E 20577 F
100. Band Heft 1
ausgegeben am 10.3.1998

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart 1998

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 7 89 01-0, Telefax (07 11) 7 89 01-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 100, Heft 1

1. Abteilung

Vorwort der Herausgeber 1
I. Kersten: Noether's Problem and Normalization 3
G. Thorbergsson: Smooth Tight Immersions 23
K. W. Gruenberg, J. Ritter, A. Weiss: On Chinburg's Root Number Conjecture 36

2. Abteilung

Schmidt, R.: Subgroup Lattices of Groups (*M. Suzuki*) *1*
Turaev, V. G.: Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds (*T. tom Dieck*) *3*
Buekenhout, F. (Hrsg.): Handbook of Incidence Geometry (*G. Stroth*) *4*
Cohn, P. M.: Skew fields, Theory of general division rings (*K. Strambach*) *6*
Ebbinghaus, H.-D., Flum, J.: Finite Model Theory (*E. Grädel*) *9*
Fedosov, B.: Deformation Quantization and Index Theory (*M. Pflaum*) *11*
Graham, R. L., Grötschel, M., Lovász, L. (Hrsg.): Handbook of Combinatorics,
2 Bände (*M. Aigner*) *13*
O'Neill, B.: The Geometry of Kerr Black Holes (*J. H. Eschenburg*) *14*
Jost, J.: Riemannian Geometry and Geometric Analysis (*G. Thorbergsson*) *17*
Padberg, M.: Linear Optimization and Extensions (*K. H. Borgwardt*) *18*
Tennenbaum, G.: Introduction to analytic and probabilistic number theory
(*J. Brüdern*) *19*

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Berger: Riemannian Geometry during the Second Half of the Twentieth Century
A. Bergmann, H. W. Knobloch: Hermann Schmidt 1902–1993
G. Burde, W. Schwarz: Wolfgang Franz zum Gedächtnis
G. Harder: Galoismoduln und Shimura-Varietäten
H. Karcher: Eingebettete Minimalflächen und ihre Riemannschen Flächen
J. Zabczyk: Infinite Dimensional Diffusions in Modelling and Analysis

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
100 (1998) 1–2

Vorwort

Die Publikation des 100. Bandes einer Zeitschrift ist sicherlich eine angemessene Gelegenheit, die Vergangenheit ein wenig Revue passieren zu lassen. Der *Jahresbericht* wurde zeitgleich mit der DMV 1890 ins Leben gerufen. Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, daß der Jubiläumsband erst acht Jahre nach der Jubiläumstagung verlegt wird. Dies liegt daran, daß der *Jahresbericht* von 1944 bis 1950 nicht erscheinen konnte.

An dieser Stelle soll nicht über die Entwicklung des *Jahresberichts* mit seinen unterschiedlichen Funktionen im Laufe der Zeit berichtet werden. Dazu sei verwiesen auf das Vorwort von W.-D. Geyer im *Sonderband des Jahresberichts*, Jubiläumstagung 100 Jahre DMV, Bremen 1990, Teubner 1992. Uns liegt an einer Würdigung der Mathematik im *Jahresbericht* seit seiner Gründung.

International bekannt wurde der *Jahresbericht* gleich in der Gründerzeit durch seine Referate über große Gebiete der Mathematik. Wir wollen in diesem Band ein wenig an diese Tradition anknüpfen. Im umfangsmäßig verlängerten Heft 2 wird eine Arbeit von M. Berger mit dem Titel *Riemannian geometry during the second half of the twentieth century* erscheinen, in der die Fragestellungen und Ergebnisse der modernen Differentialgeometrie beschrieben werden.

Darüber hinaus haben die Herausgeber sieben Referate über Arbeiten eingeworben, die im *Jahresbericht* erschienen sind. Hierin geht es einerseits um die Darstellung der Ergebnisse, aber insbesondere auch um deren Wirkung und Weiterentwicklung bis zur Gegenwart. Natürlich spiegelt die Auswahl den persönlichen Geschmack der Herausgeber wider. Wir haben uns jedoch bemüht, thematisch und zeitlich eine breite Streuung zu erreichen. Im einzelnen geht es um die folgenden Arbeiten.

1. Im Jahre 1897 erschien in Band **4** D. Hilberts *Theorie der algebraischen Zahlkörper* als wohl prominentestes Beispiel der bereits oben erwähnten Referate. W.-D. Geyer wird in seinem Beitrag die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie aufbauend auf Hilberts Zahlbericht darstellen.

2. E. Noether hat zwischen 1910 und 1930 in den Bänden **19** bis **39** des *Jahresberichts* zahlreiche ihrer Resultate publiziert. I. Kersten wird in ihrem Bericht dazu insbesondere auf das sog. Noethersche Problem und dessen moderne Lösung eingehen.

3. H. Petersson führte 1939 in seiner Arbeit *Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen* in Band **49** ein kanonisches Skalarprodukt ein, das heute zu den Standardtechniken in der Theorie der automorphen Formen zählt. J. Elstrodt und F. Grunewald werden in ihrer Arbeit insbesondere die Bedeutung dieser Metrisierung und ihrer Varianten herausstellen.

4. 1959 erschien in Band **61** L. Schmetterers Artikel *Über nichtparametrische Methoden in der Mathematischen Statistik.* H. Witting wird in seinem Referat dazu verschiedene Aspekte der nichtparametrischen Statistik darstellen.

5. Ebenfalls 1959 hat E. Hölder in Band **62** *Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung* publiziert. M. Giaquinta wird dazu einen Übersichtsartikel über elliptische Systeme verfassen.

6. Die Arbeit von N.H. Kuiper über den *Satz von Gauß-Bonnet für Abbildungen in E^N und damit verwandte Probleme* erschien 1967 in Band **69**. G. Thorbergsson wird die Entwicklungen daraus beschreiben.

7. W. von Wahls Arbeit *Über die stationären Gleichungen von Navier-Stokes, semilineare elliptische und parabolische Gleichungen* erschien 1978 in Band **80**. M. Wiegner wird aus diesem Anlaß einen Übersichtsartikel über den gegenwärtigen Stand der Forschung bei den Navier-Stokes-Gleichungen verfassen.

Im vorliegenden ersten Heft von Band **100** finden Sie die Beiträge von I. Kersten und G. Thorbergsson. Die anderen fünf Beiträge werden in Heft 3 und 4 erscheinen. Die Herausgeber möchten sich bei allen Autoren, die sich dieser schwierigen Aufgabe gestellt haben, recht herzlich bedanken.

Darüber hinaus steht jetzt ein Register aller mathematischen Arbeiten im *Jahresbericht* elektronisch zur Verfügung. Die Internetadresse lautet

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

D. Ferus hat dankenswerterweise für das DMV-Archiv ein Register aller Nachrufe im *Jahresbericht* erstellt. Dieses Register ist im Internet verfügbar unter

http://www-dmv.math.tu-berlin.de/archiv/nachrufe.html

Das Register der Kollegen in einer dunklen Zeit findet man unter

http://www-dmv.math.tu-berlin.de/archiv/pinl.html

Zum Abschluß erscheinen uns noch ein paar Worte über die Zukunft angebracht. Gerade in der Zeit knapper werdender Bibliotheksetats wird den Buchbesprechungen eine größere Bedeutung zukommen. Der *Jahresbericht* bemüht sich, auch in der Zukunft aktuelle Rezensionen über interessante Bücher zu bieten.

Wie in der Vergangenheit werden weiterhin Nachrufe auf verstorbene Kollegen erscheinen. Jedoch wird man in Zukunft stärker zu einer Auswahl gezwungen sein und den Umfang begrenzen müssen. Dem Profil des *Jahresberichts* entsprechend, sollen auch künftig vornehmlich Übersichtsartikel erscheinen, die sich an einen breiten Leserkreis wenden. Zur Stärkung der internationalen Akzeptanz und dem Trend der Zeit folgend, möchten die Herausgeber vermehrt Publikationen in englischer Sprache unterstützen.

Wir hoffen, mit diesem Band ein interessantes Spektrum vorzulegen, das den Lesern fruchtbare Anregungen für die weitere Arbeit bietet.

Die Herausgeber

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
100 (1998) 3–22
Mathematics Subject Classification: 12 F 20, 13 B 05
Keywords and Phrases: Noether's problem, generic Galois extensions, Noether normalization, Hilbert's fourteenth problem.

Noether's Problem and Normalization

I. Kersten, Bielefeld

Introduction

In the Jahresbericht 22 (1913), Emmy Noether discussed three questions on rational function fields $F = k(x_1, \ldots, x_n)$. Are the intermediate fields K between k and F finitely generated over k? Are the intermediate fields purely transcendental over k? Are the k-algebras $k[x_1, \ldots, x_n] \cap K$ finitely generated over k?

She answered the first question in the affirmative. Assuming that the characteristic of k is 0 she proved in [55, Satz II, p. 171]: If an intermediate field has transcendence degree ρ then it can be generated as a field over k by $\rho + 1$ elements. For arbitrary characteristic, she proved in [59, § 1.1] that there are $\rho + m$ generators for some integer $m \geq 0$.

The answer to the second question is affirmative for $n = 1$ by Lüroth's theorem [45]; if k is algebraically closed and of characteristic 0, this also holds for $n = 2$ by Castelnuovo's theorem [11], (cf. [85] for the case of positive characteristic). The answer in general is negative [54, p. 317], [4]. So Emmy Noether also discussed the following more special question: *If a finite group G acts as an automorphism group on F by permuting the x_i, is the fixed field purely transcendental?* This question, known as *Noether's problem*, has effected many research papers. Our goal in section 1 is to survey the results on Noether's problem.

The third question is Hilbert's 14th problem which dates back to his famous address at the 1900 Paris congress. Let Γ be a subgroup of the group $\mathrm{GL}_n(k)$ of invertible $n \times n$ matrices over k. Then Γ acts on the polynomial ring $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ as a group of k-algebra automorphisms defined by setting $g(x_j) = \sum_i a_{ij} x_i$ if $g = (a_{ij}) \in \Gamma$. The problem then is whether the fixed ring S^Γ is finitely generated as a k-algebra. (Note that $S^\Gamma = S \cap F^\Gamma$.) Earlier Hilbert himself had solved this problem affirmatively in some special cases [30], [32]. Emmy Noether [56], [59] gave a positive answer for all finite subgroups of $\mathrm{GL}_n(k)$, (cf. 2.4 below). Hilbert's 14th problem remained unsolved until the 1958 Edinburgh congress where Nagata presented a counterexample. This shows that S^Γ is not finitely generated for k infinite and some (non-reductive) matrix groups Γ. For a survey, and for solutions of Hilbert's 14th problem in geometric invariant theory, the reader is referred to [53], [19], [73], [34], and [61] including numerous further references.

In the Jahresbericht 32 (1923), Emmy Noether stated the following finiteness criterion for the first time: *A k-subalgebra B of the function field $F = k(x_1, \ldots, x_n)$ is* *finitely generated over k if and only if B is integral over a subring A which is a finitely generated k-algebra*, cf. (2.3 below). She proved this in [59] by using what has become known as *Noether Normalization Lemma.* This says that any finitely generated commutative k-algebra A contains a polynomial ring over which A is finitely generated as a module. She then applied the finiteness criterion to prove that Hilbert's 14th problem has an affirmative answer for finite groups. In section 2, we will briefly report on Noether normalization and further consequences.

In this whole paper, k will be a field and G a finite group. A polynomial $f(z) \in k[z]$ in one indeterminate z is said to be *monic* if its leading coefficient is 1; it is *separable* if it has no multiple roots in the algebraic closure $\bar{k}$ of k. The multiplicative group of units in a commutative ring S is denoted by S^*. If G acts as an automorphism group on S then the *fixed ring* S^G is defined by $S^G = \{s \in S \mid \sigma(s) = s \text{ for all } \sigma \in G\}$. A commutative k-algebra A is said to be *finitely generated* over k if there is a k-algebra homomorphism from a polynomial ring $k[x_1, \ldots, x_m]$ *onto* A.

1 Noether's Problem

Let G act faithfully by permutations on a finite set of indeterminates $x_1, \ldots, x_n$. Then G acts as an automorphism group on the field $k(x_1, \ldots, x_n)$. In the Jahresbericht 22 (1913), Emmy Noether discussed the following question [54, p. 317]: *Is the fixed field $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ purely transcendental over k?*

This is equivalent to the question whether the fixed field $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ can be generated by n elements $y_1, \ldots, y_n$ over k. The y_i are then called a *minimal basis*. They are necessarily algebraically independent over k since the fixed field contains the n elementary symmetric functions

$$
\begin{aligned}
&x_1 + \ldots + x_n \, , \\
&x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \, , \\
&\ldots \, , \\
&x_1x_2 \ldots x_n \, .
\end{aligned}
$$

These functions form a minimal basis if G is the symmetric group S_n, e.g. [84, § 33], and Emmy Noether asked whether there is a minimal basis for subgroups of S_n as well. She pointed out in [54, p. 317] that the existence of a minimal basis would have two important consequences in Galois theory:

(i) If $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ has a minimal basis, then any Galois field extension with group G over an infinite field $K \supset k$ can be parametrized (cf. 1.6 below).
(ii) If k is a number field and $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ has a minimal basis, then G is the Galois group of some Galois field extension of k.

Let $F = k(x_1, \ldots, x_n)$ and $K = F^G$. Then F is a Galois extension of K with group G, and $F = K(\alpha)$ for some $\alpha \in F$. Write $K = k(y_1, \ldots, y_n)$ and assume that k is a finite extension of $\mathbb{Q}$. Let $f(y_1, \ldots, y_n, z)$ be the minimal polynomial for α over K. By Hilbert's irreducibility results [31, III, IV], there are $a_1, \ldots, a_n \in k$ such that $f(a_1, \ldots, a_n, z)$ is an irreducible polynomial in z over k and G is the group of its splitting field. This shows (ii).

Noether's proof of (i) excluded certain singular cases, cf. [57, §1]. This restriction was in 1964 removed by Kuyk [42]. In 1.8 below, we present Saltman's elegant formulation of (i) based on the Galois theory of commutative rings.

Galois Extensions of Commutative Rings

In [12], Chase, Harrison, and Rosenberg developed a Galois theory for commutative rings and characterized a Galois ring extension by six equivalent conditions [12, Th. 1.3]. One of these is the following definition.

1.1 Definition Let S be a commutative ring, G a finite group of automorphisms of S, and $R = S^G$. Then S is called a *G-extension of R* if there exist elements $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ in S such that $\sum_{i=1}^m a_i\,\tau(b_i) = \delta_{\mathrm{id},\tau}$ for all $\tau \in G$. Here $\delta_{\sigma,\tau}$ is 1 if $\tau = \sigma$ and 0 otherwise.

An example of a G-extension is the trivial one $E = \prod_{\sigma\in G} R$ existing over any commutative ring R. Choose a basis $\{e_\sigma \mid \sigma \in G\}$ of E over R such that $e_\sigma e_\tau = e_\sigma \delta_{\sigma,\tau}$ and $\sum e_\sigma = 1$. Define a G-action on E by $\tau(e_\sigma) = e_{\tau\sigma}$. Then $a_\sigma = b_\sigma = e_\sigma$ satisfy the condition $\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \tau(b_\sigma) = \delta_{\mathrm{id},\tau}$.

Any Galois field extension L with group G is a G-extension: For each $\sigma \neq \mathrm{id}$ in G, choose $a_\sigma, b_\sigma \in L$ such that $a_\sigma(b_\sigma - \sigma(b_\sigma)) = 1$. Set $x_\sigma = -a_\sigma\sigma(b_\sigma)$ and $y_\sigma = 1$. Then $a_\sigma b_\sigma + x_\sigma y_\sigma = 1$ and $a_\sigma\sigma(b_\sigma) + x_\sigma\sigma(y_\sigma) = 0$. Consequently,

$$\prod_{\sigma\neq\mathrm{id}} (a_\sigma\tau(b_\sigma) + x_\sigma\tau(y_\sigma)) = \delta_{\mathrm{id},\tau} \quad \text{for} \quad \tau \in G.$$

The left-hand side can be written as a sum of the form $\sum_{i=1}^m a_i\,\tau(b_i)$.

1.2 Lemma *Let G act faithfully on a finite set $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ of indeterminates, and define $d = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \in k[x_1, \dots, x_n]^G$.*
Then $S = k[x_1, \dots, x_n, d^{-1}]$ is a G-extension of $S^G = k[x_1, \dots, x_n]^G[d^{-1}]$ and any intermediate ring T between S and $k(x_1, \dots, x_n)$ is a G-extension of T^G.

Proof. Since G acts faithfully on X and $d^{-1} \in S$ there are $b_\sigma \in X$ and $a_\sigma \in S$ such that $a_\sigma(b_\sigma - \sigma(b_\sigma)) = 1$ for each $\sigma \neq \mathrm{id}$ in G. Thus the same argument as above yields that T is a G-extension of T^G. Since d is fixed under G we have $S^G = k[x_1, \dots, x_n]^G[d^{-1}]$. □

The following properties of G-extensions are easily obtained from 1.1.

1.3 Remark Let S, S' be G-extensions of a commutative ring R.

(a) A *homomorphism of G-extensions of R* is defined to be a map $S \to S'$ which is both an R-algebra and a G-module homomorphism. Every homomorphism $S \to S'$ of G-extensions of R is an isomorphism by [12, Th. 3.4].
(b) If T is any commutative R-algebra and G acts on $T \otimes_R S$ by setting $\sigma(t \otimes s) = t \otimes \sigma(s)$ for $t \in T$, $s \in S$, $\sigma \in G$ then $T \otimes_R S$ is a G-extension of T, cf. [12, L. 1.7].
(c) $S \otimes_R S$ is trivial by [12, Th. 1.3]. Let E be the trivial G-extension of S as defined above. Define a map $h : S \otimes_R S \to E$ by $h(s_1 \otimes s_2) = \sum_\sigma s_1\sigma^{-1}(s_2)e_\sigma$. Then h is a homomorphism of G-extensions of S, and thus an isomorphism.

