}\Delta + q$ und $\frac{1}{2}\Delta$ auf D wechselseitig beschränkt sind.

Der Beweis des konditionierten Gauge-Theorems erfordert zusätzliche Regularitätsannahmen an den Rand von D (z. B. Lipschitz-Rand). In diesem Zusammenhang werden etliche schöne und interessante Resultate über die konditionierte Brownsche Bewegung in Lipschitz-Gebieten hergeleitet. Ebenso werden wichtige Abschätzungen für die klassische Green-Funktion in solchen Gebieten bewiesen, insbesondere das sogenannte 3G-Theorem.

Im achten Kapitel werden verschiedene weitere Entwicklungen und Fragestellungen aufgezeigt. Unter anderem wird auf die Frage eingegangen, inwieweit die Beschränktheit der Gauge-Funktion stabil ist unter („kleinen") Veränderungen des Gebietes D bzw. des Potentiales q.

Kapitel 9 schließlich beschäftigt sich mit dem bislang ausgeklammerten eindimensionalen Fall.

Am Ende der Kapitel sind historische Bemerkungen und Querverweise angefügt. Leider werden hier ebenso wie im Literaturverzeichnis etliche wichtige Beiträge (u. a. von Albeverio, Blanchard, Ma, Baxter, Dal Maso, Mosco, Feyel, de La Pradelle, Glover, Rao, Song) nicht erwähnt.

Das Buch ist sehr sorgfältig und genau geschrieben. Es enthält viel interessante Mathematik und ist angenehm zu lesen. Es ist ein schönes Buch.

Erlangen K. Th. Sturm

Diestel, J., Jarchow, H., Tonge, A., Absolutely Summing Operators (Cambridge studies in advanced mathematics 43), Cambridge University Press 1995, 474 S., £ 40.00

Nach Vorarbeiten in dem berühmten Grothendieckschen Résumé (1953/56), wurde die Theorie der absolut-p-summierenden Operatoren 1966 begründet. Sie hat sich in den zurückliegenden 30 Jahren so rasant entwickelt, daß heute das Erscheinen einer Monographie zu diesem Gebiet voll und ganz gerechtfertigt ist.

Der historische Ausgangspunkt war ein klassisches Theorem von Riemann, welches besagt, daß eine unendliche Reihe von Zahlen genau dann beliebig umgeordnet werden kann, wenn sie absolut konvergiert. Wird das Verhältnis von unbedingter und absoluter Konvergenz in Banach-Räumen untersucht, so ergibt sich nur im endlichdimensionalen Fall die Übereinstimmung der beiden Begriffe (Dvoretzky-Rogers-Theorem, 1950). Deshalb bietet es sich an, solche (linearen) Operatoren T zu betrachten, die alle unbedingt summierbare Folgen (x_k) so verbessern, daß ihre Bilder (Tx_k) sogar absolut summierbar sind. Wird noch ein Parameter $1 \leq p < \infty$ eingeführt, dann erhält man die absolut-p-summierenden Operatoren. Am handlichsten ist die folgende Definition:

Ein Operator T, der einen Banach-Raum X in einen Banach-Raum Y abbildet, heißt *absolut-p-summierend,* wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so daß für $x_1, \ldots, x_n \in X$

und $n = 1, 2, \ldots$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \| Tx_k \|^p\right)^{1/p} \leq c \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, a\rangle|^p\right)^{1/p} : \|a\| \leq 1 \right\}$$

gilt. Dabei steht $\langle x_k, a\rangle$ für den Wert des Funktionals a im Punkt x_k. Die kleinst mögliche Konstante $\pi_p(T)$ wird als die absolut-p-summierende Norm von T bezeichnet. Die Gesamtheit dieser Operatoren liefert ein Banach-Ideal Π_p. Besonders wichtig ist der Fall $p = 2$.

Die einparametrige Skala der Ideale Π_p wächst streng monoton mit p. Andererseits ergibt sich für zwei Hilbert-Räume H und K, daß $\Pi_p(H, K)$, unabhängig von p, stets aus den Hilbert-Schmidt-Operatoren besteht. Die Frage, für welche Banach-Räume X und Y die Idealkomponente $\Pi_p(X, Y)$ in gewissen Parameterbereichen nicht von p abhängt, war ein Grund für die Einführung der Banach-Räume vom Typ p und Cotyp q.

Das Buch bringt nicht nur eine übersichtliche und elegante Darstellung des soeben beschriebenen Ideenkreises, sondern noch viel mehr. Es werden diejenigen Operatoren untersucht, die sich über einen Raum L_p faktorisieren lassen, wobei wiederum der Fall $p = 2$ besonders interessant ist. Zur Beschreibung der speziellen Situation in Hilbert-Räumen dient ein Kapitel über Schatten-von-Neumann-Operatoren. Im Rahmen der Spur-Dualität behandeln die Autoren p-nukleare, (streng) p-integrale und q-dominante Operatoren. Man findet auch Betrachtungen über Banach-Räume mit lokal unbedingter Struktur. Abschließend sei noch ein Kapitel über „*Summing Algebras*" hervorgehoben, das erstmalig einen weiteren interessanten Aspekt der Theorie der absolut-p-summierenden Operatoren zusammenfaßt.

Durch die folgende Aufzählung von einigen Höhepunkten des Buches soll gleichzeitig die weitgefächerte Anwendbarkeit der absolut-p-summierenden Operatoren verdeutlicht werden. Das Grothendieck-Theorem besagt, daß alle Operatoren von L_1 in einen Hilbert-Raum absolut-1-summierend sind. Im Maurey-Pisier-Theorem werden die Banach-Räume vom Typ p oder Cotyp q geometrisch charakterisiert. Besondere Bedeutung haben diejenigen Banach-Räume, die keine Kopien von l_1^n bzw. l_∞^n gleichmäßig für $n = 1, 2, \ldots$ enthalten. Im ersten Fall spricht man von B-Konvexität, die nach dem Pisier-Theorem mit der K-Konvexität (Beschränktheit gewisser Rademacher-Projektoren) zusammenfällt. Die B-Konvexität spielt auch bei der Betrachtung von Zufallsvariablen mit Werten in Banach-Räumen eine wichtige Rolle, denn sie garantiert die Gültigkeit des Gesetzes der Großen Zahlen. Eine weitere Perle ist das Dvoretzky-Theorem, welches in jedem unendlichdimensionalen Banach-Raum gute euklidische Teilräume l_2^n liefert.

Von besonderem Nutzen für den Experten sind die „*Notes and Remarks*". Hier werden sowohl die historischen Wurzeln aufgezeigt als auch Weiterführungen und Querverbindungen diskutiert. Leider wird kaum auf ungelöste Probleme hingewiesen. Dadurch hätte man den jüngeren Mathematikern den Weg zu einem eigenen und interessanten Forschungsgebiet ebnen können. Der wesentliche Grund dafür ergibt sich wohl aus der Feststellung, daß die dargestellte Theorie schon einen sehr hohen Reifegrad erreicht hat. Trotzdem bleibt für die Zukunft noch viel zu tun!

Die amerikanisch/englischen Kollegen J. Diestel und A. Tonge haben mit ihrer bewußt etwas burschikosen Sprache erreicht, daß der Leser nicht durch allzu häufiges *we have, we get, we obtain,*... ermüdet. They keep the ball rolling. In einer gelungenen Synthese mit der deutschen (jetzt schweizerischen) Gründlichkeit von H. Jarchow ist ein Buch entstanden, das einen festen Platz im Grundbestand der Funktionalanalysis verdient. Ich habe es mit Freude und Anerkennung gelesen.

Jena A. Pietsch

Doering, Ch. R., Gibbon, J. D., Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations (Cambridge Texts in Applied Mathematics), Cambridge University Press 1995, 216 S., pb, £ 14.95

Seit den fundamentalen Arbeiten von Jean Leray vor etwa 60 Jahren ist in der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen die Frage nach der globalen Existenz glatter Lösungen im $\mathbb{R}^3$ ein offenes Problem. Eine negative Antwort würde implizieren, daß sich in endlicher Zeit Singularitäten in der Strömung entwickeln und daß Lösungen im Widerspruch zum Newtonschen Determinismus nicht eindeutig sind. Außerdem könnten sich in der Flüssigkeit Strukturen beliebig kleiner Ausdehnung (Turbulenz-Elemente) bilden. Damit stellt sich auch die Frage, ob die Navier-Stokes-Gleichungen das richtige Modell zur Beschreibung der Strömung inkompressibler, viskoser Flüssigkeiten sind. Der physikalische Hintergrund zur möglichen Entstehung von Singularitäten ist das Phänomen des „vortex stretching" im $\mathbb{R}^3$, das ein unendliches Anwachsen der Wirbelstärke $\omega = \operatorname{rot} u$ des Geschwindigkeitsfeldes u lokal nicht ausschließt. Mathematisch besteht die Schwierigkeit darin, den nichtlinearen Term $u \cdot \nabla u$ in den Navier-Stokes-Gleichungen bzw. den Term $\omega \cdot \nabla u$, der im $\mathbb{R}^2$ verschwindet, in der Wirbeltransportgleichung abzuschätzen.