The next lemma implies that every G-extension L of an infinite field $K \supset k$ is a specialization of the G-extension S in 1.2.

1.4 Lemma (Kuyk). *Let K be an infinite field containing k. Let G act faithfully on $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, and let $s \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $s \neq 0$. If L is a G-extension of K, there is a map $\varphi : X \to L$, $x_i \mapsto \alpha_i$, preserving the G-action such that*

(1) *$s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ is a unit in L.*
(2) *If $S = k[x_1, \ldots, x_n, s^{-1}]$ is a G-extension of $R := S^G$ then φ induces a k-algebra map $R \to K$ such that $K \otimes_R S \simeq L$ as G-extensions of K.*

Proof. Let $x_1, \ldots, x_m$ be a set of representatives for the orbits of G on X. Set $\varphi(x_i) = \alpha_i$ where $\alpha_i \in L^{H_i}$ and H_i is the stabilizer of x_i. Extend by setting $\varphi(\sigma(x_i)) = \sigma(\alpha_i)$ for $\sigma \in G$. Replacing s by $\prod_{\sigma \in G} \sigma(s)$ if necessary we may assume that s is fixed under G and $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K$. We have to choose the α_i such that $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. By 1.3 (c) there is an isomorphism $L \otimes_K L \simeq E$ where $E = \bigoplus Le_\sigma$ is the trivial G-extension of L. As a basis for E^{H_i} over L we can take the elements $\sum_{\rho \in H_i} e_{\rho\sigma}$. Then the image of $1 \otimes \alpha_i$ in E can be written as $\alpha_i = \sum_{\sigma \in G} z_{i\sigma} e_\sigma$ where $z_{i\sigma} = z_{i\tau\sigma}$ for $\tau \in H_i$. We have $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_\sigma s(z_{1\sigma}, \ldots, z_{n\sigma}) e_\sigma$. Since K is infinite, we can choose the $z_{i\sigma}$ such that $s(z_{1\sigma}, \ldots, z_{n\sigma}) \neq 0$ in K. This proves (1).

The map $\varphi : X \to L$ constructed above induces a ring homomorphism $\varphi : S \to L$. Since φ preserves the G-action, restriction to R yields a homomorphism $R \to K$. This induces a homomorphism $K \otimes_R S \to L$ of G-extensions of K sending $\lambda \otimes x$ to $\lambda\varphi(x)$ for $\lambda \in K$ and $x \in S$. Thus (2) follows from 1.3 (b), (a). □

The following lemma is a special case of Swan's lemma [75, L. 8, p. 152].

1.5 Lemma *Let G act faithfully on $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Let B be a finitely generated k-algebra which is a domain with quotient field $q(B) = k(x_1, \ldots, x_n)^G$. Set $A = k[x_1, \ldots, x_n]^G$. Then there are elements $a \in A$, $a \neq 0$, and $r \in B$, $r \neq 0$, such that $A[d^{-1}a^{-1}] = B[r^{-1}]$ where $d \in A$ is defined as in 1.2.*

Proof. We have $\mathrm{q}(A) = \mathrm{q}(B)$; (this holds since we can write quotients as $\frac{g}{f} = \frac{g_1}{f_1}$ where $f_1 := \prod_{\sigma \in G} \sigma(f)$ is fixed under G).

There are finitely many generators $a_1, \ldots, a_\ell$ for A as a k-algebra, cf. 2.4. Write $a_i = b_i c_i^{-1}$ with $b_i, c_i \in B$. Let $c = \prod_i c_i$. Then $c \in B$, and $A \subset B[c^{-1}]$. Thus if $a \in A$ then $ad = bc^{-m}$ for some $b \in B$ and some integer $m \geq 0$.

Since $B[c^{-1}]$ is a finitely generated k-algebra, we find $a \in A$ such that $B[c^{-1}] \subset A[a^{-1}]$. Setting $r = cb$ we obtain that $A[d^{-1}a^{-1}] \subset B[r^{-1}]$; and $B[r^{-1}] = B[c^{-1}][b^{-1}] \subset A[d^{-1}a^{-1}]$ since $b^{-1} = d^{-1}a^{-1}c^{-m}$. □

We can now derive Noether's result on parametrizing Galois extensions.

1.6 Theorem (E. Noether [54, p. 317]). *Let G act as an automorphism group on $k(x_1, \ldots, x_n)$ by permuting the x_i. Suppose that $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ has a minimal basis $y_1, \ldots, y_n$.*

Then there is a monic polynomial $p(z) \in k(y_1, \ldots, y_n)[z]$ such that: For any infinite field K containing k and any Galois field extension L of K with group G there is a substitution $y_i \mapsto a_i \in K$ sending $p(z)$ to a separable polynomial $q(z) \in K[z]$ such that L is a splitting field of $q(z)$ over K.

Proof. By 1.5, we find $a \in A = k[x_1, \dots, x_n]^G$ and $r \in B = k[y_1, \dots, y_n]$ such that $A[d^{-1}a^{-1}] = B[r^{-1}]$. So $S = k[x_1, \dots, x_n, d^{-1}a^{-1}]$ is a G-extension of $R := B[r^{-1}] = k[y_1, \dots, y_n, r^{-1}]$ by 1.2, and $p(z) = \prod_{i=1}^n (z - x_i) \in R[z]$. Thus we can write $p(z)$ as a polynomial whose coefficients are rational functions $h_i(y_1, \dots, y_n) \in R$.

Applying 1.4 for $s = da$ yields a homomorphism $\varphi : S \to L$ sending R to K and x_i to $\alpha_i \in L$ so that $q(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ is a polynomial in $K[z]$. It is separable over K since $\varphi(s) \neq 0$ by 1.4 (1), hence $\varphi(d) \neq 0$. We have $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ by 1.4 (2).

Set $\varphi(y_i) = a_i$. Then $q(z) = z^n + h_1(a_1, \dots, a_n)z^{n-1} + \dots + h_n(a_1, \dots, a_n)$. □

1.7 Definition (Saltman [63, Def. 1.1, p. 255]). A G-extension S of $R = S^G$ is called a *generic extension for G over k* if:

(i) $R = k[y_1, \dots, y_m, r^{-1}]$ where $y_1, \dots, y_m$ are algebraically independent over k and $0 \neq r \in k[y_1, \dots, y_m]$.

(ii) For every G-extension L of a field K containing k there is a k-algebra homomorphism $\varphi : R \to K$ such that $K \otimes_R S \simeq L$ as G-extensions of K.

1.8 Theorem [63, Th. 5.1, p. 274]. *Let k be infinite. Let G act as an automorphism group on $k(x_1, \dots, x_n)$ by permuting the x_i. If $k(x_1, \dots, x_n)^G$ is purely transcendental over k, there is a generic extension for G over k.*

Proof. Choose a minimal basis $y_1, \dots, y_n$. Apply lemma 1.5 to $B = k[y_1, \dots, y_n]$ and set $s = da$. Then $S = k[x_1, \dots, x_n, s^{-1}]$ is a G-extension of $R = k[y_1, \dots, y_n, r^{-1}]$ by 1.2, and 1.7 (ii) follows from 1.4. □

Saltman observed that one can replace Emmy Noether's condition on the existence of a minimal basis for $k(x_1, \dots, x_n)^G$ by the weaker condition that there is a split surjection $k[y_1, \dots, y_m, u^{-1}] \to B$ for some domain B with quotient field $k(x_1, \dots, x_n)^G$ and some $u \neq 0$ in $k[y_1, \dots, y_m]$ in order to obtain a necessary and sufficient condition for parametrizing Galois extensions.

He defined in [64, p. 130]: A field extension of k is *retract rational* if it is the quotient field of a domain B and there are k-algebra homomorphisms $\iota : B \to k[y_1, \dots, y_m, u^{-1}]$ and $\pi : k[y_1, \dots, y_m, u^{-1}] \to B$ such that $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_B$, the y_i are indeterminates over k, and $0 \neq u \in k[y_1, \dots, y_m]$. The next theorem follows from [63, Th. 5.3, p. 275] and [65, Th. 3.12, p. 187].

1.9 Theorem (Saltman). *Let k be infinite and let G act faithfully on $X = \{x_1 \dots, x_n\}$. Then the fixed field $k(x_1, \dots, x_n)^G$ is retract rational over k if and only if there is a generic extension for G over k.*

Proof. Suppose that $k(x_1, \dots, x_n)^G$ is retract rational.

Let $A = k[x_1, \dots, x_n]^G$, and let $\pi : k[y_1, \dots, y_m, u^{-1}] \to B$ be a split surjection with section ι. It follows from 1.5 that $A[s^{-1}] = B[r^{-1}]$ where $s = da$ and $r \in B$. Then $S = k[x_1, \dots, x_n, s^{-1}]$ is a G-extension of $R = B[r^{-1}]$ by 1.2. Set $R_0 = k[y_1, \dots, y_m, u^{-1}][\iota(r)^{-1}]$ and write $\iota(r) = yu^{-\ell}$ with $y \in k[y_1, \dots, y_m]$. Then $R_0 = k[y_1, \dots, y_m, v^{-1}]$ with $v = yu \in k[y_1, \dots, y_m]$. We can extend $\pi : R_0 \to R$ and $\iota : R \to R_0$. Then $S_0 = R_0 \otimes_R S$ is a G-extension of R_0 satisfying 1.7 (i). For 1.7 (ii), let L be a G-extension of a field K containing k. Then there is a homomorphism $\varphi : R \to K$ such that $K \otimes_R S \simeq L$ by 1.4. Considering K as an R_0-algebra via

$\varphi \circ \pi : R_0 \to K$ and noting that $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_R$ we obtain

$$K \otimes_{R_0} S_0 = K \otimes_{R_0} R_0 \otimes_R S \simeq K \otimes_R S \simeq L.$$

Thus S_0 is a generic extension of R_0 for G over k.

We are going to prove the converse. Let $S = k[x_1, \dots, x_n, d^{-1}]$ be a G-extension of $S^G = R$ as in 1.2, and let $F = k(x_1, \dots, x_n)$.

Since R is finitely generated as a k-algebra by 2.4, there are finitely many indeterminates $z_1, \dots, z_\ell$ and a k-algebra surjection $\pi : k[z_1, \dots, z_\ell] \to R$. Thus, letting $\mathfrak{p}$ denote its kernel, we may assume that $R = k[z_1, \dots, z_\ell]/\mathfrak{p}$ and π is the canonical map. Form the local ring $T = k[z_1, \dots, z_\ell]_{\mathfrak{p}}$. Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of T. Since F^G is the quotient field of R, we obtain that $F^G = T/\mathfrak{m}$.

We now lift F to a G-extension N of T. Let S_0 be a generic extension of $R_0 = k[y_1, \dots, y_m, r^{-1}]$ for G over k. Then 1.7 (ii) shows that there is homomorphism $\varphi_0 : R_0 \to T/\mathfrak{m}$ such that $T/\mathfrak{m} \otimes_{R_0} S_0 \simeq F$. Write $a_i = \varphi_0(y_i)$ and choose a preimage $b_i \in T$ for each a_i. Define $\psi_0 : R_0 \to T$ by setting $\psi_0(y_i) = b_i$. Then ψ_0 is well defined because $\psi_0(r) \in T$ is a preimage for $\varphi_0(r)$ and so is invertible. Set $N = T \otimes_{R_0} S_0$. Then $N/\mathfrak{m}N \simeq T/\mathfrak{m} \otimes_T N \simeq F$ so that there is an isomorphism $\psi : F \to N/\mathfrak{m}N$ of G-extensions of $T/\mathfrak{m}$.

We now define a G-linear ring map $\iota : S \to N$ such that $\pi \circ \iota = \psi|_S$ where $\pi : N \to N/\mathfrak{m}N$ is canonical. Let $x_1, \dots, x_j$ be a set of representatives for the orbits of G on X, and let $H_i \subset G$ be the stabilizer of x_i. Note that the trace $\mathrm{tr}_i : N/\mathfrak{m}N \to (N/\mathfrak{m}N)^{H_i}$, given by $\mathrm{tr}_i(x) = \sum_{\rho \in H_i} \rho(x)$, is surjective, and that $\mathrm{tr}_i(\pi(\beta)) = \pi(\mathrm{tr}_i(\beta))$ for all $\beta \in N$. Since $\psi(x_i) \in (N/\mathfrak{m}N)^{H_i}$, we can choose $\beta_i \in N$ such that $\mathrm{tr}_i(\pi(\beta_i)) = \psi(x_i)$. Set $\alpha_i = \mathrm{tr}_i(\beta_i)$. Then $\psi(x_i) = \pi(\alpha_i) = \alpha_i + \mathfrak{m}N$ where $\alpha_i \in N^{H_i}$ for $i = 1, \dots, j$. Define $\iota : X \to N$ by $\iota(x_i) = \alpha_i$ and extend by $\iota(\sigma(x_i)) = \sigma(\alpha_i)$ for $\sigma \in G$.

This yields the wanted map $\iota : S \to N$ since $\pi(\iota(d)) = d \neq 0$ in $T/\mathfrak{m}$. By G-linearity, $\iota(R) \subset T$, and $\pi(\iota(r)) = \psi(r) = r$ for $r \in R \subset T/\mathfrak{m}$. Since $\iota(R)$ is finitely generated over k it follows that $\iota(R) \subset k[z_1, \dots, z_\ell, u^{-1}]$ for some $u \in k[z_1, \dots, z_\ell]$, $u \notin \mathfrak{p}$. Thus $\pi(u) = v \neq 0$. Setting $B = R[v^{-1}]$ and $w = u\iota(v)$ we obtain $\iota : B \to k[z_1, \dots, z_\ell, w^{-1}]$ and $\pi : k[z_1, \dots, z_\ell, w^{-1}] \to B$ such that $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_B$, and F^G is the quotient field of B. □

More about generic polynomials like $p(z)$ in 1.6 and their relationship to generic Galois extensions defined in 1.7 can be found in [17] and [35]. Further questions related to Noether's problem like embedding problems in Galois theory are discussed in [69].

Counterexamples

The first counterexample concerning Noether's problem was given by Swan [75, p. 149, 155] in 1969 when he was looking at Steenrod's problem in topology. Let G be a cyclic group of order n permuting $x_1, \dots, x_n$ transitively. For a prime number p, Swan proved that $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_p)^G$ is not purely transcendental over $\mathbb{Q}$ if $p = 47, 113$ or 233 by showing that otherwise p or $-p$ would be a norm from the ring extension $\mathbb{Z}(\zeta)$ over $\mathbb{Z}$ where ζ is a primitive $(p-1)$th root of unity. Lenstra later found even smaller counterexamples. He proved in [43] that $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)^G$ is not purely transcendental over $\mathbb{Q}$ if 8 divides n.

A simple proof for the case of a cyclic group of order $n \equiv 0 \bmod 8$ was given by Saltman [63, Th. 5.11, p. 281] or [64, Th. 8, p. 132]. He discovered a relation between generic Galois extensions and the so-called Grunwald-Wang theorem in class field theory. In particular, he showed that Wang's famous counterexample [83] to Grunwald's theorem also provides a counterexample for Noether's problem, cf. 1.12 below.

Let $v : k \to \mathbb{R}$ be a nonarchimedean valuation on k. For all $a, b \in k$, we then have $v(a) \geq 0$, and $v(a) = 0$ if and only if $a = 0$; $v(ab) = v(a)v(b)$, and, e.g. [84, § 141] or [1, p. 5],

(1) $\quad v(a+b) \leq \max(v(a), v(b))$; equality holds if $v(a) \neq v(b)$.

For each prime number p, there is a nonarchimedean valuation v_p on $\mathbb{Q}$ defined by the formulas $v_p(0) = 0$ and $v_p(p^m s/t) = p^{-m}$ where m is an integer and s, t are integers $\neq 0$, not divisible by p. The completion of k with respect to v_p is the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$, introduced by Hensel.

For each integer $n > 0$, there is a finite field F with p^n elements, being a G-extension of the prime field $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ with G a cyclic group of order n. In fact, F is the splitting field of the polynomial $z^{p^n-1} - 1$ and thus lifts to an unramified Galois field extension L_p of $\mathbb{Q}_p$ with group G, (e.g. [84, § 43] and [1, p. 67]).

Grunwald's original theorem, which was accepted as correct for nearly 20 years, implied that L_p is pulls back to a G-extension of $\mathbb{Q}$. But this is not always true:

Wang's counterexample [83], [77, p. 29]. *If G is cyclic of order n divisible by 8, there is no G-extension N of $\mathbb{Q}$ such that $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} N \simeq L_2$.*

Let K be a field complete under a nonarchimedean real valued valuation v. Then v extends to the algebraic closure, $\bar{K}$, of K such that $v(\alpha) = v(\mathcal{N}\alpha)^{1/n}$ for $\alpha \in \bar{K}$, where $\mathcal{N}$ is the norm in $k(\alpha)$ over k and $n = [k(\alpha) : k]$. Extend v to the polynomial ring $K[z]$ by writing $f(z) = \lambda_0 z^m + \lambda_1 z^{m-1} + \ldots + \lambda_m$ and setting $v(f) = \max v(\lambda_i)$. If f is monic, $v(f) \geq 1$, thus $v(\alpha) \leq v(f)$ for any root α of f (otherwise: $v(\alpha^m) > v(\lambda_i \alpha^{m-i}) \, \forall \, i > 0$, hence $0 = v(f(\alpha)) = \alpha^m$ by (1)).