In den ersten beiden Kapiteln des Buches werden nach der Herleitung der Euler- und der Navier-Stokes-Gleichungen sowie der Boussinesq-Approximation verschiedene dimensionslose Parameter wie z. B. Reynolds- und Grashof-Zahlen eingeführt. Ihre Bedeutung wird anschließend bei der Untersuchung linearer und nichtlinearer Stabilität verdeutlicht. Kapitel 3 liefert eine Einführung in die statistische Turbulenztherorie und definiert über eine Dimensionsanalyse Längenmaße wie z. B. die Kolmogorov-Länge als Maß für kleinste Strukturen in einer turbulenten Strömung. Diese Größen ergeben einen ersten Anhaltspunkt für die mögliche Zahl von Freiheitsgraden turbulenter Strömungen. Um zu präziseren und mathematisch fundierten Ergebnissen zu gelangen, wird in Kapitel 4 der moderne Begriff des Attraktors eines dynamischen Systems eingeführt und am Beispiel des Lorenz-Systems verdeutlicht.

In den folgenden Kapiteln steht die mathematische Untersuchung der Navier-Stokes-Gleichungen im räumlich periodischen Fall im Vordergrund. Es ist das Ziel, a-priori-Abschätzungen für u zu finden, um anschließend geeignete charakteristische Längen zu definieren und mit der Kolmogorov-Länge zu vergleichen. Nach einer Diskussion des Galerkin-Verfahrens und des Zusammenhangs zwischen Eindeutigkeit und Regularität wird in Kapitel 6 eine unendliche „Leiter" von a priori-Abschätzungen („Navier-Stokes ladder theorem") aufgestellt. Diese Leiter kann nur im zweidimensionalen Fall „abgeschlossen" werden und impliziert die gleichmäßige Beschränktheit von $\| \nabla^n u \|_2$, der L^2-Norm aller n-ten Ableitungen von u, für alle $n \in \mathbb{N}$. Im $\mathbb{R}^3$ jedoch gelingt es nur, das zeitliche Mittel

$$\langle \| \nabla^n u \|_2^{\frac{2}{2n-1}} \rangle = \overline{\lim_{t \to \infty}} \, \frac{1}{t} \int_0^t \| \nabla^n u \|_2^{\frac{2}{2n-1}} d\tau$$

durch die Grashof-Zahl abzuschätzen, so daß Singularitäten in endlicher Zeit nicht ausgeschlossen werden können. Definiert man weiterhin charakteristische Längen $l_{n,r}$ in der Strömung durch die zeitlichen Mittel

$$\frac{1}{l_{n,r}^2} = \left\langle \left(\frac{\| \nabla^n u \|_2 + \dots}{\| \nabla^r u \|_2 + \dots} \right)^{\frac{2}{n-r}} \right\rangle, \quad n > r \geq 0,$$

so sind im $\mathbb{R}^2$ alle $l_{n,r}$ a priori nach unten von 0 weg beschränkt, während im $\mathbb{R}^3$ für das gleiche Ergebnis z. B. $\langle \| \nabla u \|_\infty \rangle < \infty$ gefordert werden muß.

In Kapitel 8 wird gezeigt, daß die Fourier-Koeffizienten $\hat{u}(k, t)$ der Lösung $u(x, t)$ im $\mathbb{R}^3$ exponentiell schnell in der Wellenzahl k abklingen, falls wieder eine a priori-

Schranke für ∇u bekannt ist. Schließlich wird in Kapitel 9 die Hausdorff-Dimension des Attraktors im $\mathbb{R}^2$ durch die Grashof-Zahl $\mathscr{G}$ abgeschätzt; insbesondere wird dadurch die bisherige heuristische Abschätzung der Freiheitsgrade $N \sim \mathscr{G}^{2/3}$ zu $N \geq c\,\mathscr{G}^{2/3}(1+\log \mathscr{G})^{1/3}$ verschärft. Bekanntlich gelingt im $\mathbb{R}^3$ eine analoge Abschätzung nur unter Annahmen, die a priori nicht gesichert sind. Im letzten Kapitel werden noch zwei Probleme mit inhomogenen Randbedingungen angesprochen.