1.10 Lemma [63, L. 5.5, p. 277]. *Let K be a field complete under a nonarchimedean real valued valuation v, and L the splitting field of a monic separable polynomial $f(z) \in K[z]$ of degree m. There exists a real number $\varepsilon > 0$ such that L is the splitting field of any monic polynomial $g(z) \in K[z]$ of degree m satisfying $v(g - f) < \varepsilon$, and such a polynomial $g(z)$ is separable over K.*

Proof. Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ be the roots of f, and $\delta = \min\{v(\alpha_i - \alpha_j) \mid i \neq j\}$. For any root α_i and any $\beta \in \bar{K}$ such that $v(\alpha_i - \beta) < \delta$, Krasner's lemma shows $K(\alpha_i) \subset K(\beta)$. (Assume that $\alpha_i \notin K(\beta)$. Then there is a $\sigma \in \mathrm{Gal}(L(\beta)/K(\beta))$ such that $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j \neq \alpha_i$ for some j. This yields the contradiction $v(\alpha_i - \beta) = v(\sigma(\alpha_i - \beta)) = v(\alpha_j - \beta) = v((\alpha_j - \alpha_i) + (\alpha_i - \beta)) = v(\alpha_j - \alpha_i)$ thanks to (1)).

Define $\varepsilon = \delta^m \, v(f)^{-m}$. Let $\beta_1, \ldots, \beta_m$ be the roots of g in $\bar{K}$ with g satisfying $v(g - f) < \varepsilon$. For any root α_i of f we then obtain from (1) that

$$\textstyle\prod_{j=1}^m v(\alpha_i - \beta_j) = v(g(\alpha_i)) = v(g(\alpha_i) - f(\alpha_i)) < \varepsilon \, v(f)^m = \delta^m$$

since $v(\alpha_i) \leq v(f)$. Thus for at least one β_j, say β_i, we have $v(\alpha_i - \beta_i) < \delta$, and so $K(\alpha_i) \subset K(\beta_i)$ by Krasner's Lemma. Writing $\beta_i - \beta_j = (\beta_i - \alpha_i) + (\alpha_i - \alpha_j) + (\alpha_j - \beta_j)$, and noting that $v(\beta_i - \alpha_i)$ and $v(\alpha_j - \beta_j)$ are less than $v(\alpha_i - \alpha_j)$, we obtain from (1) that $v(\beta_i - \beta_j) = v(\alpha_i - \alpha_j)$. Hence all the β_i are distinct, and Krasner's lemma applied again shows $K(\beta_i) = K(\alpha_i)$ for all $i = 1, \dots, m$. □

1.11 Lemma (Saltman). *Let G be a finite group acting faithfully on $\{x_1, \dots, x_n\}$. Suppose that $k(x_1, \dots, x_n)^G$ has a minimal basis $y_1, \dots, y_n$. Let $v : k \to \mathbb{R}$ be a nonarchimedean valuation on k and L a Galois field extension of the completion k_v with group G. Then there is a Galois field extension N of k with group G such that $k_v \otimes_k N \simeq L$.*

Proof. By 1.6, there are rational functions $h_i(y_1, \dots, y_n) \in k(y_1, \dots, y_n)$ and elements $a_1, \dots, a_n \in k_v$ such that L is the splitting field of a separable polynomial $q(z) = z^n + \lambda_1 z^{n-1} + \dots + \lambda_n \in k_v[z]$ with $\lambda_i = h_i(a_1, \dots, a_n)$. For $b_1, \dots, b_n \in k$ define $\mu_i = h_i(b_1, \dots, b_n)$ and $g(z) = z^n + \mu_1 z^{n-1} + \dots + \mu_n \in k[z] \subset k_v[z]$. Since k is dense in k_v we can find $b_i \in k$ near a_i such that, given $\varepsilon > 0$, we have $v(g - q) < \varepsilon$. Thus L is a splitting field of $g(z)$ by 1.10, and there is an irreducible polynomial $f(z) \in k[z]$ such that $L \simeq k_v \otimes_k N$ with $N = k[z]/(f(z))$. □

1.12 Theorem [44, Prop. 2, p. 95]. *Let G act faithfully on $\{x_1, \dots, x_n\}$. If G is a cyclic group of order n divisible by 8, then $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^G$ is not purely transcendental over $\mathbb{Q}$.*

Proof. If there is a minimal basis for $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^G$, the unramified extension L_2 of $\mathbb{Q}_2$ with group G pulls back to a G-extension of $\mathbb{Q}$ by 1.11. This contradicts Wang's counterexample. □

In [63, p. 279-282], Saltman proved the following stronger version of 1.11: Let $v_1, \dots, v_m$ be inequivalent real valued valuations on k and let k_i denote the completion of k with respect to v_i. Then assuming that there is a generic extension for G over k, one can simultaneously approximate G-extensions of the k_i by a single G-extension of k. This shows, by Wang's counterexample, that generic Galois extensions do not always exist. A key role in this context plays Saltman's results [63, Th. 2.1, p. 257], [65, Th. 4.12, p. 203], and 1.9: *Let G be abelian of exponent $2^r m$ where m is odd. Then there is a generic extension for G over k if and only if k has characteristic 2 or the extension $k(\zeta)$ is cyclic over k where ζ is a primitive 2^rth root of unity.*

Thus Swan's counterexample [75] (or [79, p. 375]) shows that the answer to Noether's problem can be negative even if there is a generic extension for G over k. In particular, the converse of 1.8 is not true.

For a cyclic group C_n of order n, 1.9 yields: $k(x_1, \dots, x_n)^{C_n}$ is not rational but retract rational if $n = 47$; it is not rational nor even retract rational if $n = 8$. Here we have used the term *rational* which means *purely transcendental.*

Using Saltman's results 1.8 and [63, Th. 5.9] Sonn showed in [71] that there are also nonabelian counterexamples for Noether's problem over $\mathbb{Q}$: Let $L = \mathbb{Q}(x_\sigma \mid \sigma \in G)$ where G acts regularly on the indeterminates x_σ. If G has a cyclic factor group of order 8 then L^G is not rational.

None of the above counterexamples can apply if k is algebraically closed since they all depend on the fact that there are no roots of unity in $\mathbb{Q}$ except 1 and -1, (cf.

1.13 below). However, the geometric method of M. Artin and Mumford [3] providing unirational fields which are nonrational can be used to obtain counterexamples for Noether's problem over an algebraically closed field. The underlying idea is to find a birational invariant whose non-vanishing indicates non-rationality; an example of such an invariant is the unramified Brauer group defined below, (cf. [14] for higher cohomological invariants).

A field extension K of k is *unirational* over k if there is a rational field extension of k containing K. It is *stably rational* over k if there is a rational field extension of K being rational over k. Clearly, stably rationality implies unirationality. Also *Zariski's problem*, asking whether stably rationality implies rationality, has a negative answer [5], [50].

In [66, p. 80-83], Saltman constructed nonabelian groups G of prime power order p^9 such that L^G is not retract rational for k algebraically closed of characteristic prime to p and $L = k(x_\sigma \mid \sigma \in G)$, (where G acts via $\rho(x_\sigma) = x_{\rho\sigma}$). Thus L^G is not rational for these groups G by 1.8 and 1.9. Bogomolov [7] later found some smaller counterexamples over $\mathbb{C}$. If R is a discrete valuation domain with quotient field K then the canonical homomorphism $\mathrm{Br}(R) \to \mathrm{Br}(K)$ is an injection where $\mathrm{Br}(\ )$ denotes the respective Brauer groups of R and K, e.g. [84, § 114] and [18, II.5, V.2.2]. So $\mathrm{Br}(R)$ can be considered as a subgroup of $\mathrm{Br}(K)$. For $K \supset k$, the *unramified Brauer group* $\mathrm{Br}_v(K) \subset \mathrm{Br}(K)$ is defined to be the intersection of all $\mathrm{Br}(R)$ where R is a discrete valuation domain with quotient field K and $k \subset R$. Saltman proved that $\mathrm{Br}_v(K) = (0)$ if K is retract rational over an algebraically closed field k. Thus looking for groups G such that $K = L^G$ has nonzero unramified Brauer group yields an approach to producing counterexamples for Noether's problem, cf. [66], [67], [68], and [39, I].

Positive Results

In [57], Emmy Noether showed the existence of a minimal basis for all subgroups of the symmetric groups S_3 and S_4 when k is of characteristic 0. An elementary proof for the alternating groups A_3 and A_4 over an arbitrary field k can be found in [29]. Maeda solved Noether's problem affirmatively for the alternating group A_5 and gave a minimal basis for $k(x_1, \ldots, x_5)^{A_5}$ explicitly over every prime field k, cf. [46, Th., p. 429]. Further proofs for the case $k = \mathbb{C}$ and $G = A_5$ can be found in [46] and [39]. Cyclic groups of order 6 and p-metacyclic groups with $p = 5$ and $p = 7$ are treated in [9], [10].

Let $L_p = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_p)^{C_p}$ where C_p is a cyclic group of prime order p permuting the x_i transitively. Masuda [47], [48] showed that L_p is purely transcendental over $\mathbb{Q}$ for $p = 2, 3, 5, 7, 11$ by using Galois descent from the pth cyclotomic field. Voskresenskii [78], [79], [80] obtained various rationality results for algebraic tori thereby proving in [79, p. 377] that L_{23} is purely transcendental over $\mathbb{Q}$. He observed that if G is abelian then $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ is the function field of an algebraic torus defined over k. In [80] he showed that Swan's necessary condition [75] on the rationality of L_p is also sufficient: *L_p is purely trancendental over $\mathbb{Q}$ if and only if p or $-p$ is a norm from $\mathbb{Z}[\zeta]$ over $\mathbb{Z}$ where ζ is a primitive $(p-1)$th root of unity.* In particular, L_{13} is purely transcendental, [80, p. 1052].

Gröbner [28] computed a minimal basis for $k(x_1, \ldots, x_8)^{Q_8}$ where Q_8 is the quaternion group and k is of characteristic 0. Kemper [36] developed a method to solve Noether's problem constructively for various groups of small order. This method also yields positive results for generalized quaternion groups Q_{4n} and some classical groups.

If k has characteristic $p > 0$ and G is a finite p-group, Noether's problem has an affirmative answer. This is proved for special p-groups in [40] and [41], and for arbitrary p-groups in [27].

If $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ is a polynomial ring, then $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ is rational. Thus, by a result of Chevalley [13], Noether's problem has an affirmative answer if G is a finite reflection group and k is of characteristic 0. An automorphism σ of finite order of a vector space V is called a *pseudo-reflection* if the space of fixed points $\{v \in V \mid \sigma(v) = v\}$ has codimension one in V. Let $V \simeq \bigoplus kx_i$ and G a finite subgroup of $\mathrm{GL}(V)$. We then have by [70], [13], and [6, Th. 7.2.1]: *If k is of characteristic prime to the order of G, then the fixed ring $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ is a polynomial ring if and only if G is generated by pseudo-reflections.* This is not always true if the characteristic of k divides the order of G. However, Kemper and Malle [37] proved for a finite irreducible group G generated by pseudo-reflections, that in this case the fixed field $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ is always rational.

For G abelian with transitive action, a complete answer to Noether's problem was given by Lenstra [43] (cf. 1.18 below), based on the work of Fischer [25], Masuda [47], [48], Endo-Miyata [22], [23], and Voskresenskii [78], [79].

Note that the symmetric algebra $S_k(V)$ of an n-dimensional vector space V over k is simply the (graded) polynomial ring $k[x_1, \ldots, x_n]$.

1.13 Theorem (Fischer). *Let G be a finite abelian group acting as a group of linear transformations on a finite dimensional vector space V over k. Let $k(V)$ be the quotient field of the symmetric algebra $S_k(V)$. If the exponent e of G is prime to the characteristic of k and if k contains the eth roots of unity, then the fixed field $k(V)^G$ is purely transcendental over k.*

Proof (cf. [38]). V is a direct sum of 1-dimensional G-invariant subspaces, i.e. there is a k-basis $x_1, \ldots, x_n$ of V such that $\sigma(x_i) = \chi_i(\sigma)x_i$ for all $\sigma \in G$ where χ_i is a character of G. Let $X \subset k(V)^*$ be the multiplicative group generated by the x_i. Then X is a free abelian group of rank n, and $k(V)$ is the quotient field of $k[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}] = k[X]$, the group ring of X over k. Let $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, k^*)$ be the character group of G and define $X \to \hat{G}$ by sending x_i to χ_i. The kernel Y of this map is a free abelian group of rank n, and $k(V)^G = k(Y)$ is the quotient field of the group ring $k[Y]$. Thus $k(V)^G = k(y_1, \ldots, y_n)$ where $y_1, \ldots, y_n$ is a $\mathbb{Z}$-basis for Y. □

If k does not contain the eth roots of unity, one can attack Noether's problem by adjoining these roots of unity, applying Fischer's theorem and using Galois descent to get back to the ground field.

1.14 Descent Lemma (Speiser [72]). *Let k' be a Galois field extension of k with finite group π. Let W be a vector space over k' with π-action such that $\sigma(sw) = \sigma(s)\sigma(w)$ for $\sigma \in \pi$, $s \in k'$, $w \in W$. Then $k' \otimes_k W^\pi \to W$, $s \otimes w \mapsto sw$, is an isomorphism.*

Proof. Let W' be the subspace of W generated by $t(W)$ where $t = \sum_{\sigma\in\pi}\sigma$. Then $t(W) \subset W^\pi$ contains a k'-basis $\mathcal{B}'$ for W'. Choose a k'-basis $\mathcal{B}$ for W containing $\mathcal{B}'$. Suppose that there is a $v \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{B}'$, and define a linear map $\Phi : W \to k'$ via $\Phi(v) = 1$ and $\Phi(w) = 0$ for all $w \in \mathcal{B}, w \neq v$. Then Φ annihilates $t(W)$, and for every $\lambda \in k'$ we have $0 = \Phi(t(\lambda v)) = \sum_{\sigma\in\pi}\Phi(\sigma(v))\sigma(\lambda)$. By the linear independence of the automorphisms σ of k' we obtain that $\Phi(\sigma(v)) = 0$ for all $\sigma \in \pi$, in particular $\Phi(v) = 0$ contradicting the definition of Φ. Thus $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, and W^π contains a k'-basis for W. □

Suppose G is a finite abelian group of exponent e prime to the characteristic of k. Let $k' = k(\zeta_e)$ where ζ_e is a primitive eth root of unity, and let π be the Galois group of k' over k. For a finitely generated faithful $k[G]$-module V, we can apply 1.13 to $k' \otimes_k k(V)$. But we then have to take into consideration the π-action. Let $V' = k' \otimes_k V = \bigoplus V_\chi$ where χ runs over the character group $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, k'^*)$ and $V_\chi = \{v \in V' \,|\, g(v) = \chi(g)v \text{ for } g \in G\}$. Then π permutes the V_χ such that $\sigma(V_\chi) = V_{\sigma\chi}$ for $\sigma \in \pi$ where $(\sigma\chi)(g) = \sigma(\chi(g))$ for $g \in G$. If π_χ is the stabilizer of V_χ in π, then 1.14 shows that V_χ has a basis fixed by π_χ. Thus we can produce a basis $x_1, \ldots, x_n$ for V' such that π permutes the x_i and each x_i lies in some V_χ. Let $X \subset k'(V)^*$ be the multiplicative group generated by the x_i. Then there is a map $X \to \hat{G}$ respecting the π-action. So its kernel Y is a $\mathbb{Z}[\pi]$-module. Since $k' \otimes_k k(V)^G = (k' \otimes_k k(V))^G = k'(Y)$ we obtain that $k(V)^G = k'(Y)^\pi$. When is $k'(Y)^\pi$ purely transcendental over k?

Assume that π is a finite automorphism group of a field k'. Let M be a finitely generated $\mathbb{Z}[\pi]$-module, written multiplicatively, which is free over $\mathbb{Z}$. Then $k'(M)$ denotes the quotient field of the group ring $k'[M]$. If M has a $\mathbb{Z}$-basis permuted by π, we call M a *permutation π-module.*

1.15 Lemma (Masuda). *If P is a permutation π-module, then $k'(P)^\pi$ is purely transcendental over k'^π.*

Proof. Let $x_1, \ldots, x_n$ be a $\mathbb{Z}$-basis for P permuted by π, and let $W = \sum k'x_i$. Then 1.14 shows that there is a basis $y_1 \ldots, y_n$ for W over k' which is fixed by π. Thus $k'(P)^\pi = k'(y_1, \ldots, y_n)^\pi = k'^\pi(y_1, \ldots, y_n)$. □

1.16 Lemma (Lenstra). *Let $1 \to M \to N \to P \to 1$ be an exact sequence of finitely generated $\mathbb{Z}$-free $\mathbb{Z}[\pi]$-modules. If P is a permutation π-module, then the fields $k'(N)^\pi$ and $k'(M \times P)^\pi$ are isomorphic over k'^π.*

Proof (cf. [38]). One has an injection $N \hookrightarrow k'(N)^*$ of multiplicative groups being compatible with the action of π. Let $k'(M)^*N$ be the subgroup of $k'(N)^*$ generated by $k'(M)$ and N. There is an exact sequence of $\mathbb{Z}[\pi]$-modules

$$1 \to k'(M)^* \to k'(M)^*N \xrightarrow{\alpha} P \to 1$$

where α is well-defined by $\alpha(\lambda x) = x \bmod M$ for $\lambda \in M^*$ and $x \in N$. If we can show that this sequence splits, then $k'(M)^*N \simeq k'(M)^* \times P$. This yields a field isomorphism $k'(N) \simeq k'(M \times P)$ respecting the π-action, and 1.16 follows.

We may assume that π acts transitively on a $\mathbb{Z}$-basis $z_1, \ldots, z_m$ of P. Let ρ be the stabilizer group of z_1. We have $H^1(\rho, k'(M)^*) = 1$ by Hilbert's theorem 90, e.g. [18, IV, 1.2, p. 116]. So the exact cohomology sequence

$$H^0(\rho, k'(M)^*N) \to H^0(\rho, P) \to H^1(\rho, k'(M)^*) = 1$$

yields a surjection $(k'(M)^*N)^\rho \to P^\rho$. Choose a preimage $y_1 \in (k'(M)^*N)^\rho$ of z_1. We then obtain a section $s : P \to k'(M)^*N$ of α by setting $s(z_i) = \sigma_i(y_1)$ where $\sigma_i(z_1) = z_i$. □

Recall that a finitely generated field extension K of k is *stably rational* over k if there are indeterminates $z_1, \dots, z_m$ over K such that $K(z_1, \dots, z_m)$ is purely transcendental over k.

1.17 Theorem (Endo-Miyata [22, Th. 1.6]). *Let k' be a Galois field extension of k with finite group π. Let M be a finitely generated $\mathbb{Z}$-free $\mathbb{Z}[\pi]$-module. Then $k'(M)^\pi$ is stably rational over k if and only if there is an exact sequence $1 \to M \to Q \to P \to 1$ where P and Q are permutation π-modules.*

Proof. Assume first that $1 \to M \to Q \to P \to 1$ is exact. Then 1.15, applied to the base field $k'(M)$ instead of k', says that $k'(M \times P)^\pi$ is purely transcendental over $k'(M)^\pi$. Since $k'(Q)^\pi$ is purely transcendental over k by 1.15, and since $k'(Q)^\pi \simeq k'(M \times P)^\pi$ by 1.16, it follows that $k'(M)^\pi$ is stably rational over k.

Conversely, assume that $K = k'(M)^\pi$ is stably rational over k. Then $K(z_1, \dots, z_m) = k(y_1, \dots, y_{n+m})$ where $z_1, \dots, z_m$ and $y_1, \dots, y_{n+m}$ are algebraically independent over K and k respectively.

Consider the subrings $A = k'[M][z_1, \dots, z_m]$ and $B = k'[y_1, \dots, y_{n+m}]$ of the field $L = k'(M)(z_1, \dots, z_m) = k'(M) \otimes_K K(z_1, \dots, z_m)$. Let π act on L via the first factor. A modification of the proof of 1.5 (or [75, L. 8]) shows that there are nonzero elements $a \in A^\pi$ and $b \in B^\pi$ such that $A[a^{-1}] = B[b^{-1}] =: R$. Since A is a unique factorization domain and $a \in A^\pi$, the prime factors $p_1, \dots, p_t$ of a will be permuted by π up to units. Therefore there is an exact sequence of $\mathbb{Z}[\pi]$-modules $1 \to A^* \to R^* \to P \to 1$ where P is the permutation π-module of formal monomials of $(p_1), \dots, (p_t)$. The map $R \to P$ is given by $r \mapsto \prod (p_i)^{v_i(r)}$, where $v_i(r)$ denotes the p_i-order of r, cf. [77, p. 31] or [75, L. 7]. Analogously, we obtain an exact sequence $1 \to B^* \to R^* \to Q \to 1$ with a permutation π-module Q. Replacing R^*, A^* and B^* by R^*/k'^*, A^*/k'^* and B^*/k'^* we obtain the exact sequences $1 \to M \to R^*/k'^* \to P \to 1$ and $1 \to 1 \to R^*/k'^* \to Q \to 1$. □

If $H^1(\pi', M) = 0$ for all subgroups π' of π, then an exact sequence as in 1.17 splits. Thus 1.17 yields in this case that $k'(M)^\pi$ is stably rational over k if and only if $M \times P \simeq Q$ for certain permutation modules P and Q, cf. [43, 1.8]. This was used by Lenstra to obtain his solution of Noether's problem for G abelian.

Let 2^s be the highest power of 2 dividing n, and let ζ be a primitive 2^sth root of unity. Let k_{cycl} be the field obtained by adjoining all possible roots of unity to k. For each field L with $k \subset L \subset k_{\mathrm{cycl}}$ and L cyclic with finite group H, Lenstra defined an explicit ideal $I_L(G) \subset \mathbb{Z}[H]$ satisfying:

1.18 Theorem (Lenstra). *Let G be an abelian group acting simply transitively on the indeterminates $x_1, \dots, x_n$. Then the following are equivalent.*

(a) *The field $k(x_1, \dots, x_n)^G$ is stably rational over k.*
(b) *The field $k(x_1, \dots, x_n)^G$ is purely transcendental over k.*
(c) *For all L as above, the ideal $I_L(G)$ is principal; and if $\mathrm{char}(k) \neq 2$, then $k(\zeta)$ is a cyclic field extension of k.*

A proof of 1.18 can be found in [43] or [38]. Note that, under the assumptions of 1.18, Zariski's problem whether stably rationality implies rationality has a positive solution. A further consequence of 1.18 (cf. [43, Cor. 7.3]) is the following result of Endo and Miyata [22, Th. 3.1, Prop. 3.4], (cf. also [81, Prop. 9]):

If G is finite and abelian of exponent e dividing

$$2^2 \cdot 3^m \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71$$

for some non-negative integer m, then $k(x_1, \ldots, x_n)^G$ is rational over k.

Let k' be a Galois field extension of k with finite group π, and let M be a π-module, i.e. a finitely generated $\mathbb{Z}[\pi]$-module (written multiplicatively) which is free as an abelian group. As we have seen, Noether's problem caused the question whether the field $k'(M)^\pi$ is stably rational over k.

We know from 1.17 that $k'(M)^\pi$ is stably rational over k if and only if there is an exact sequence $1 \to M \to Q \to P \to 1$ where Q and P are permutation π-modules. Saltman [65, p. 189] showed that $k'(M)^\pi$ is retract rational over k if and only if there is an exact sequence $1 \to M \to Q \to I \to 1$ where Q is a permutation π-module and I is a direct factor of a permutation π-module. Colliot-Thélène and Sansuc [15, L. 3] pointed out that there is always a *flasque resolution* of M, that is an exact sequence

$$1 \to M \to Q \to F \to 1$$

where Q is a permutation π-module and F is a *flasque π-module* i.e. a π-module such that $H^{-1}(\pi', M) = 0$ for all subgroups π' of π. Permutation π-modules or more generally direct factors of permutation π-modules are examples of flasque π-modules.

Two flasque π-modules F_1, F_2 are said to be *stably equivalent* if there are permutation π-modules P_1, P_2 such that $F_1 \times P_1 \simeq F_2 \times P_2$. Define $\rho(M)$ to be the stable equivalence class of F where F is taken from a flasque resolution of M. It is shown in [15, L. 5] that $\rho(M)$ is well defined. Now 1.17 reads as:

$k'(M)^\pi$ is stably rational over k if and only if $\rho(M)$ is trivial.

Swan's counterexample [77, p. 34] for $k' = \mathbb{Q}(\zeta_{47})$ yields a nontrivial invariant $\rho(M)$ for which the field $k'(M)^\pi$ is retract rational (by 1.9 and [63, Th. 2.1, p. 257]). If $k' = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ then 1.12 yields a further example of a nontrivial invariant $\rho(M)$. Here $k'(M)^\pi$ is not retract rational (by [65, Th. 4.12, p. 203]).

Voskresenskii pointed out that the fields of the form $k'(M)^\pi$ are exactly the function fields of algebraic k-tori. Let T be an n-dimensional k-torus, i.e. an algebraic k-group T such that there is a field extension k' of k satisfying

$$T \times_k k' \simeq \mathbb{G}_\mathrm{m} \times_{k'} \ldots \times_{k'} \mathbb{G}_\mathrm{m} \text{ with } n \text{ factors}$$

where $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ is the multiplicative group defined by $\mathbb{G}_\mathrm{m}(k') = k'^*$. The affine k-algebra A belonging to T satisfies $A \otimes_k k' \simeq k'[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}] = k'[M]$ where M is the multiplicative group generated by the indeterminates $x_1, \ldots, x_n$. We may assume that k' is a Galois field extension of k with finite group π (e.g. [8, Chap. III, Prop. 8.11]). Then $A = (k' \otimes_k A)^\pi = k'[M]^\pi$ so that the quotient field $k'(M)^\pi$ is the function field of T. Conversely, given a π-module M where π is the Galois group of k' over k then $k' \otimes_k k[M]^\pi \simeq k[M]$ by 1.14. Therefore, the algebraic k-group $\mathrm{Spec}(k'[M]^\pi)$ defines a k-torus with function field $k'(M)^\pi$. These tori played an important role in the work of

Endo and Miyata [24], Voskresenskii [78], [81], [82], and Colliot-Thélène, Sansuc [15], [16]. In [16, §7, §8], some of Saltman's results [63], [65] on Noether's problem are generalized using the language of tori.

Following Manin, Colliot-Thélène and Sansuc considered in [15] the set $X(k)$ of points of an algebraic k-variety X modulo R-equivalence and computed the group $T(k)/R$ for the k-tori T considered above. This group measures the failure of T to be stably rational over k, (i.e. it measures the failure of the function field of T to be stably rational).

More generally, for an algebraic k-group Γ, let $R\Gamma(k)$ be the normal subgroup in $\Gamma(k)$ such that there is a rational map $f : \mathbf{A}_k^1 \to \Gamma$ defined in 0 and 1 by $f(0) = 1$ and $f(1) = x$. Denote the factor group $\Gamma(k)/R\Gamma(k)$ by $\Gamma(k)/R$. Merkurjev [49, Prop. 1] gave a simple proof of the following result: *If* Γ *is stably rational then* $\Gamma(K)/R = 1$ *for every field extension* K *of* k. For the tori T, Colliot-Thélène and Sansuc proved in [15] that R-equivalence is the same as rational equivalence and that the group $T(k)/R$ is completely determined by the invariant $\rho(M)$. In addition, they proved that $T(k)/R$ is finite if k is finitely generated over the prime field. For the proof of these facts, the reader is also referred to Swan's beautiful article [77] on Noether's problem.

2 Noether Normalization

In [58, footnote 5] and [59, p. 32], Emmy Noether referred to Hilbert's paper [32, § 1] where he had proved a graded version of the normalization lemma 2.1 below. The credit is usually given to Noether because of her use of the lemma yielding a solution of Hilbert's 14th problem for finite groups.

Let R be a commutative ring, and let A be a commutative R-algebra. An element $\alpha \in A$ is said to be *integral over* R if there is a monic polynomial $f(x) \in R[x]$ such that $f(\alpha) = 0$. If every element of A is integral over R, we say that A itself is integral over R. In general, the integral elements over R form a subring of A. Moreover, A is finitely generated as a module over R if and only if A is generated as an R-algebra by finitely many integral elements, e.g. [20, Th. 4.2, p. 118, 123, and Cor. 4.5, p. 122].

Note that for an R-algebra, the property *finitely generated as a module* is much stronger than the property *finitely generated as an algebra*; for example, the polynomial ring $k[x]$ is an infinite dimensional vector space over k with basis $\{x^i \mid i \geq 0\}$, but as a k-algebra, it is generated by the single element x.

2.1 Noether Normalization Lemma [59, p. 31/32]. *If A is a finitely generated commutative k-algebra, then there exist elements $y_1, \ldots, y_m$ in A algebraically independent over k such that A is finitely generated as a module over the subalgebra $k[y_1, \ldots, y_m]$.*

Proof. Let k be infinite. Write $A = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ and suppose that $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are algebraically dependent, i.e. there is a relation $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ where $f(x_1, \ldots, x_n)$ is a non-zero polynomial with coefficients in k. Write d for the degree of f and let f_d be the homogenous part of f of degree d. Since k is infinite there are $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in k$ such that $f_d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$. Set $y_i = \alpha_i - \lambda_i \alpha_n$ for $i = 1, \ldots, n-1$. Then

$$\begin{aligned} 0 &= f(y_1 + \lambda_1 \alpha_n, \ldots, y_{n-1} + \lambda_{n-1}\alpha_n, \alpha_n) \\ &= f_d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1)\, \alpha_n^d + g_1\, \alpha_n^{d-1} + \ldots + g_d \end{aligned}$$

with $g_i \in k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$. This shows that α_n is integral over $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$. Thus the same holds for $\alpha_i = y_i + \lambda_i \alpha_n$ with $i < n$. Hence A is integral over $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$. By induction on n, we obtain that A is integral over $k[y_1, \ldots, y_m]$ where the y_i are algebraically independent. If k is finite, then one can choose $y_i = \alpha_i - \alpha_n^{e^i}$ for some sufficiently large integer e and proceed similarly. This case was proved by Nagata, cf. [52, 14.1, p. 44]. □

A refined version of 2.1 is given in [20, Th. 13.3]. Some questions related to 2.1 like "Hochster's direct summand conjecture" are discussed in [62].

For a subring R of a commutative ring S, the ring of all elements of S integral over R is called the *integral closure of R in S*. If R has no zero-divisors $\neq 0$, the integral closure of R in its quotient field is simply called the *integral closure of R*. An important consequence of 2.1 is the finiteness of the integral closure of an affine domain:

2.2 Corollary [59, p. 32]. *Let R be a commutative finitely generated k-algebra which is a domain with quotient field K. If L is a finite field extension of K, then the integral closure $\bar{R}$ of R in L is finitely generated as an R-module.*

Proof. By 2.1, we may assume that R is a polynomial ring $k[y_1, \ldots, y_m]$.

Suppose first that L is purely inseparable over K, and $L \neq K$. Then K is of prime characteristic p, and there is some power q of p such that L is generated over K by elements $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ with $\alpha_i^q \in K$ for all i. Thus $\alpha_i^q = f_i/g_i$ where $f_i, g_i \in R$. Let k' be the field obtained from k by adjoining the qth roots of the coefficients of the f_i and g_i. Then $\bar{R}$ is contained in $R' = k'[y_1^{1/q}, \ldots, y_m^{1/q}]$, and R' is finitely generated as an R-module. This shows that $\bar{R}$ is a finitely generated R-module, since, by Hilbert's basis theorem, a submodule of a finitely generated R-module is finitely generated, (e.g. [20, Th. 1.2, and Prop. 1.4, p. 27/28]).

In general, we may replace L by its normal closure and assume that L is a finite normal field extension of K with group G. Then L is Galois over L^G, and L^G is purely inseparable over K. Corollary 2.2 then follows from the above and from standard arguments in Galois field theory, e.g. [20, Prop. 13.14, p. 298]. □

Corollary 2.2 does not remain true if one replaces the assumption that R is a finitely generated k-algebra by the weaker condition that R is a *Noetherian* ring (i.e. every ideal in R is finitely generated, or equivalently, R satisfies the ascending chain condition on ideals). Nagata [52, Ex. 5, p. 207] constructed a Noetherian domain R of Krull dimension 3 whose integral closure is not Noetherian, and hence not finitely generated as an R-module.

Corollary 2.2 is used for the normalization process in algebraic geometry, e.g. [51, p. 278]. Let X, Y be irreducible algebraic varieties over an algebraically closed field k_0. Then Y is said to be *normal* if for every point $y \in Y$ the local ring $\mathcal{O}_y$ is integrally closed. If L is a finite field extension of the function field $k_0(X)$ of X, there is a *normalization of X in L*, that is a normal variety Y with function field $L = k_0(Y)$

plus a finite surjective morphism $\pi : Y \to X$ such that the induced map $\pi^* : k_0(X) \to k_0(Y)$ is the given inclusion of $k_0(X)$ in L. This normalization is essentially unique; it is affine, if X is affine, and projective if X is projective, e.g. [51, III, § 8] including several illustrative examples.

Recall that any intermediate field between k and $F = k(x_1, \ldots, x_n)$ is finitely generated as a field over k; but a k-subalgebra of F need not be finitely generated. There is the following finiteness criterion stated by Emmy Noether in the Jahresbericht 32 (1923) and proved in [59, § 1.2] by using 2.1 and 2.2.

2.3 Noether's finiteness criterion [58, p. 180, 4]. *Let B be a k-subalgebra of a rational function field $F = k(x_1, \ldots, x_n)$. Then B is finitely generated as a k-algebra if and only if B is integral over a subring A which is a finitely generated k-algebra.*

In this case any finite set of algebra generators for A over k can be supplemented by a finite set of module generators for B over A to obtain a finite set of algebra generators for B over k

Proof. The criterion is necessary; take $A = B$. Now assume that B is integral over a finitely generated k-algebra A. Let K be the quotient field of A. Then the quotient field L of B is a finite field extension of K since L is algebraic over K and L, as a subfield of the finitely generated field F, is finitely generated. By 2.2, the integral closure $\bar{A}$ of A in L is finitely generated as an A-module. Since A is a Noetherian ring, and since B, being integral over A, is an A-submodule of $\bar{A}$, it follows that B is finitely generated as an A-module. □

In 1926, Emmy Noether gave an affirmative answer to Hilbert's 14th problem for finite groups by using the finiteness criterion 2.3. Let G be a finite group acting linearly on the polynomial ring $S = k[x_1, \ldots, x_n]$. For each monomial m in $x_1, \ldots, x_n$ of degree at most $|G|$, the order of G, let $s_m = \sum_{\sigma \in G} \sigma(m)$. Then, by [59, § 2], the fixed ring S^G is integral over the subring generated by the s_m, so 2.3 yields that S^G is a finitely generated k-algebra. In 1951, E. Artin and Tate proved the following more general theorem where k is replaced by an arbitrary commutative Noetherian ring R, and S by a commutative finitely generated ring extension of R.

2.4 Theorem [32, § 1], [2, Th. 1], [59, § 2]. *Let R be a commutative Noetherian ring, S a commutative ring extension of R being finitely generated as an R-algebra, and T a ring with $R \subseteq T \subseteq S$. If S is integral over T, then T is finitely generated as an R-algebra.*

In particular, if G is a finite group of R-algebra automorphisms of S, the fixed ring S^G is a finitely generated R-algebra.