Wie die Autoren im Vorwort erwähnen, ist dieses Buch keine Monographie über Analysis der Navier-Stokes-Gleichungen. Es ist vielmehr das Ziel, die mathematischen und physikalischen Zusammenhänge zwischen Regularität und Eindeutigkeit globaler Lösungen, zwischen a priori-Abschätzungen von $u, \nabla u$ etc., unteren Schranken für die Ausdehnung kleiner Strukturen und oberen Schranken für die Anzahl der Freiheitsgrade der Lösungsmannigfaltigkeit aufzustellen. Dabei wird in diesem Buch der analytische Aufwand – u. a. durch die Annahme periodischer Randbedingungen – niedrig gehalten. Es werden keine Ergebnisse aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (bis auf die multiplikativen Ungleichungen von Gagliardo-Nirenberg) benötigt, und es wird die „unfamiliar language of abstract functional analysis" umgangen. Ebenso wird die übliche Einteilung in Definition, Satz und Beweis weitestgehend vermieden. Insbesondere ist dieses Buch nicht nur für Mathematiker, sondern auch für Studenten der Physik und Ingenieurwissenschaften mit Kenntnissen über gewöhnliche Differentialgleichungen und Fourier-Analysis gut verständlich. Der Text ist sorgfältig ausgearbeitet und mit einer Numerierung aller Formeln versehen. Außerdem schließt jedes Kapitel mit einigen Aufgaben, in denen meistens zuvor nur skizzierte Rechnungen durchgeführt bzw. erweitert werden sollen. Der Text weist nur wenige Schreibfehler und Ungenauigkeiten (wie z. B. im Lemma von Gronwall) auf. Das Buch endet mit einem Anhang über Ungleichungen, einem Literaturverzeichnis und einem Index. Insgesamt liefert das Buch einen interessanten Beitrag in einem in der Literatur nur wenig behandelten Grenzbereich zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften.

Darmstadt R. Farwig

Gardner, R. J., Geometric Tomography (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 58), Cambridge University Press 1995, 425 S., £ 45.00

Mit „Geometrischer Tomographie" meint der Autor die Rekonstruktion von – meist konvexen oder sternförmigen – Mengen in $\mathbb{R}^n$ aus Tomographie-artigen Daten – wie etwa Integralen der charakteristischen Funktionen über niedrigdimensionale Mannigfaltigkeiten oder auch Projektionen und Durchmesser. Radiologische Anwendungen, die das Wort „Tomographie" nahelegen, sind nicht beabsichtigt, und auch die mathematischen Methoden sind von denen der radiologischen Tomographie ganz verschieden und eher der konvexen Analysis zuzuzählen.

Ein typisches Resultat des Buches ist das folgende: Sei E eine beschränkte meßbare Menge in $\mathbb{R}^2$, und bezeichne X_uE die Längen der Durchschnitte von E mit den Geraden der Richtung $u \in S^1$ (die „X-rays" von E). Dann gilt:

1) Zu jedem konvexen Körper K gibt es drei Richtungen u, so daß X_uK für diese u die Menge K in der Menge der konvexen Körper eindeutig bestimmt.
2) Es gibt vier Richtungen u, so daß X_uK für diese u jeden konvexen Körper K eindeutig bestimmt.

Solche und ähnliche Resultate finden sich in Kap. 1. In Kap. 2 folgt die entsprechende Theorie für $n > 2$, welche von dem Fall $n = 2$ in Fragestellungen, Methoden und Resultaten bemerkenswert verschieden ist. In Kap. 3 wird die Rekonstruktion konvexer

Körper K in $\mathbb{R}^n$ von ihren Projektionen auf k-dimensionale Unterräume studiert. Sind alle Projektionen einer bestimmten Dimension k, $1 \leq k < n$, bekannt, so ist K bekannt. Haben diese Projektionen alle konstante Breite und ist $k \geq 2$, so hat auch K konstante Breite. Ähnliche Resultate erhält man, wenn man die Breite durch Minkovski's gemischtes oder inneres Volumen ersetzt. Eine typische Fragestellung in Kap. 4 ist, ob das Volumen eines konvexen Körpers, dessen Projektion auf jede Ebene kleinere Fläche hat als diejenige eines anderen notwendig kleiner ist als dasjenige des anderen konvexen Körpers. Hilfsmittel sind hier Zonoide und Projektionskörper. Kap. 5 bringt die Übertragung der Resultate aus Kap. 1 und 2 auf „point X-rays", also Geraden durch einen Punkt (im Gegensatz zu parallelen Geraden). In Kap. 6 folgen Erweiterungen auf gewichtete Integrale („chord functions") und auf sternförmige Gebiete. Kapitel 7 geht der Frage nach, inwieweit konvexe Mengen durch ihre Schnitte mit affinen Unterräumen durch einen oder mehrere Punkte bestimmt sind.

In einem einführenden Kapitel 0 werden viele der verwendeten Begriffe erklärt. Der Anhang führt die im Text schon verwendeten gemischten und inneren Volumen ein, beweist einige der verwendeten Ungleichungen und gibt schließlich eine kurze Einführung in die Radon-Transformation und verwandte Integral-Transformationen. So ist das Buch weitgehend in sich abgeschlossen. Seine Lektüre setzt kaum weitere Literatur voraus und ist schon dem fortgeschrittenen Studenten möglich.

Das Buch ist bewundernswert klar geschrieben. Jedes Kapitel beginnt mit einer Motivation und Übersicht und ist gefolgt von ausführlichen höchst lesenswerten historischen und biographischen Anmerkungen. Die vielen ausgezeichneten graphischen Darstellungen tragen zur leichten Verständlichkeit erheblich bei. Insgesamt handelt es sich um eine höchst erfreuliche Bereicherung der mathematischen Literatur. Das Durcharbeiten etwa im Rahmen eines Seminars müßte für alle Beteiligten ein Vergnügen sein.

Münster F. Natterer

Nomizu, K., Sasaki, T., Affine Differential Geometry, Cambridge University Press 1994, 277 S., £ 37.50

This monograph gives an excellent systematic introduction, from a contemporary viewpoint, to affine differential geometry (ADG) and a well-done selection of particular topics from recent research. It is written by two experts who significantly influenced a modern development of ADG and the renaissance of the field during the last two decades.

Before we are going to describe the contents we would like to recall some of the basics from affine hypersurface theory. Let A be the real affine space with associated $\mathbb{R}$-vector space V, equipped with its canonical flat connection D, and V^* the dual space. Consider a hypersurface immersion $f: M \to A$ of an oriented, connected manifold M, $\dim M = n \geq 2$. Denote by f_* the induced tangential map. Choose an arbitrary transverse field $\xi: M \to V$ along f. Like in Euclidean surface theory, one derives a system of fundamental affine invariants induced on M from structure equations of Gauss and Weingarten type for $\{f, \xi\}$:

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi,$$

$$D_X \xi = -f_*(SX) + \tau(X)\xi.$$

The coefficients of the structure equations are affine invariants and they describe the immersion f together with the transverse field ξ; ∇ is called the induced connection, S the shape operator, h the affine metric (if it is nondegenerate), and τ the transversal connection form.

The nondegeneracy of h is independent of the choice of the transverse field ξ, thus it is a property of f (in this case f is called nondegenerate). Then h defines a semi-Riemannian structure on the manifold; h is definite exactly for locally strongly convex hypersurfaces.

It is well known since Blaschke that, in case f is nondegenerate, there is a transverse field, unique up to orientation, which is invariant under the unimodular transformation group acting on A; this field classically is called the "affine normal". Nomizu and Sasaki introduce it by structural considerations. Nowadays this particular pair $\{f, \xi\}$ is called a Blaschke immersion. For such immersions, the induced connection ∇ and the bilinear form h give a fundamental system of unimodular invariants. Define the (1.2)-tensor field K as the difference between ∇ and the Levi-Civita connection $\hat{\nabla}$ of h; h and K [(or h and the cubic form C, where $C(X, Y, Z) := -2h(K(X, Y), Z)$ for all tangent fields X, Y, Z)] give another fundamental system of invariants.

We sketch the contents of the monograph.

The introduction gives a brief history of the subject in three sections (before 1950, 1950–1980, after 1980) and surveys the development from the classical to a contemporary viewpoint.

Chapter 1 recalls basic notions and facts, including affine connection, conjugate connections (in stochastics they appear as statistical manifolds) and vector bundles. Chapter 2 presents the basic theory of affine immersions. A differentiable immersion $f: (M, \nabla) \to (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ is called affine if ∇ coincides with the pull-back of $\tilde{\nabla}$.

In particular, this situation is studied for hypersurfaces, including nondegenerate and degenerate immersions and a detailed presentation of the fundamentals for Blaschke immersions: structure equations and integrability conditions up to the fundamental theorem 8.2 in the version for h and ∇ given by Dillen-Nomizu-Vrancken in 1990. While the classical fundamental theorem was formulated in terms of h and C, one nowadays prefers a version of the type presented here. There are two reasons for this contemporary viewpoint:

(i) The ambient affine space is equipped with the canonical flat affine connection D to+-gether with a parallel volume form. It is natural to study an analogous structure induced on M by $\{f, \xi\}$;
(ii) the triple $\{\nabla, h, \bar{\nabla}\}$ gives a pair of conjugate connections relative to h where $\bar{\nabla} := \hat{\nabla} - K$; the geometric properties of $\bar{\nabla}$ (projective flatness) together with Codazzi equations for $\bar{\nabla}$ and h exactly give the integrability conditions for the structure equations.