Proof. Let $s_1, \ldots, s_\ell$ be a finite set of algebra generators for S over R. Since S is integral over T, each s_i satisfies a monic polynomial with coefficients in T. Let T' be the R-subalgebra of T generated by the coefficients of these polynomials. Then each s_i is integral over T'. Thus S is finitely generated as a T'-module, e.g. [20, Cor. 4.5]. So T is finitely generated as a T'-module, since T' is a finitely generated R-algebra and hence Noetherian. It follows that T is finitely generated as an R-algebra. If G acts on S, then every $s \in S$ satisfies the monic polynomial $\prod_{\sigma \in G}(z - \sigma(s))$ in one indeterminate z, and with coefficients in S^G. Thus S is integral over S^G, and the second statement follows from the first. □

Theorem 2.4 is related to the following problem in algebraic geometry. Suppose that an algebraic group G over k acts on an algebraic k-variety X such that there is a morphism of $G \times_k X \to X$ of algebraic varieties. Does the orbit space X/G carry a canonical structure of an algebraic variety? Let $X = \mathrm{Spec}S$ be affine. Then the variety X/G of G-orbits should be $\mathrm{Spec}S^G$ leading to the question whether S^G is a finitely generated k-algebra. Using 2.4 one can show that X/G is again an affine variety, if G is finite, e.g. [20, p. 301], [8, II, 6.15].

Noether normalization has become a basic tool in commutative algebra, e.g.: define the *Krull dimension* $\dim R$ of a commutative ring R to be the supremum of the lenghts of chains of prime ideals in R. Then 2.1 yields for any commutative finitely generated k-algebra A which is a domain with quotient field K that $\dim A$ is the transcendence degree of K over k, e.g. [20, p. 293].

Thanks to 2.1, there is a short proof of *Hilbert's Nullstellensatz* saying that any prime ideal $\mathfrak{p}$ in a commutative finitely generated k-algebra A is the intersection of maximal ideals of A; and if $\mathfrak{p}$ is a maximal ideal then $A/\mathfrak{p}$ is a finite field extension of k, e.g. [20, p. 296, and p. 134].

Let R be a Noetherian domain and S a commutative finitely generated R-algebra. The *Generic Freeness Lemma* states that there is a non-zero element $f \in R$ such that S_f is free as an R_f-module. For a proof based on 2.1, cf. [62, p. 44]. A more general version of the generic freeness lemma can be found in [20, Th. 14.4].

Noether normalization from the computer algebra point of view is discussed in [21], cf. [21], [74] for further interesting references.

References

[1] *E. Artin:* Algebraic numbers and algebraic functions, Gordon & Breach 1967.

[2] *E. Artin and J. Tate:* A note on finite ring extensions, J. Math. Soc. Japan **3** (1951), 74-77, (in Artin's Collected Papers, 383-386, Springer-Verlag 1965).

[3] *M. Artin and D. Mumford:* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 75–95.

[4] *A. Beauville:* Variétés rationelles et unirationnelles, in Algebraic Geometry: Open Problems, Proc. Ravello 1982, (C. Ciliberto e.a., Eds.), Lecture Notes Math. **997**, Springer-Verlag 1983.

[5] *Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc, and Sir Peter Swinnerton-Dyer:* Variétés stablement rationelles non rationnelles, Ann. of Math. **121** (1985), 283–318.

[6] *D. J. Benson:* Polynomial invariants of finite groups, London Math. Soc. Lecture Ser. **190**, Cambridge Univ. Press 1993.

[7] *F. A. Bogomolov:* The Brauer group of quotient spaces of linear representations (Russian), Engl. transl.: Math. USS Izv. **30** (1988), 455-485.

[8] *A. Borel:* Linear algebraic groups, Second Enlarged Edition, Springer-Verlag 1991.

[9] *S. Breuer:* Zyklische Gleichungen 6. Grades und Minimalbasis, Math. Ann. **86** (1922), 108–113.

[10] *S. Breuer:* Zur Bestimmung der metazyklischen Minimalbasis vom Primzahlgrad, Math. Ann. **92** (1924), 126–144.

[11] *G. Castelnuovo:* Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Ann. **44** (1894), 125–155.

[12] *S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg:* Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Mem. Amer. Math. Soc. **52** (1965), 1–19.

[13] *C. Chevalley:* Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. **67** (1955), 778–782.

[14] *J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren:* Variétés unirationelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. math. **97** (1989), 141-158.
[15] *J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc:* La R-équivalence sur tores, Ann. Sci. Ec. Norm Sup. 4e série **10** (1977), 175–230.
[16] *J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc:* Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications, J. of Algebra **106** (1987), 148–205.
[17] *F. R. DeMeyer:* Generic polynomials, J. Algebra **84** (1983), 441–448.
[18] *F. R. DeMeyer and E. Ingraham:* Separable algebras over commutative rings, Lecture Notes Math. **181**, Springer-Verlag 1971.
[19] *J. Dieudonné & J. Carrell:* Invariant theory, old and new, Academic Press 1971.
[20] *D. Eisenbud:* Commutative Algebra (with a view toward Algebraic Geometry), Springer-Verlag 1995, second printing 1996.
[21] *D. Eisenbud and B. Sturmfels:* Finding sparse systems of parameters, J. Pure Appl. Algebra **94** (1994), 143–157.
[22] *S. Endô and T. Miyata:* Invariants of finite abelian groups, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 7–26.
[23] *S. Endô and T. Miyata:* Quasipermutation modules over finite groups I and II, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 397–421, and **26** (1974), 698–713.
[24] *S. Endô and T. Miyata:* On a classification of the function fields of algebraic torii, Nagoya Math. J. **56** (1975), 85-104. (Corr. **79** (1980), 187-190.)
[25] *E. Fischer:* Die Isomorphie der Invariantenkörper der endlichen abelschen Gruppen linearer Transformationen, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1915, 77–80.
[26] *E. Formanek:* Rational function fields, Noether's problem and related questions, J. Pure Appl. Algebra **31** (1984), 28–36.
[27] *W. Gaschütz:* Fixkörper von p-Automorphismengruppen rein-transzendenter Körpererweiterungen von p-Charakteristik, Math. Zeitschrift **71** (1959), 466–468.
[28] *W. Gröbner:* Minimalbasis der Quaternionengruppe, Monatshefte Math. Physik **41** (1934), 78–84.
[29] *M. Hajja:* The alternating functions of three and of four variables, Algebras Groups Geom. **6** (1989), 49–54.
[30] *D. Hilbert:* Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. **36** (1890), 473–534, (in [33], 199–257).
[31] *D. Hilbert:* Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten, J. reine angew. Math. **110** (1892), 104-129, (in [33], 264–286).
[32] *D. Hilbert:* Über die vollen Invariantensysteme, Math. Ann. **42** (1893), 313–373, (in [33], 287–344).
[33] *D. Hilbert:* Gesammelte Abhandlungen Band II, Algebra, Invariantentheorie, Geometrie, Chelsea Publ. Co. 1965.
[34] *J. E. Humphreys:* Hilbert's fourteenth problem, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 341–353.
[35] *G. Kemper:* Das Noethersche Problem und generische Polynome, Diss. Heidelberg 1994. Electronic version: http://www.iwr.uni-heidelberg.de/ ~Gregor.Kemper
[36] *G. Kemper:* A constructive approach to Noether's problem, manuscripta math. **90** (1996), 343-363.
[37] *G. Kemper and G. Malle:* Invariant fields of finite irreducible reflection groups, IWR Preprint 97-26, Heidelberg 1997.
[38] *M. Kervaire:* Fractions rationelles invariantes (d'après H. W. Lenstra), Sém. Bourbaki (1973/74), no. 445.
[39] *M. Kervaire and T. Vust:* Fractions rationelles invariantes par un groupe fini: Quelques exemples, in: Algebraic transformation groups and invariant theory, (H. P. Kraft e.a., Eds.), DMV Seminar **13**, 156–179, Birkhäuser Verlag 1989.
[40] *H. Kuniyoshi:* On purely-transcendency of a certain field, Tôhoku Math. J. **6** (1954), 101–108.
[41] *H. Kuniyoshi:* On a problem of Chevalley, Nagoya Math. J. **8** (1955), 65–67.
[42] *W. Kuyk:* On a theorem of E. Noether, Proc. Nederl. Akad. Wet. Ser. A **67** (1964), 32–39.
[43] *H. W. Lenstra, Jr.:* Rational functions invariant under a finite abelian group, Invent. math. **25** (1974), 299–325.

[44] *H. W. Lenstra, Jr.:* Rational functions invariant under a cyclic group, Proc. Number Theory Conf., Kingston, Queen's Papers Pure Appl. Math. **54** (1980), 91-99.
[45] *J. Lüroth:* Beweis eines Satzes über rationale Kurven, Math. Ann. **9** (1876) 163-165
[46] *T. Maeda:* Noether's problem for A_5, J. Algebra **125** (1989), 418–430.
[47] *K. Masuda:* On a problem of Chevalley, Nagoya Math. J. **8** (1955), 59–63.
[48] *K. Masuda:* Application of the theory of the group of classes of projective modules to the existence problem of independent parameters of invariant, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 223–232.
[49] *A. S. Merkurjev:* R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups, Publ. Math. I.H.E.S. **84** (1996), 189–213.
[50] *L. Moret-Bailly:* Variétés stablement rationelles non rationnelles (d'après Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer), Sém. Bourbaki (1984/85), Astérisque **133-134** (1986), 223–236.
[51] *D. Mumford:* The red book of varieties and schemes, Lecture Notes Math. **1358**, Springer-Verlag 1988.
[52] *M. Nagata:* Local rings, Wiley 1962.
[53] *M. Nagata:* Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Lect. Notes **31**, Tata Institute Bombay, 1965.
[54] *E. Noether:* Rationale Funktionenkörper, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **22** (1913), 316–319, (in [60], 141–144).
[55] *E. Noether:* Körper und Systeme rationaler Funktionen, Math. Ann. **76** (1915), 161–196, (in [60], 145–180).
[56] *E. Noether:* Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, Math. Ann. **77** (1916), 89–92, (in [60], 181–184).
[57] *E. Noether:* Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, Math. Ann. **78** (1918), 221–229, (in [60], 231–239).
[58] *E. Noether:* Algebraische und Differentialinvarianten, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **32** (1923), 177–184, (in [60], 436–443).
[59] *E. Noether:* Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1926, 28–35, (in [60], 485–492).
[60] *E. Noether:* Collected Papers, Edited by N. Jacobson, Springer-Verlag 1983.
[61] *V. L. Popov:* Groups, generators, syzygies, and orbits in invariant theory, Transl. Math. Monographs **100**, Amer. Math. Soc. 1992.
[62] *J. Sally:* Noether normalization, in Emmy Noether in Bryn Mawr (B. Srinivasan and J. Sally, Eds.), 41–45, Springer-Verlag 1983.
[63] *D. J. Saltman:* Generic Galois extensions and problems in field theory, Adv. in Math. **43** (1982), 250–283.
[64] *D. J. Saltman:* Generic structures and field theory, in Algebraists Homage (G. Seligman, et al., Eds.) Contemporary Math. **13** (1982), 127–134.
[65] *D. J. Saltman:* Retract rational fields and cyclic Galois extensions, Israel J. Math. **47** (1984), 165–215.
[66] *D. J. Saltman:* Noether's problem over an algebraically closed field, Invent. math. **77** (1984), 71–84.
[67] *D. J. Saltman:* Groups acting on fields: Noether's problem, in Group Actions on Rings, Contemporary Math. **43** (1985), 267–277.
[68] *D. J. Saltman:* Multiplicative field invariants, J. Algebra **106** (1987), 221–238.
[69] *D. J. Saltman:* Twisted multiplicative field invariants, Noether's problem, and Galois extensions, J. Algebra **131** (1990), 535–558.
[70] *G. C. Shephard and J. A. Todd:* Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.
[71] *J. Sonn:* Nonabelian counterexamples to the Noether problem, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 225–226.
[72] *A. Speiser:* Zahlentheor. Sätze aus der Gruppentheorie, Math. Z. **5** (1919), 1–6.
[73] *T. A. Springer:* Invariant theory, Lecture Notes Math. **585**, Springer-Verlag 1977.
[74] *B. Sturmfels:* Algorithms in invariant theory, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag 1993.

[75] *R. G. Swan:* Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Invent. math. **7** (1969), 148–158.

[76] *R. G. Swan:* Galois theory, in Emmy Noether: A tribute to her life and work (J. W. Brewer and M. K. Smith, Eds.), 115–124, Marcel Dekker 1981.

[77] *R. G. Swan:* Noether's Problem in Galois theory, in Emmy Noether in Bryn Mawr (B. Srinivasan and J. Sally, Eds.), 21–40, Springer-Verlag 1983.

[78] *V. E. Voskresenskii:* Birational properties of linear algebraic groups (Russian), Engl. transl.: Math. USSR Izv. **4** (1970), 1-17.

[79] *V. E. Voskresenskii:* On the question of the structure of the subfield of invariants of a cyclic group of automorphisms of the field $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ (Russian), Engl. transl.: Math. USSR Izv. **4** (1970), 371-380.

[80] *V. E. Voskresenskii:* Rationality of certain algebraic tori (Russian), Engl. transl.: Math. USSR Izv. **5** (1971), 1049-1056.

[81] *V. E. Voskresenskii:* Fields of invariants of abelian groups (Russian), Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), 77-102. Engl. transl.: Russ. Math. Surveys **28** (1973), 79-105.

[82] *V. E. Voskresenskii:* Stable equivalence of algebraic tori (Russian), Engl. transl.: Math. USSR Izv. **8** (1974), 1–7.

[83] *S. Wang:* A counterexample to Grunwald's theorem, Ann. of Math. **49** (1948), 1008-1009.

[84] *B. van der Waerden:* Algebra, Erster Teil, 7. Auflage. Zweiter Teil, 5. Auflage. Springer-Verlag 1966/67.

[85] *O. Zariski:* On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Illinios J. Math. **2** (1958), 303–315.

Ina Kersten
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 10 01 31
D-33501 Bielefeld
kersten@mathematik.uni-bielefeld.de

(*Eingegangen 2. 12. 1997*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
100 (1998) 23–35
Mathematics Subject Classification: 53 C 42

Smooth tight immersions

G. Thorbergsson, Köln

1 Introduction

The paper *Der Satz von Gauß-Bonnet für Abbildungen in E^{N} und damit verwandte Probleme* by N.H. Kuiper, that appeared in volume 69 of this journal, deals with Morse theory of submanifolds of Euclidean spaces and its relation with integrals of curvature invariants. Fenchel's [Fen] well-known theorem from the year 1929 is typical for this kind of results although it was not originally proved by Morse theory. It says that the total curvature of a closed curve in E^3 is at least 2π and if it is 2π, then the curve is a planar convex curve. One should also mention the theorem of Fáry [Fa] and Milnor [Mi 1] saying that the total curvature of a knot in E^3 exceeds 4π. Active research in the area starts with the papers [Ch] [CL 1,2] of Chern and Lashof that appeared between 1955 and 1958. Notice though that some of the results of those papers are already in Milnor's Junior Thesis [Mi 2] from the year 1950 that was only recently published.

I would like to review here some of the development that this and other papers of Kuiper on Morse theory and submanifolds have inspired. Instead of giving a complete survey, I will try to indicate certain topics that I find particularly interesting. Kuiper was very interested in generalizations to polyhedral or topological immersions as one can see in the above mentioned paper. Here I will restrict myself to smooth immersions and refer the reader to [Ku 9] and also [Kü] for the other cases. The reader will find additional informations on the smooth case in [Ku 8], [Ku 9] and in the monograph [CR].

Let $f : M \to E^N$ be an immersion of a compact n-dimensional manifold M and denote by $\nu^1(M)$ its unit normal bundle. We will always assume that immersions are *substantial*, i.e., their images are not contained in proper affine subspaces of E^N. We have the normal mapping of Gauss $\eta : \nu^1(M) \to S^{N-1}$ that is nothing but a parallel translation of a normal vector to a vector with footpoint in the origin. The unit normal bundle $\nu^1(M)$ has a canonical orientation and a volume form dv. Let $d\sigma_{N-1}$ be the volume form of S^{N-1}. Then we have a function G on $\nu^1(M)$ defined by

$$(1.1) \qquad \eta^* d\sigma_{N-1} = G\, dv.$$

The function G is called the *Lipschitz-Killing curvature of M*. We have that $G(\xi) = \det A_\xi$ where A_ξ is the shape operator in direction of the normal vector ξ.

The theorem of Gauss-Bonnet tells us that

$$(1.2)\quad \chi(M) = \frac{1}{c_{N-1}} \int_{\nu^1(M)} G\, dv,$$

where c_{N-1} is the volume of the unit sphere S^{N-1}.

The *total absolute curvature of the immersion* f is defined as the integral

$$(1.3)\quad \tau(M,f) = \frac{1}{c_{N-1}} \int_{\nu^1(M)} |G|\, dv.$$

In contrast to the Euler characteristic in (1.2), $\tau(M,f)$ is not a topological invariant of M and its value is in general not an integer. In the case of a closed curve $c : S^1 \to E^3$, the total absolute curvature $\tau(c, S^1)$ multiplied by π is the total curvature considered by Fenchel, Fáry and Milnor. In the case of immersions of surfaces into E^3, the total absolute curvature is

$$(1.4)\quad \tau(M,f) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K|\, dM,$$

where K denotes the Gaussian curvature. We denote by γ the minimum number of critical points that a Morse function can have on M. By the Morse inequalities

$$(1.5)\quad \gamma \geq \sum_{k=0}^{n} \beta_k(M; \mathbf{F}),$$

where $\beta_k(M; \mathbf{F})$ denotes the k-th Betti number of M with respect to the field $\mathbf{F}$. Chern and Lashof prove in [CL 2] that

$$(1.6)\quad \tau(M,f) \geq \gamma.$$

It follows in particular that

$$(1.7)\quad \tau(M,f) \geq \sum_{k=0}^{n} \beta_k(M; \mathbf{F}).$$

The essential observation in the proofs of (1.2) and (1.6) is that $v \in S^{N-1}$ is a regular value of the Gauss map η if and only if the height function $h_v : M \to \mathbf{R}; p \to \langle v, f(p)\rangle$ is a Morse function and the critical points of h_v are the footpoints of the unit normal vectors in $\eta^{-1}(v)$. One then uses that the integral in (1.2) is the degree of the Gauss map and the total absolute curvature is the mean number of critical points of height functions on M.

The number γ is of course greater or equal to 2. Hence $\tau(M,f) \geq 2$. If $\tau(M,f) = 2$, then it is proved by Chern and Lashof in [CL 1] that $f(M)$ is a convex hypersurface. Remember that we always assume that f is substantial. The equality $\tau(M,f) = 2$ therefore implies in particular that $N = n + 1$. It is also proved in [CL 1] that $\tau(M,f) < 3$ implies that M is homeomorphic to a sphere. Ferus proves in [Fer] that $\tau(M,f) \geq 4$ if M is an exotic sphere and the codimension is equal to 2.

An interesting observation of Kuiper [Ku 1] is that the infimum over $\tau(M,f)$ as f varies over all immersions of M into a Euclidean space is the number γ, see also [Wi].

Kuiper's work is mainly on the implications of an equality in (1.6). Not much is known about this except when $\gamma = \sum \beta_k$. This is the case when we have equality in (1.7). An immersion $f : M \to E^N$ of a compact manifold is said to be *tight* when (1.7) is an equality. In the paper of Kuiper that we referred to at the beginning, such an f is called convex, but that terminology is not used any more.

An equivalent definition of a tight immersion $f : M \to E^N$ is to require that almost all height functions h_v on M are perfect Morse functions with respect to some field $\mathbf{F}$. A Morse function is said to be *perfect* with respect to $\mathbf{F}$ if the Morse inequalities with respect to that field are equalities, or equivalently, if the function has $\sum \beta_k(M, \mathbf{F})$ critical points.

Convex hypersurfaces are clearly tight. In the case of surfaces, γ is equal to the sum of the $\mathbf{Z}_2$-Betti numbers which in turn is equal to $4 - \chi(M)$. A surface is therefore tight in E^3 if and only if

$$4 - \chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| \, dM.$$

This holds if and only if the surface lies on one side of the tangent plane at every point of positive Gaussian curvature, see [CL 2].

A very rich class of tightly embedded submanifolds were found by Bott and Samelson in [Bo] and [BS] although they neither state their result in our terminology, nor mention total absolute curvature. In [Bo] Bott proved that the adjoint orbits of a compact Lie group G in its Lie algebra have the property that the indices of all critical points of height functions (and more generally of distance functions) are even. It follows that they are perfect with respect to any field if they are Morse functions. More generally, Bott and Samelson proved in [BS] that the orbits of the isotropy representation of a symmetric space, usually called *generalized flag manifolds* and sometimes *R-spaces*, have the property that height functions (and more generally distance functions) that are Morse functions, are perfect with respect to $\mathbf{Z}_2$. Immersions with the property that distance functions that are Morse functions are perfect, are now called *taut*. The result of Bott and Samelson was reproved by Takeuchi and Kobayashi in [TK].

There are beautiful examples among the generalized flag manifolds. Very well known are the standard embeddings of the projective spaces that in the case of the real projective spaces coincide with their Veronese embeddings. These standard embeddings can be defined as follows. Let $\mathbf{F}$ denote the real numbers $\mathbf{R}$, the complex numbers $\mathbf{C}$, the quaternions $\mathbf{H}$ or the octonions $\mathbf{O}$. Then the n-dimensional projective space $P_n(\mathbf{F})$ over $\mathbf{F}$ can be identified with the space of $(n+1) \times (n+1)$ matrices A over $\mathbf{F}$ satisfying $A = \bar{A}^t$, $A^2 = A$ and trace $A = 1$, where one has to restrict oneself to $n = 2$ if $\mathbf{F} = \mathbf{O}$. It turns out that these embeddings are substantial in an N-dimensional affine subspace of the matrix space with

$$N = n + d\frac{n(n+1)}{2}$$

where $d = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}$. We will discuss these embeddings and their rigidity properties in sections three and four below.

2 Bounds on the codimension

In his first papers on tight immersions [Ku 1,2], Kuiper deals with the following question.

Given a compact manifold M^n, for which N can there exist a substantial tight immersion f of M^n into E^N?

An immersion $f : M^n \to E^N$ is said to satisfy the *two-piece property* if the preimage of a halfspace of E^N under f is connected, or, equivalently, height functions that are Morse functions have precisely one minimum. A tight immersion obviously satisfies the two-piece property. An immersion of a surface (or a curve) is tight if and only if it satisfies the two-piece property. Kuiper's first observation can be phrased as follows.

2.1 Proposition. *Let $f : M^n \to E^N$ be a substantial immersion of a compact manifold that satisfies the two-piece property, and let p in M^n be a point such that $|f(p)| = \max\{|f(q)|; q \in M\}$. Then E^N coincides with the second osculating space of f at p. In particular,*

$$N \leq \frac{1}{2}n(n+3).$$

Here the second osculating space of f at p is the affine space spanned by the first and second partial derivatives of f at p. Counting these derivatives shows that the dimension of the second osculating space can be at most $\frac{1}{2}n(n+3)$. The Veronese embedding of the real projective space $P_n(\mathbf{R})$ is tight in E^N with $N = \frac{1}{2}n(n+3)$, showing that this estimate is optimal.

In particular, a surface can be tight in E^5, but not in any higher dimensional Euclidean space.

Kuiper now refines this estimate as follows. Let $\beta_* = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ be an $(n+1)$-tuple of natural numbers. Let $g(\beta_*)$ be the maximal dimension of a linear system of quadratic forms of n variables that contains at least one positive definite form and no one with index k if $\beta_k = 0$. Notice that only the vanishing components of β_* influence the value of $g(\beta_*)$. In the applications to tight immersions, β_k is the k-th Betti number of M. If f is tight, then the linear system of quadratic forms defined on the tangent space T_pM of a point p as in Proposition 2.1 by

$$\{\langle A_\xi(X), Y\rangle \; ; \; \xi \in \nu_p(M)\},$$

where A_ξ is the shape operator in normal direction ξ, has dimension $g(\beta_*)$ at most. Hence the following theorem holds.

2.2 Theorem. *Let $f : M^n \to E^N$ be a substantial tight immersion. Then*

$$N \leq n + g(\beta_*(M))$$

where $\beta_*(M)$ denotes the sequence of $\mathbf{F}$-Betti numbers of M^n where $\mathbf{F}$ is the field with respect to which the immersion f is tight.

It is in general difficult to estimate the number $g(\beta_*)$. He mentions without a proof in [Ku 2] that $\beta_1 = 0$ and $n = 2m$ or $n = 2m + 1$ implies that $g(\beta_*) \le m^2$. This is optimal if $n = 2m$ as the standard embeddings of the complex projective spaces show.

Kuiper discusses in several of his papers the case of manifolds of dimension $n = 2k$ that are $(k-1)$-connected, but not k-connected. Here we will call such manifolds *highly connected.* In section four we will discuss them in more detail and restrict ourselves in this section to the possible codimensions and the corresponding linear systems of quadratic forms. These results can be found in [Ku 2] and in more detail in [Ku 8].

Let L^m be a linear system of dimension m of quadratic forms on an $n = 2k$-dimensional vector space $T = T^n$ and assume that

(1) L^m contains a positive definite form,
(2) almost all forms in L^m are nondegenerate with index in the set $\{0, k, 2k\}$.

Then L^m has a basis which can be represented with respect to a certain basis of T as the following set of symmetric $2k \times 2k$-matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Q_i \\ {}^tQ_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m-3,$$

where 1 is the $k \times k$ identity matrix, $Q_i = -{}^tQ_i$, $Q_i^2 = -1$, $Q_iQ_j + Q_jQ_i = 0$ for $i \neq j$, and ${}^tQ_i$ denotes the transpose of Q_i. In particular, we have a normal form of L^m related to a representation of the Clifford algebra C_{m-3}. It follows that $m \le k+2$ and $m = k+2$ implies that $k = 1, 2, 4$ or 8.

In the case that $m = k+2$, the restrictions on k also follow from the theorem of Hurwitz on the dimensions of normed algebras. The classification of such algebras [Hu] can then be used to show that L^m in an appropriate basis of T can be expressed by the set of symmetric matrices

$$\begin{pmatrix} y_1 1 & B \\ {}^tB & y_2 1 \end{pmatrix},$$

where y_1 and y_2 are some real numbers and B is the $k \times k$ matrix ($k = 1, 2, 4$ or 8) in the upper left hand corner of the following matrix with entries some real numbers $x_1, , x_k$

$$\begin{pmatrix}
x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\
x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & -x_8 & x_7 \\
x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & -x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 \\
x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & x_7 & -x_6 & -x_5 \\
x_5 & x_6 & x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\
x_6 & -x_5 & -x_8 & -x_7 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\
x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\
x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1
\end{pmatrix}$$

Kuiper thus found a normal form for the second fundamental form of a tight substantial immersion of a highly connected $2k$-dimensional compact manifolds into E^{3k+2} at a point p as in Proposition 2.1. This is an important step in their classification as we will explain in section four below.

One should remark that there is no bound on the codimension of a tight polyhedral surface, see [Ba].

3 Surfaces

Several of Kuiper's papers are dedicated to tight surfaces. It follows from what was explained in section two that the maximal dimension of a Euclidean space into which a surface can be substantially and tightly embedded is five.

Surfaces in E^3

It is easy to find smooth tight embeddings of all compact oriented surfaces into E^3. As was observed by Chern and Lashof in [CL 2], these are precisely the oriented surfaces in E^3 with the property that points of positive Gauss curvature lie on the boundary of the convex hull of the surface. Kuiper found examples of tight immersions of all nonorientable surfaces into E^3 except for the projective plane P, the Klein bottle K and the projective plane with one handle $P\#T$. The only complicated case is $P\#T\#T$, see [Ku 4]. In [Ku 5] he proved the following theorem.

3.1 Theorem. *The projective plane P and the Klein bottle K do not admit any smooth tight immersions into E^3.*

It was then an open problem for thirty years whether there is a tight immersion into E^3 of a projective plane with one handle. The answer was finally given by Haab in [Ha]. He proved the following theorem.

3.2 Theorem. *There does not exist any smooth tight immersion of the projective plane with one handle $P\#T$ into E^3.*

In [Ku 10], Kuiper shows that all nonorientable compact surfaces with even Euler characteristic admit analytic tight immersions into E^3. It is not known which of the compact nonorientable surfaces with odd Euler characteristic admit an analytic tight immersion into E^3.

Total absolute curvature of knotted surfaces in E^3 has been studied by several authors. Langevin and Rosenberg [LR] show that if the total curvature of a torus embedded in E^3 is less than 8, then it is unknotted. Kuiper and Meeks improve this to less than or equal to 8 in [KM 1]. Compact surfaces of higher genus were considered by Morton [Mo] and Meeks [Me] who prove that if the total absolute curvature of a compact embedded surface of genus g in E^3 is less than $2g + 8$, then the surface is unknotted. This was then generalized by Kuiper and Meeks in [KM 1,2] where the notion of *isotopy tightness* is also introduced. All of this is of course related to the theorem of Fáry and Milnor mentioned in the introduction saying that the total curvature of a knotted simple closed curve in E^3 exceeds 4π.

Similar in spirit is Pinkall's paper [Pi] where it is shown that the infimum of the total absolute curvature over a regular homotopy class of immersions of a compact surface M is the sum of its Betti numbers. He then addresses the problem of finding tight representatives in the regular homotopy classes. If $\chi(M) < -9$, or if M is orientable with genus $g \geq 4$, then every immersion of M into E^3 is regularly homotopic to a tight immersion. There are immersions which are not regularly homotopic to a tight immersion. Theorem 3.1 shows that this is the case for every immersion of the projective plane or Klein bottle. Pinkall shows in [Pi] that every tight immersion of the torus T^2 is regularly homotopic to a standard embedding. Hence there are no tight immersions in the nonstandard regular homotopy class of immersed tori.

Surfaces in E^4

In [Ku 8] Kuiper gives examples of smooth substantial tight immersions into E^4 of all compact orientable surfaces except the two-sphere. The two-sphere does not admit any substantial tight immersion into a Euclidean space with dimension greater than three by [CL 1]. He claims in [Ku 8] without giving concrete examples that all nonorientable surfaces with Euler characteristic $\chi(M) \leq -4$ admit such immersions. See [CR], p. 80-81, for details. In [Ku 9] he claims again without giving concrete examples that there are such immersions into E^4 for all nonorientable surfaces except the Klein bottle. It is still an open problem whether the Klein bottle allows any tight immersion into E^4. The easiest examples of tight surfaces in E^4 are the product embedding of two convex curves, i.e. tori, and the stereographic projection of the Veronese embedding of the projective plane in S^4 to E^4. All other examples contain planar pieces. Kuiper therefore asked which are the analytic substantial tight immersions of surfaces into E^4. It is proved in [Th 2] that the only orientable surface that allows an analytic tight immersion into E^4 is the torus. The nonorientable case is still open. The only known example is the projective plane.

Surfaces in E^5

The highest dimensional Euclidean space into which a surface can be tightly embedded is E^5. Kuiper proved the following remarkable theorem in [Ku 6].

3.3 Theorem. *Let $f : M^2 \to E^5$ be a substantial tight immersion. Then M^2 is the real projective plane and f is up to a projective transformation the Veronese embedding.*

It is not difficult to see that the property of being tight is invariant under projective transformations of the ambient space in the sense that one adds a hyperplane at infinity and considers images of submanifolds under projective transformations that do not meet the hyperplane at infinity.

Theorem 3.3 was generalized by Kuiper and Pohl [KP] to topological tight embeddings of the projective plane into E^5. It turns out that there are up to projective transformations two examples, the Veronese surface and a polyhedral example of Banchoff.

In the proof of Theorem 3.3, Kuiper shows that the theorem is a consequence of the following old result of local projective differential geometry. Assume we have a piece of a substantial surface U in five dimensional projective space with the property that there is for every point p in U a one-parameter family of pieces of conics in U passing through p. Then U is up to a projective transformation a piece of the Veronese surface. The piece of the tightly immersed surface M one applies this result to, is a sufficiently small neighborhood of a point p that has maximum distance from the origin as in Proposition 2.1. The conics are what Kuiper called *top sets*, i.e., sets of maxima of height functions. Locally around p, the tight surface therefore agrees with the Veronese surface. It is now easy to see that M and the Veronese surface agree on a nonempty open and closed set in M, thus finishing the proof.

Theorem 3.3 was generalized by Little and Pohl [LP] as follows.

3.4 Theorem. *Let $f : M^n \to E^N$, $N = \frac{1}{2}n(n+3)$, be a substantial immersion of a compact manifold that satisfies the two-piece property. Then M^n is the real projective space $P_n(\mathbf{R})$ and f is projectively equivalent to the Veronese embedding.*

The proof also depends on a result of local projective differential geometry. To state it we need to introduce two new concepts. We say that an immersion f of an n-dimensional manifold U into E^N, $N = \frac{1}{2}n(n+3)$, is *nondegenerate* if the second osculating space at every point in U is the whole space E^N. We say that a supporting hyperplane H of f at p *supports f to the second order at p*, if there is a curve γ with $\gamma(0) = p$ in M such that $(f \circ \gamma)'(0), (f \circ \gamma)''(0) \in H$; and H *supports f at p to the third order* if also $(f \circ \gamma)'''(0) \in H$. Now the local result is the following: Let $f : U \to E^N$, $N = \frac{1}{2}n(n+3)$, be a nondegenerate immersion with the property that every hyperplane that supports f to the second order, supports it to the third order. Then $f(U)$ is up to a projective transformation a piece of a Veronese. A new proof of the local result was given by Sasaki in [Sa].

4 Highly connected manifolds

When generalizing the theory of smooth tight immersions of surfaces to higher dimensional manifolds, it turns out that $2k$-dimensional compact manifolds that are $(k-1)$-connected still have many of the properties explained in section three. We will call such manifolds *highly connected.* We will always assume that they are not k-connected, since such manifolds which are k-connected and tight would be convex hypersurfaces by a theorem of Chern and Lashof [CL 1].

In the case of surfaces we have the two cases of orientable and nonorientable ones. A surface M^2 is nonorientable if and only if there is a 1-cycle in M with self-intersection number mod two equal to one. This is equivalent to the vanishing of the first Stiefel-Whitney class $w_1(M^2)$. Now let M^{2k} be $(k-1)$-connected, but not k-connected. Then M^{2k} has a k-cycle with self-intersection number one if and only if the Stiefel-Whitney class $w_k(M^{2k})$ does not vanish. It follows from [Mi 3] that k is 1, 2, 4 or 8, if $w_k(M^{2k})$ does not vanish. Examples of such manifolds are the projective planes over $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ and $\mathbf{O}$ with a k-cycle having self-intersection number one being a projective line (which as a manifold is a k-sphere).

Known examples of tight immersions of $(k-1)$-connected compact manifolds M^{2k} are the following if we exclude the case of surfaces ($k = 1$):

(i) The standard embeddings of the projective planes $P_2(\mathbf{F})$ into E^{3k+2} where $k = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}$. These examples lie in a sphere in E^{3k+2} and can therefore be projected stereographically into E^{3k+1} where they are also tight.

(ii) The connected sum $(S^k \times S^k)\# \cdots \#(S^k \times S^k)$ admits substantial and tight embeddings into $E^{2k+\ell}$ with $\ell = 1, 2$, see [Th 1]. The k-th Stiefel-Whitney class of $(S^k \times S^k)\# \cdots \#(S^k \times S^k)$ of course vanishes.

The examples of tight immersions of nontrivial connected sums $(S^k \times S^k)\#\cdots\#(S^k \times S^k)$ with codimension two in item (ii) above are by construction very nonanalytical. The following theorem is proved in [Ni]: If a highly connected M^{2k} with $w_k(M) = 0$ admits a substantial analytic tight immersion into E^{2k+2}, then $M^{2k} = S^k \times S^k$.

Kuiper proved the following result in [Ku 8].