The contemporary structural approach, culminating in the version of the fundamental theorem presented here, leads to a transparent understanding of the geometric properties on the one hand and the analytic situation on the other.

It was Nomizu who in particular contributed to the clarification of these facts during the 80s, and since then these results significantly stimulated further research, e.g. on PDEs (Codazzi and Monge-Ampère) and Weyl geometries.

The monograph continues with two topics: the study of (a) the geometric properties of the cubic form C and (b) the Gauss conormal map $\nu : M \to V^*$, where $\nu(p)$ annihilates the tangent space at $p \in M$.

(a) The cubic form C vanishes identically (i.e. ∇ and $\hat{\nabla}$ coincide) if and only if the hypersurface is a quadric (theorem of Maschke-Pick-Berwald), thus C measures the deviation of f from a quadric.
(b) The conormal connection $\bar{\nabla}$ (which is the conjugate connection of the induced connection ∇) is projectively flat. This is an important analogue of geometric properties of the Euclidean Gauss map. An extended version of Lelieuvre's formula (due to Li, Nomizu and Wang) gives additional insight into the geometry of the affine conormal map. The

conormal map satisfies a Schroedinger type PDE

$$\Delta\nu + nH\nu = 0$$

(Δ denotes the Laplacian of the affine metric h, $H = \frac{1}{n}$ trace S the affine mean curvature). Like the Weitzenboeck type formula for the Pick invariant (the square norm of the cubic form) the above PDE is one of the fundamental PDEs for affine hypersurfaces, in particular for proving global results.

Chapter 3 contains a variety of geometric applications of the theory developed. In the first 6 paragraphs, it presents classes of hypersurfaces with remarkable geometric properties, in particular affine spheres (the Weingarten operator satisfies $S = H\,\mathrm{id}$), affine homogeneous surfaces, some particular Lie groups from the affine point of view, and Cayley surfaces. Most of the results in this part are from recent years with important contributions of both authors which stimulated further research. The second part of this chapter is devoted to an exemplary study of global results for convex hypersurfaces. The results presented include a series of characterizations of ellipsoids (different in type and in the methods of proof), affine Minkowski type integral formulas and applications, a global study of the Schroedinger type equation for the conormal (see above) and a proof of an "affine Bernstein result" in a version of Calabi. The latter is a first step to the solution of the affine Bernstein conjecture, one of the famous open problems in ADG. There are some other global results in chapter 4 (a rigidity result for ovaloids with given induced connection) and in the series of notes following chapter 4 (variational formulas, concepts of completeness in ADG).

Much of the material in chapter 4 comes from recent research and is – like the sections on degenerate immersions in the foregoing chapters – not contained in one of the other four monographs on ADG which appeared during the last decade (two of these monographs are devoted to global ADG; for references see the Conference Proceedings which we mention at the end). Of particular interest in chapter 4 are: (i) a very transparent proof of the so called Cartan-Norden theorem; (ii) locally symmetric hypersurfaces (with respect to the induced connection); (iii) several interesting extensions of the Maschke-Pick-Berwald theorem; (iv) basics from complex affine and projective differental geometry (the latter with three different approaches).

The treatise continues with 11 notes on various topics like submanifolds of higher codimension, affine Weierstrass formulas and affine Baecklund transformations, locally symmetric surfaces (a topic much more difficult in dimension 2 than in higher dimension; compare chapter 4), and particular results from projective differential geometry. The book ends with 4 appendices, a bibliography with about 180 titles, covering many recent papers, a list of symbols and an index. A list of errata is available from the authors by e-mail (MA414000@brownvm.brown.edu).

The survey of the contents shows that the monograph presents a systematic introduction to the field and then a diversity of beautiful geometric results up to the development in the early 90s. Many of the latter topics are different from the contents in the other monographs from the last decade. It is the clarity and elegance of the approach and the presentation together with the beauty of the geometric results which makes the treatise appealing and attractive not only to the experts.

A reader interested in the field now can continue with 14 short survey articles on actual progress (Recent developments in ADG, in: Geometry and Topology of Submanifolds, vol. VIII, Conference Proceedings, World Scientific Singapore 1996, pp. 1–15 and 393–408 (bibliography)).