4.1 Theorem. *Let M^{2k} be a $(k-1)$-connected compact manifold. If $f : M^{2k} \to E^{2k+\ell}$ is tight and substantial and $\ell \geq 3$, then M^{2k} has a k-cycle with self-intersection number one. In particular $k = 1, 2, 4$ or 8 and $\ell \leq k+2$.*

Some of the steps in the proof of this theorem are as follows. Choose a point p in M such that $f(p)$ has maximum distance from the origin. One can now prove that the boundary of the image of the second fundamental form in p, i.e., the set

$$\mathcal{C}_p = \partial\{\alpha(X, X) \mid X \in T_pM\},$$

is a convex cone in the ℓ-dimensional normal space at p. Let $\mathcal{H}$ be the span of T_pM and a supporting plane of $\mathcal{C}_p$. One can then prove that $f(M) \cap \mathcal{H}$ spans a $(k+1)$-dimensional affine subspace of E^N and the boundary Q of the convex hull of $f(M) \cap \mathcal{H}$ is contained in $f(M)$. Then the preimage of Q is a nontrivial k-cycle C_1 in M with self-intersection number one, if $\ell \geq 3$. Here one uses that the family of supporting hyperplanes of $\mathcal{C}_p$ is at least one-dimensional, if $\ell \geq 3$. Hence by moving $\mathcal{H}$, one can move the k-cycle C_1 into a homologous k-cycle C_2 that meets C_1 only in p and there they meet transversally. For this see also [Th 1]. The upper bound on the codimension now follows from the results mentioned in section two.

In [Th 1] it is proved that a $(k-1)$-connected compact manifold M^{2k} with $w_k(M) = 0$, $k > 2$, which admits a tight immersion into a Euclidean space, has the same cohomology ring as $(S^k \times S^k)\#\cdots\#(S^k \times S^k)$ over the integers. If $k = 2l > 2$, then it follows that M^{4l} is diffeomorphic to the connected sum $(S^{2l} \times S^{2l})\#\cdots\#(S^{2l} \times S^{2l})\#\Sigma$ where Σ is a sphere with some differentiable structure. In these results we have excluded four-manifolds. A further result of [Th 1] is the following theorem.

4.2 Theorem. *Let $f : M^4 \to E^{4+\ell}$ be a substantial tight immersion of a simply connected manifold. Then after a suitable choice of orientation*

(i) $\ell = 2$ implies that M^4 can be decomposed diffeomorphically as $M^4 = (S^2 \times S^2)\#N^4$ and the Betti number *$\beta_4(M^4, \mathbf{Z})$ is even. In particular, if the Stiefel-Whitney class $w_2(M) \neq 0$, then $\beta_4(M^4, \mathbf{Z}) \geq 4$.*

(ii) $\ell \geq 3$ implies that M^4 can be decomposed diffeomorphically as $M^4 = P_2(\mathbf{C})\#N^4$.

It follows for example that the Kummer surface does not allow any tight immersions since its second Stiefel-Whitney class vanishes and it does not split off $S^2 \times S^2$ diffeomorphically.

Now let us assume that $w_k(M) \neq 0$. Then we have the following possibilities for the codimension of a tight immersion of M (see [Th 1]):

(a) If $k = 1$, then we are dealing with nonorientable surfaces. The possible codimensions are 1, 2, 3 (i.e., k, $k+1$ or $k+2$), see section three.

(b) If $k = 2$, then the codimension must be one of the numbers 2, 3 or 4 (i.e., k, $k+1$ or $k+2$). There are examples for 3 and 4, but none known for 2.
(c) If $k = 4$, then the codimension is 5 or 6 (i.e., $k+1$ or $k+2$) and there are examples for both possibilities.
(d) If $k = 8$, then the codimension is 9 or 10 (i.e., $k+1$ or $k+2$) and there are examples for both possibilities.

The question arises whether there is a rigidity result for the maximal codimension that generalizes Theorem 3.3. Kuiper studies this question in [Ku 9]. He restricts his attention to manifolds M^{2k} that are 'like a projective plane' meaning that they admit a Morse function with precisely three critical points. He assumes that M^{2k} admits a substantial tight immersion into E^{3k+2}. He then proves that this immersion is algebraic and that the sets of maxima of height functions of the immersion (top sets) are the lines and points of a projective incidence structure on M^{2k}. (This motivated me to associate a Tits geometry to isoparametric submanifolds in [Th 3].) Finally he proves that M^{2k} is projectively equivalent to a standard embedding of a projective plane if $k = 1$ or 2. (Notice that if $k = 1$, then Theorem 3.3 is stronger since Kuiper did not assume there that M^2 is 'like a projective plane'.)

In [NT] this was generalized as follows:

4.3 Theorem. *Let M^{2k} be a $(k-1)$-connected, compact manifold and $f : M^{2k} \to E^{3k+2}$ a substantial tight immersion. Then M^{2k} is a projective plane over* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ *or* $\mathbf{O}$ *and f is up to a projective transformation the standard embedding of that projective plane.*

In the proof we show that the theorem follows from a result of local projective differential geometry in a similar way as in the papers [Ku 6] of Kuiper and [LP] of Little and Pohl. To solve the local problem we use methods that are very similar to those of Griffiths and Harris in [GH]. They prove a local version of a theorem of Severi saying that a piece of a substantial complex two-dimensional surface in $P_5(\mathbf{C})$ with degenerate secant variety and nondegenerate tangential variety is projectively equivalent to a piece of the Veronese. One can in fact show directly that the secant variety of an immersion as in Theorem 4.3 is degenerate. We do not use this in the proof. Instead we look at a refinement $\widehat{III}$ of the third fundamental form of f that was introduced in [GH]. We show that $\widehat{III}$ vanishes identically under the conditions in Theorem 4.3. This is stronger than the condition of Little and Pohl [LP], see section three, that every hyperplane that supports to the second order, supports to the third order. The local result is now that a piece of a $2k$-dimensional submanifold of $P_{3k+2}(\mathbf{R})$ such that $\widehat{III}$ vanishes identically and whose second fundamental form can everywhere be brought into Kuiper's normal form (see the end of section two) is projectively equivalent to a piece of the standard embedding of the projective plane with real dimension $2k$. When this is proved, Theorem 4.3 follows easily.

5 Open Problems

1. Estimate the number $g(\beta_*)$ in section two under various conditions on β, thus giving estimates on the codimension of a tight immersion of a manifold under conditions on its Betti numbers.
2. Does the Klein bottle admit a smooth tight immersion?
3. Which nonorientable surfaces admit analytic immersions into E^3 or E^4 ?
4. Is there a tight immersion of a compact simply connected four manifold M with $w_2(M) \neq 0$ into E^6 ?
5. Which $(k-1)$-connected compact manifolds M^{2k} admit analytic tight immersions?
6. Generalize Theorem 4.3 by showing that if there is a tight and substantial immersion of a *simply connected* compact M^{2k} into E^{2k+k^2}, then M^{2k} is $P_k(\mathbf{C})$ and the immersion is up to a projective transformation a standard embedding. A similar characterization of the standard embeddings of the quaternionic projective spaces $P_k(\mathbf{H})$ should also hold, but there is not yet a proof that they have the highest possible codimension in this case, i.e., problem 1 is unsolved for β_* being the Betti numbers of $P_k(\mathbf{H})$, or more generally $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

References

[Ba] T.F. Banchoff, *Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds.* Amer. J. Math. **87** (1965), 462–472.

[Bo] R. Bott, *An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups.* Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251–281.

[BS] R. Bott & H. Samelson, *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces.* Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029. *Correction* in Amer. J. Math. **83** (1961), 207–208.

[CR] T.E. Cecil & P.J. Ryan, *Tight and taut immersions of manifolds.* Research Notes in Mathematics, 107. Pitman, Boston, London, 1985.

[Ch] S.S. Chern, *La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions.* Enseignement Math. **40** (1955), 26–46.

[CL 1] S.S. Chern & R. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds.* Amer. J. Math. **79** (1957), 306–318.

[CL 2] S.S. Chern & R. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds. II.* Michigan Math. J. **5** 1958, 5–12.

[Fa] I. Fáry, *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud.* Bulletin de la Soc. Math. de France **77** (1949), 128–138.

[Fen] W. Fenchel, *Über die Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven.* Math. Ann. **10** (1929), 238–252.

[Fer] D. Ferus, *Über die absolute Totalkrümmung höher-dimensionaler Knoten.* Math. Ann. **171** (1967), 81–86.

[GH] P. Griffiths & J. Harris, *Algebraic geometry and local differential geometry.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **12** (1979), 355–452.

[Ha] F. Haab, *Immersions tendues de surfaces dans* $\mathbf{E}^3$. Comment. Math. Helv. **67** (1992), 182–202.

[Hu] A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen,* Math. Ann. **88** (1923), 1–25. Also in: Mathematische Werke II, pp. 641–666, Verlag von Emil Birkhäuser & Cie., Basel, 1933.

[Kü] W. Kühnel, *Tight polyhedral submanifolds and tight triangulations.* Lecture Notes in Mathematics **1612**. Springer-Verlag, Berlin etc. 1995.

[Ku 1] N.H. Kuiper, *Immersions with minimal total absolute curvature.* Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958) pp. 75–88 Centre Belge Rech. Math., Louvain.

[Ku 2] N.H. Kuiper, *Sur les immersions à courbure totale minimale.* Séminaire de topologie et de géométrie différentielle, 1959.

[Ku 3] N.H. Kuiper, *La courbure d'indice k et les applications convexes.* Séminaire de topologie et de géométrie différentielle, Charles Ehresmann, 1960.

[Ku 4] N.H. Kuiper, *Convex immersions of closed surfaces in E^3. Nonorientable closed surfaces in E^3 with minimal total absolute Gauss-curvature.* Comment. Math. Helv. **35** (1961), 85–92.

[Ku 5] N.H. Kuiper, *On surfaces in euclidean three-space.* Bull. Soc. Math. Belg. **12** (1960), 5–22.

[Ku 6] N.H. Kuiper, *On convex maps.* Nieuw Arch. Wisk. (3) **10** (1962), 147–164.

[Ku 7] N. H. Kuiper, *Der Satz von Gauß-Bonnet für Abbildungen in E^N und damit verwandte Probleme* Jahresbericht der DMV **69** (1967), 77 – 88 (153 – 164).

[Ku 8] N.H. Kuiper, *Minimal total absolute curvature for immersions.* Invent. Math. **10** (1970), 209–238.

[Ku 9] N. H. Kuiper, *Tight embeddings and maps. Submanifolds of geometrical class three in E^N.* The Chern Symposium 1979, pp. 97–145, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[Ku 10] N.H. Kuiper, *Polynomial equations for tight surfaces.* Geom. Dedicata **15** (1983), 107–113.

[KM 1] N.H. Kuiper & W.H. Meeks, *Total curvature for knotted surfaces.* Invent. Math. **77** (1984), 25–69.

[KM 2] N.H. Kuiper & W.H. Meeks, *The total curvature of a knotted torus.* J. Differential Geom. **26** (1987), 371–384.

[KP] N.H. Kuiper & W.F. Pohl, *Tight topological embeddings of the real projective plane in E^5.* Invent. Math. **42** (1977), 177–199.

[LR] R. Langevin & H. Rosenberg, *On curvature integrals and knots.* Topology **15** (1976), 405–416.

[LP] J.A. Little & W.F. Pohl, *On tight immersions of maximal codimension.* Invent. Math. **13** (1971), 179–204.

[Me] W.H. Meeks, *Lectures on Plateau's Problem.* Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[Mi 1] J. Milnor, *On the total curvature of knots.* Ann. of Math. **52** (1950), 248–257. Also in: Collected Papers, Vol. 1, Geometry, pp. 3–14. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas 1994.

[Mi 2] J. Milnor, *On a relationship between the Betti numbers of a hypersurface and an integral of its Gaussian curvature.* In: Collected Papers, Vol. 1, Geometry, pp. 15–26. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas 1994.

[Mi 3] J. Milnor, *Some consequences of a theorem of Bott.* Ann. Math. **68** (1958), 444-449

[Mo] H.R. Morton, *A criterion for an embedded surface in $\mathbf{R}^3$ to be unknotted.* In: Topology of low-dimensional manifolds, pp. 93–98, Lecture Notes in Math., **722**, Springer, Berlin, 1979.

[Ni] R. Niebergall, *Tight analytic immersions of highly connected manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 907–916.

[NT] R. Niebergall & G. Thorbergsson, *Tight immersions and local differential geometry.* Preprint.

[Pi] U. Pinkall, *Tight surfaces and regular homotopy.* Topology **25** (1986), 475–481.

[Sa] T. Sasaki, *On the Veronese embedding and related system of differential equations.* In: Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1990), 210–247, Lecture Notes in Math., **1481**, Springer, Berlin, 1991.

[TK] M. Takeuchi & S Kobayashi, *Minimal imbeddings of R-spaces.* J. Differential Geometry **2** (1968) 203–215.

[Th 1] G. Thorbergsson, *Tight immersions of highly connected manifolds.* Comment. Math. Helv. **61** (1986), 102–121.

[Th 2] G. Thorbergsson, *Tight analytic surfaces.* Topology **30** (1991), 423–428.

[Th 3] G. Thorbergsson, *Isoparametric foliations and their buildings.* Ann. of Math. **133** (1991), 429–446.

[Wi] J.P. Wilson, *The total absolute curvature of an immersed manifold.* J. London Math. Soc. **40** (1965), 362–366.

Gudlaugur Thorbergsson
Mathematisches Institut der Universität zu Köln
Weyertal 86 – 90
D-50931 Köln, Germany
e-mail: gthorbergsson@mi.uni-koeln.de

(*Eingegangen: 22. 12. 1997*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
100 (1998) 36–44
Mathematics Subject Classification: Primary 11 R 42, 11 R 27; Secondary 11 R 33, 19 A 31, 19 B 28

On Chinburg's Root Number Conjecture

K.W. Gruenberg, London, J. Ritter, Augsburg, and A. Weiss, Edmonton*

Let K/k be a finite Galois extension of number fields with Galois group G and S a finite G-stable set of primes of K containing all archimedean primes, all primes which ramify over k and enough primes to generate the ideal class group of K. Let E denote the group of S-units of K and ΔS the kernel of the augmentation map $\mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}$ sending each $\mathbb{Z}$-free generator $\mathfrak{p} \in S$ of the G-permutation module $\mathbb{Z}S$ to 1.

To obtain information about the cohomology of E as G-module, Tate [Ta1,2] constructed exact sequences (now called *Tate sequences*) of finitely generated G-modules of the form

$$1 \to E \to A \to B \to \Delta S \to 0$$

where A is cohomologically trivial and B is (without loss of generality) projective. These sequences all have the same canonical extension class $\tau \in \mathrm{Ext}^2_G(\Delta S, E)$. They were used by Chinburg [Ch1] to introduce a Galois invariant

$$\Omega(K/k) = [A] - [B]$$

of E in the locally free class group $Cl(\mathbb{Z}G)$. He showed that $\Omega(K/k)$ is an invariant of K/k, independent even of the choice of S, and made the

Conjecture: $\Omega(K/k)$ *is the root number class.*

This is Chinburg's root number conjecture. We recall the definition of the root number class in § 2. The importance of the conjecture for the G-module structure of E may be seen from the main result in [GW] where $\Omega(K/k)$ is part of the data used to determine E to within stable isomorphism. In [Ch2] it is shown to be true for infinitely many cases in which $k = \mathbb{Q}$ and G is the quaternion group of order 8. See also [Bu] in this respect.

Our purpose here is to lift Chinburg's class $\Omega(K/k)$ to $K_0T(\mathbb{Z}G)$, the Grothendieck group of all finite $\mathbb{Z}G$-modules having finite projective dimension, and to formulate a refinement of Chinburg's root number conjecture which can be studied locally because of the decomposition $K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \oplus K_0T(\mathbb{Z}_lG)$ (direct sum over all rational primes l). This approach is parallel to that of the tame additive theory [Fr1] and seems to involve congruences that refine the Main Conjecture of Iwasawa theory ([MW, Wi1,2]).

---

* We acknowledge financial support provided by the DFG, by NSERC, and by RIP Oberwolfach.

A lifted Chinburg class $\Omega_\varphi \in K_0T(\mathbb{Z}G)$ is associated to each $\mathbb{Z}G$-monomorphism $\varphi : \Delta S \to E$ by the construction of § 1. It depends only on the Tate class τ and on φ and maps to $\Omega(K/k)$ under the natural map $K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0(\mathbb{Z}G)$. Such φ exist because $\mathbb{Q} \otimes \Delta S \simeq \mathbb{Q} \otimes E$, as a consequence of Dirichlet's unit theorem according to which

$$\lambda : \mathbb{R} \otimes E \to \mathbb{R} \otimes \Delta S \ , \ 1 \otimes u \mapsto \ -\sum_{\mathfrak{p} \in S} \log |u|_{\mathfrak{p}} \otimes \mathfrak{p}$$

is an $\mathbb{R}G$-isomorphism. Note the unusual minus sign which is needed for our purposes.

We study Ω_φ by using Fröhlich's Hom description [Fr2, Theorem 2] as adapted to K_0T in § 2. Fix a subfield F of $\mathbb{C}$ so that every representation of G is realized over F and so that $F/\mathbb{Q}$ is finite Galois with Galois group Γ. The inclusion $F \subset \mathbb{C}$ specifies a distinguished infinite prime ∞ on F. There is a natural isomorphism

$$K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), J_F) \,/\, \mathrm{Det}\, U(\mathbb{Z}G)$$

where $R(G)$ denotes the ring of F-characters χ of G, J_F the idèle group of F, and the $+$ sign picks out those Γ-homomorphisms g for which $g(\chi)$ is positive at ∞ whenever χ is a symplectic character of G. (For the denominator Det $U(\mathbb{Z}G)$ compare [Fr2, p.14]). A representing homomorphism for Ω_φ is an element in $\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), J_F)$ inducing Ω_φ under the above isomorphism. This enables us to compare Ω_φ with F-idèle valued functions coming from L-values.