Berlin U. Simon

Porteous, I. R., Clifford Algebras and the Classical Groups (Cambridge studies in advanced mathematics Vol. 50), Cambridge u. a.: Cambridge University Press 1995, x+295 S., £ 30.00 (US$ 49.95)

Das vorliegende Buch enthält einen Zugang zu den sogenannten klassischen Gruppen „ab ovo": Ausgehend von einer Diskussion reeller Algebren und quadratischer Form führt es bis zu einer (kurzen) Einführung in Liegruppen und transitive Wirkungen auf Sphären. Explizit erscheint die Topologie erst im hinteren Teil des Buches, allerdings prägt das Interesse am lokal kompakt zusammenhängenden (oder gar differenzierbaren) Fall die Darstellung von Anfang an – dies erklärt wohl auch zum Teil die Beschränkung auf die (einzigen lokal kompakten zusammenhängenden) Körper **R**, **C**, **H** an Stellen, wo das nicht nötig gewesen wäre.

Ich benutze im folgenden die Bezeichnungen des Autors. Eines der Ziele dieses Buches ist die Einführung und Klassifikation der klassischen Gruppen, danach eine Diskussion der zweiblättrigen Überlagerungen $Pin(p,q;\mathbf{K})$ und $Spin(p,q;\mathbf{K})$ der orthogonalen Gruppen $O(p,q;\mathbf{K})$ bzw. $SO(p,q;\mathbf{K})$ für $p,q\in\mathbf{N}$ und $\mathbf{K}\in\{\mathbf{R},\mathbf{C}\}$. Schließlich werden Beispiele transitiver Wirkungen auf Sphären (der Dimension höchstens 15) diskutiert. Das Buch kumuliert in einer lesenswerten Darstellung des Phänomens der Trialität: Unter den kompakten zusammenhängenden (Lie-)einfachen Liegruppen ist die $Spin(8)$ die einzige, die einen äußeren Automorphismus zuläßt, dessen Ordnung größer ist als 2 (eben 3).

Der gewählte Zugang zu den klassischen Gruppen ist in der geometrischen Algebra verwurzelt. Auf den ersten Blick mag es überraschen, daß man auf diesem Weg auch die generellen und speziellen linearen Gruppen erfaßt: Dies geschieht dadurch, daß neben den Grundkörpern **R**, **C** und **H** auch „Superkörper", insbesondere die Ringe ${}^2\mathbf{K}=\mathbf{K}\times\mathbf{K}$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation) einbezogen werden. Der Ring $\mathbf{A}\in\{\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{H},{}^2\mathbf{R},{}^2\mathbf{C},{}^2\mathbf{H}\}$ wird als reelle Algebra betrachtet. Für einen freien **A**-Modul X endlicher Dimension n wird die reelle Algebra aller Modulendomorphismen mit der Algebra $\mathbf{A}(n)$ aller $n\times n$ Matrizen über **A** identifiziert. Die Menge X^L aller Modulhomomorphismen von X nach **A** trägt in natürlicher Weise die Struktur eines **A**-Moduls (wobei allerdings spätestens für nichtkommutatives **A** die Skalare von der entgegengesetzten Seite operieren). Eine (nicht ausgeartete) Korrelation von X ist nun eine (bijektive) **R**-lineare Abbildung $\xi: X\to X^L$, die **A**-Untermoduln auf ebensolche abbildet. Jede Korrelation liefert eine „Orthogonalitätsrelation" auf X. Ist diese Relation symmetrisch, so nennt man ξ reflexiv. In diesem Fall kann ξ im wesentlichen durch eine hermitesche oder schiefhermitesche Sesquilinearform auf X beschrieben werden. Eine Klassifikation der Antiinvolutionen der Algebra **A** führt nun zu einer Klassifikation dieser Sesquilinearformen. Die damit erreichte Klassifikation der reflexiven nicht ausgearteten Korrelationen von X läßt sich in eine Klassifikation der Antiinvolutionen der Algebra $\mathbf{A}(n)$ übersetzen. Nun erhält man die klassischen Gruppen als „unitäre Gruppen" bezüglich dieser Sesquilinearformen, und damit als Untergruppen der Matrizenalgebra $\mathbf{A}(n)$. Gleichzeitig kann man auch die zugehörigen Liealgebren in $\mathbf{A}(n)$ identifizieren. Man erhält in natürlicher Weise die Serien

$$O(p,q;\mathbf{R}),\ GL(n;\mathbf{R}),\ Sp(2n;\mathbf{R}),\ Sp(2n;\mathbf{C}),\ Sp(p,q;\mathbf{H}),\ GL(n;\mathbf{H}),$$
$$O(n;\mathbf{C}),\ U(p,q;\mathbf{C}),\ GL(n;\mathbf{C}),$$

wobei $p,q,n\in\mathbf{N}$. Außer in den Fällen $Sp(*,*)$ erhält man echte Untergruppen durch Einschränkung der Determinante auf 1. Diese „speziellen unitären Gruppen" bilden – zusammen mit endlich vielen Ausnahmetypen – die Bausteine für halbeinfache reelle Liegruppen.

Es ist bekannt (und von erheblichem Interesse für die theoretische Physik), daß die orthogonalen Gruppen $O(p,q;\mathbf{K})$ und $SO(p,q;\mathbf{K})$ für $\mathbf{K}\in\{\mathbf{R},\mathbf{C}\}$ zweiblättrige Überlagerungsgruppen $Pin(p,q;\mathbf{K})$ bzw. $Spin(p,q;\mathbf{K})$ besitzen, die noch eine treue lineare Darstellung endlichen Grades zulassen. (Falls $(p,q)=(1,2)$ oder $2\le p\le q$, gibt es auch noch höhere Überlagerungen, aber diese sind nicht immer linear.) Cliffordalgebren sind das angemessene Hilfsmittel sowohl zur Konstruktion dieser Gruppen als auch der erwähnten linearen Darstellungen. Der Autor diskutiert Cliffordalgebren über $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ und den Superkörpern ${}^2\mathbf{R}$, ${}^2\mathbf{C}$ sowie $\bar{\mathbf{C}}$. Isomorphismen zwischen Cliffordalgebren und bestimmten Algebren $\mathbf{A}(n)$ erklären gewisse „Ausnahmeisomorphismen" zwischen klassischen Gruppen aus verschiedenen Serien; wie etwa $Sp(0,1;\mathbf{H}) \cong SU(0,2;\mathbf{C}) \cong Spin(0,3;\mathbf{R})$, $Spin(0,4;\mathbf{R}) \cong Spin(0,3;\mathbf{R}) \times Spin(0,3;\mathbf{R})$, $Spin(0,5;\mathbf{R}) \cong Sp(0,2;\mathbf{H})$ oder $Spin(0,6;\mathbf{R}) \cong SU(0,4;\mathbf{C})$.

Neben assoziativen Algebren diskutiert der Autor auch die reelle Divionsalgebra $\mathbf{O}$ der Cayleyzahlen samt ihrer Automorphismengruppe G_2. Nach einer knapp gehaltenen Einführung in topologische Räume, Mannigfaltigkeiten und Liegruppen spielt diese Gruppe ihre Rolle als Standgruppe der transitiven Wirkung von $Spin(0,7;\mathbf{R})$ auf der Sphäre S^7. Dies geschieht im Rahmen einer Betrachtung transitiver Wirkungen der Gruppen $Spin(0,n;\mathbf{R})$ auf Sphären, wie sie sich zum einen (für jedes $n \in \mathbf{N}$) aus der üblichen Wirkung von $Spin(0,n;\mathbf{R})$ auf S^{n-1}, zum anderen (für $n < 10$) aus der Spinordarstellung auf der Cliffordalgebra ergeben. Schließlich endet das Buch mit einer Darstellung der Trialität, die ganz auf der Gruppenebene gehalten ist (und nicht, wie sonst oft zu finden, über die Liealgebra geht).

Das vorliegende Buch ist gut geschrieben und eignet sich der bodenständigen Darstellung wegen auch als Text für eine Vorlesung, die sich an Studenten der Mathematik oder der Physik wendet. Wer das Buch von vorn bis hinten durcharbeitet, wird einige Freude daran haben. Dabei sollte man allerdings nebenbei sich ein Verzeichnis der elaborierten Symbolik anlegen, denn ein solches bietet das Buch nicht, und die einmal eingeführten Namen für Algebren und Gruppen werden oft eben als Namen benutzt, ohne daß der umgebende Text einem noch einen Hinweis gibt, in welchem Teil des Buches man hoffen darf, die Definition wiederzufinden. Dieses Manko macht es auch etwas mühsam, das Buch sozusagen als Steinbruch zu benutzen und sich nur einige interessante Einzelheiten herauszupicken. Das ist schade, denn sonst hätte das Werk für manchen zu einer Goldgrube werden können.

Darmstadt M. Stroppel