The most important such is the function A_φ occuring in Tate's formulation [Ta2, p.27] of Stark's conjecture. It is defined by

$$A_\varphi(\chi) = R_\varphi(\chi)/c_S(\chi)$$

for characters χ of G. Here the Tate regulator $R_\varphi(\chi)$ is the determinant of the composition $\lambda\varphi$ on $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\check{V}_\chi, \mathbb{C} \otimes \Delta S)$, where $\check{V}_\chi$ denotes the contragredient of a $\mathbb{C}G$-module V_χ with character χ; and $c_S(\chi)$ is the leading coefficient in the Taylor expansion at $s = 0$ of the Artin L-function $L(s, \chi)$ with Euler factors deleted for the primes of k under S.

Conjecture: *A_φ is in* $\mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), F^\times)$.

We need to restrict to cases where this conjecture of Stark holds. It is true, for example, when K/k is contained in a cyclotomic extension of $\mathbb{Q}$ (see [Ta2, p.95]).

Viewing then the values of A_φ in J_F, in the usual way, does not necessarily get us into $\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), J_F)$ because of the + condition. But the signs at infinite primes of $A_\varphi(\chi)$ at symplectic characters χ agree with those of the Artin root numbers $W(\chi)$ ([Ch2, p.18, We, § 11]). We define the unique Γ-homomorphism $W_{K/k} \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), J_F)$ by $W_{K/k}(\chi)_\mathfrak{p} = 1$ for all finite primes $\mathfrak{p}$ and at the distinguished prime ∞ by $W_{K/k}(\chi)_\infty = \begin{cases} W(\chi) & \text{, if } \chi \text{ is symplectic} \\ 1 & \text{, otherwise} \end{cases}$.

We can now formulate our

Conjecture: *Ω_φ is represented by* $[\chi \mapsto A_\varphi(\check{\chi})\, W_{K/k}(\check{\chi})]$ *in* $\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), J_F)$.

We call it the lifted root number conjecture. It clearly implies Chinburg's root number conjecture (see § 2), but is in fact considerably stronger. Nevertheless, all of the general evidence in favour of the latter can be adapted to support the new conjecture. In addition, the new conjecture has certain technical advantages which allow it to be tested more methodically.

There are several kinds of evidence to be considered here. First, the naturality with respect to the data $K/k, S, \varphi$, which we examine in § 3, is more subtle than its Ω counterpart and the new modified Dirichlet map λ is needed there. The second kind of evidence is the compatibility of Ω_φ and A_φ with Tate's q-index $\mathfrak{q}_\varphi$ (as generalized in [Ch1, also We, § 10]), which is an F-ideal valued function on $R(G)$. The definition of $\mathfrak{q}_\varphi$ is recalled in § 3. Chinburg ([Ch1]) showed that (in our notation) $\mathfrak{q}_\varphi$ represents $\Omega(K/k)$ modulo the kernel group $D(\mathbb{Z}G)$, i.e. when passing from $K_0(\mathbb{Z}G)$ to $K_0(\mathfrak{M})$ where $\mathfrak{M} \supset \mathbb{Z}G$ is a maximal order in the rational group algebra $\mathbb{Q}G$. We state a lifted version in § 3 that clarifies the rôle of φ.

The above mentioned compatibility of Ω_φ and A_φ is relevant because of Chinburg's q-index conjecture ([Ch1]): for every character χ, $\mathfrak{q}_\varphi(\chi)$ is the fractional ideal generated by $A_\varphi(\check{\chi})$. This has now been proved ([RW1]) for all characters χ of G when

(∗) *K/k is contained in a cyclotomic extension of $\mathbb{Q}$ in which 2 does not ramify.*

It is in the proof of (∗) that the Main Conjecture of Iwasawa theory makes its appearance. Iwasawa theory is, of course, relative to a finite prime l, which leads to our third kind of evidence: namely everything can be, and has been, set up to decompose trivially over the finite primes l. This is elaborated on in § 4, the emphasis being on the possibility of using induction theorems for $K_0T(\mathbb{Z}_lG)$ to limit the groups G which matter at l.

The final kind of evidence is given by examples. There are rather few at present, as described in § 5, but this should change as congruences for l-adic L-values become better understood. Indeed, if the analogy to the tame additive theory is sound, one should expect an arithmetic theory of the local $A_\varphi^{(l)}(\chi)$ which is analogous to that for Galois Gauss sums ([Fr1]).

Detailed proofs, being rather lengthy ([GRW, RW2]), are omitted, and will appear elsewhere.

§ 1 Definition of Ω_φ

We start with a Tate sequence and break it into two short exact sequences

$$1 \to E \to A \to L \to 0\ ,\ 0 \to L \to B \to \Delta S \to 0$$

in which L is a $\mathbb{Z}G$-lattice. Choose two $\mathbb{Z}G$-monomorphisms $\alpha, \beta : L \to L$ which are homotopic to zero (meaning each can be factored through a projective module). For example, we could take $\alpha = \beta = |G| \cdot 1_L$. Then we know $\mathrm{Ext}^1_G(\alpha, E) = 0 = \mathrm{Ext}^1_G(\Delta S, \beta)$ and get from the pull-back along α and push-out along β of our two sequences the commutative diagrams

$$\begin{array}{ccccc} E & \rightarrowtail & L \oplus E & \twoheadrightarrow & L \\ \| & & \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \alpha \\ E & \rightarrowtail & A & \twoheadrightarrow & L \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccccc} L & \rightarrowtail & B & \twoheadrightarrow & \Delta S \\ \downarrow \beta & & \downarrow \tilde{\beta} & & \| \\ L & \rightarrowtail & L \oplus \Delta S & \twoheadrightarrow & \Delta S \end{array} .$$

To an injective $\mathbb{Z}G$-map $\varphi : \Delta S \to E$ we now associate the composite map

$$\tilde{\varphi} : B \xrightarrow{\tilde{\beta}} L \oplus \Delta S \xrightarrow{1_L \oplus \varphi} L \oplus E \xrightarrow{\tilde{\alpha}} A$$

which allows us to make the

Definition. $\Omega_\varphi = [\operatorname{coker} \tilde{\varphi}] - \delta[L, \alpha\beta] \in K_0T(\mathbb{Z}G)$.

Here δ is given by the localization sequence in K-theory ([CR, 40.9])

$$K_1(\mathbb{Z}G) \to K_1(\mathbb{Q}G) \xrightarrow{\delta} K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0(\mathbb{Z}G) \to K_0(\mathbb{Q}G)$$

and $[L, \alpha\beta]$ is an abbreviation for the element of $K_1(\mathbb{Q}G)$ represented by the automorphism $1 \otimes \alpha\beta$ of the $\mathbb{Q}G$-module $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$.

It is obvious from its definition that Ω_φ lifts the Chinburg class, i.e. Ω_φ maps to $\Omega(K/k)$ under $K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0(\mathbb{Z}G)$. But Ω_φ is more canonical than that:

Theorem 1. *Ω_φ depends only on φ, i.e. it is independent of the choices of $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ above and of a particular choice of a Tate sequence associated to the Tate class $\tau \in \operatorname{Ext}^2_G(\Delta S, E)$.*

The proof is a detailed comparison of the above construction with the relations in $K_1(\mathbb{Q}G)$ needed to discover the correction term $\delta[L, \alpha\beta]$. Stark's conjecture plays no rôle.

§ 2 Hom description of $K_0T(\mathbb{Z}G)$ and root number class

Following [CR, p.222] we combine the above localization sequence with the analogous ones at all the finite primes l of $\mathbb{Q}$ to form the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} K_1(\mathbb{Q}G)/\operatorname{im} K_1(\mathbb{Z}G) & \overset{\delta}{\rightarrowtail} & K_0T(\mathbb{Z}G) & \twoheadrightarrow & Cl(\mathbb{Z}G) \\ \downarrow & & \downarrow\simeq & & \\ \bigoplus\limits_{l\neq\infty} K_1(\mathbb{Q}_lG)/\operatorname{im} K(\mathbb{Z}_lG) & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus\limits_{l\neq\infty} K_0T(\mathbb{Z}_lG) & & \end{array} .$$

Then we use the isomorphisms

$$\operatorname{Det} : K_1(\mathbb{Q}_lG) \to \operatorname{Hom}_{\Gamma_{\mathfrak{l}}}(R(G), F_{\mathfrak{l}}^\times)$$

given by sending

$$[X, f] \in K_1(\mathbb{Q}_lG) \quad \text{to} \quad \left[\chi \mapsto \det\left(f \mid \operatorname{Hom}_{F_{\mathfrak{l}}G}(V_\chi, F_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Q}_l} X)\right)\right],$$

where V_χ now is an $F_{\mathfrak{l}}G$-module with character χ. Here $\mathfrak{l}$ is a prime of F above l, $\Gamma_{\mathfrak{l}}$ is its decomposition group with respect to $F/\mathbb{Q}$ and $F_{\mathfrak{l}}$ is the completion of F at $\mathfrak{l}$. Combining with the isomorphism $\operatorname{Hom}_\Gamma(R(G), (\mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Q}} F)^\times) \to \operatorname{Hom}_{\Gamma_{\mathfrak{l}}}(R(G), F_{\mathfrak{l}}^\times)$ obtained by projecting to $F_{\mathfrak{l}}^\times$, we get the Hom description of $K_0T(\mathbb{Z}G)$ in the introduction.

Moreover, the composition of the surjections $\operatorname{Hom}^+_\Gamma(R(G), J_F) \twoheadrightarrow K_0T(\mathbb{Z}G) \twoheadrightarrow Cl(\mathbb{Z}G)$ is actually the restriction of a homomorphism defined on $\operatorname{Hom}_\Gamma(R(G), J_F)$ (see [CR, p.338]). The element $W_{K/k}$ that appears in our conjecture lies in this group and its image in $Cl(\mathbb{Z}G)$ is called the root number class.

There is a similar Hom description for $K_0T(\mathfrak{M})$, where $\mathfrak{M}$ is any maximal order in $\mathbb{Q}G$ containing $\mathbb{Z}G$. But since $\operatorname{Det} U(\mathfrak{M}) = \operatorname{Hom}_\Gamma^+(R(G), U_F)$, with U_F the unit idèles of F, taking the *ideal content* of an idèle easily changes this into a description in terms of the group I_F of fractional ideals of F. We obtain the commutative square

$$\begin{array}{ccc} K_0T(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & K_0T(\mathfrak{M}) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \frac{\operatorname{Hom}_\Gamma^+(R(G),J_F)}{\operatorname{Det} U(\mathbb{Z}G)} & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Gamma^*(R(G), I_F) \end{array} ,$$

where the $*$ indicates we consider only homomorphisms which for each irreducible character χ of G have value a fractional ideal of F that is extended from the field $\mathbb{Q}(\chi)$ of character values of χ.

§ 3 Parallel properties of A_φ and Ω_φ

When the data $K/k, S, \varphi$ are changed, then the invariants $A_\varphi, \Omega_\varphi$ vary in the same way via the Hom description. To describe this in a simple way we assume Stark's conjecture for K/k and we make the

Definition. *$\omega = \omega(K/k) \in K_0T(\mathbb{Z}G)$ is the element so that $[\chi \mapsto A_\varphi(\check{\chi})\, W_{K/k}(\check{\chi})]$ is a representing homomorphism of $\Omega_\varphi + \omega$.*

Thus our lifted root number conjecture reads: $\omega = 0$. This is the significance of the following results.

Theorem 2. *$\omega = \omega(K/k)$ depends only on K/k, i.e. is independent of the choice of the set S and of the G-monomorphism $\varphi : \Delta S \to E$.*

Theorem 3. a) *If K'/k is a normal subextension of K/k with $G' = \mathrm{Gal}(K'/k)$, then the deflation map $K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0T(\mathbb{Z}G')$ takes $\omega(K/k)$ to $\omega(K'/k)$.*

b) *If K/k' is any subextension of K/k with $G' = \mathrm{Gal}(K/k')$, then the restriction map $K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0T(\mathbb{Z}G')$ takes $\omega(K/k)$ to $\omega(K/k')$.*

The proofs consist of a comparison of the exact sequences defining the varying Ω_φ with the object of finding the determinants and Euler factors which change in the varying A_φ.

This kind of naturality was already known to hold for A_φ and Tate's q-index $\mathfrak{q}_\varphi$ ([Ch1, We § 11, RW1, § 7]) which is defined as follows. Let $\mathfrak{o}$ be the ring of integers of F and to φ associate the induced map

$$\varphi_M : \operatorname{Hom}_\mathfrak{o}(M, \mathfrak{o} \otimes_\mathbb{Z} \Delta S)_G \xrightarrow{\hat{G}} \operatorname{Hom}_\mathfrak{o}(M, \mathfrak{o} \otimes_\mathbb{Z} \Delta S)^G \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Hom}_\mathfrak{o}(M, \mathfrak{o} \otimes_\mathbb{Z} E)^G$$

for any $\mathfrak{o}G$-lattice M, with $\hat{G}$ denoting the G-norm between G-covariants and G-invariants. Kernel and cokernel of φ_M are finite $\mathfrak{o}$-modules. If χ is a character of G and M an $\mathfrak{o}G$-lattice with character χ we define

$$\mathfrak{q}_\varphi(\chi) = \text{length}\Big([\operatorname{coker}\varphi_M] \; - \; [\ker\varphi_M]\Big)$$

where the length : $K_0T(\mathfrak{o}) \to I_F$ takes $[\mathfrak{o}/\mathfrak{l}]$ to $\mathfrak{l}$ for prime ideals $\mathfrak{l}$. The fact that $\mathfrak{q}_\varphi$ is well-defined (i.e. independent of the choice of M [Ta2, Ch1]) and indeed $\mathfrak{q}_\varphi \in \mathrm{Hom}^*_\Gamma(R(G), I_F)$, as well as its interpretation ([Ch1]) as representing homomorphism of $\Omega(K/k)$ modulo $D(\mathbb{Z}G)$ are now simultaneously generalized by

Theorem 4. *Let $\mathfrak{M}$ be a maximal order containing $\mathbb{Z}G$. Then $\mathfrak{q}_\varphi$ is a representing homomorphism (cf § 2) for the image of Ω_φ under $K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0T(\mathfrak{M})$.*

This has, in the present context, a rather natural proof.
Setting

$$DT(\mathbb{Z}G) = \ker\Big(K_0T(\mathbb{Z}G) \to K_0T(\mathfrak{M})\Big)$$

and combining Theorem 4 and [RW1] we get

Corollary. *If condition $(*)$ at the end of the introduction holds, then $\omega(K/k)$ is in $DT(\mathbb{Z}G)$.*

§ 4 Localization

Because of $K_0T(\mathbb{Z}G) = \bigoplus_{l \neq \infty} K_0T(\mathbb{Z}_lG)$ our classes Ω_φ are determined by their components $\Omega_\varphi^{(l)} \in K_0T(\mathbb{Z}_lG)$, and similarly ω by $\omega^{(l)}$. On the other side, in the Hom description, the same holds for $[\chi \mapsto A_\varphi(\check{\chi})\,W_{K/k}(\check{\chi})]$: namely as $W_{K/k}(\check{\chi})$ has idèlic components equal to one at finite primes, this is determined by $[\chi \mapsto A_\varphi^{(l)}(\check{\chi})]$ in $\mathrm{Hom}_{\Gamma_\mathfrak{l}}(R(G), F_\mathfrak{l}^\times)$. The point of this is that the lifted root number conjecture can thus be expressed as the *local* conjectures $\omega^{(l)}(K/k) = 0$, for finite primes l.

These local conjectures can then be considered for special extensions K/k, depending on l, because of

Theorem 5. *Suppose that we have classes $\omega^{(l)}(K/k)$ in $DT(\mathbb{Z}_lG)$ for K/k and all its Galois subextensions, which are compatible with deflation and restriction as in a), b) of Theorem 3. Suppose also that these classes $\omega^{(l)}$ are zero whenever the subextension is l-elementary, i.e. its Galois group is a direct product of an l-group and a cyclic group of order prime to l. Then $\omega^{(l)}(K/k) = 0$.*

The proof needs Taylor's fixed point theorem for local determinants (cf [Fr1, Theorem 10]). To apply the assumption in Theorem 5 concerning the DT groups, one must, of course, first generalize the Corollary of § 3.

§ 5 Examples

When K/k is cyclic of prime degree l, then $DT(\mathbb{Z}_lG)$ has order $l-1$ and our conjecture says $\omega^{(l)} = 0$. This would give information additional to that provided by Chinburg's root number conjecture which holds in this case already because $D(\mathbb{Z}G) = 0$, a reason that appears accidental. In the case that K/k is contained in a cyclotomic extension of $\mathbb{Q}$ we can construct a special map $\varphi : \Delta S \to E$ which coincides with the Ramachandra map of ([RW1, § 10]) on the infinite part of S and involves the Tate class τ at the finite part. This is used to verify $\omega^{(l)} = 0$ when

(**) $k = \mathbb{Q}$, $K/\mathbb{Q}$ is cyclic of prime degree $l \neq 2$, exactly two rational primes $p_1 \neq p_2$, both different from l, ramify in K and one of them is not an lth power modulo the other (see [RW2]).

In this example our conjecture is equivalent to apparently new congruences for values of l-adic L-functions at 1.

There is a simpler example in which the conjecture is true for more direct reasons. Assume that $l \neq p$ are two odd primes and that K is the subfield of degree l in the pth cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. From [Fr3, 2.10] we deduce that the l-part of the ideal class group cl_K of K is trivial (this is no longer true in the case (**) and considerably eases the arguments that follow).

We fix an unramified inert prime p_0 for K and let g_0 be its Frobenius automorphism. Set $S = S_\infty \cup S_f$ where $S_\infty = G \cdot \mathfrak{p}_\infty$ is the set of infinite primes and where $S_f = \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}\} \cup \bigcup_{i=1}^t G \cdot \mathfrak{p}_i$ with $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}$ denoting the primes of K above p_0, p and with primes $\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq t$, generating cl_K, which lie above completely split prime numbers p_i. Find natural numbers $n_i \not\equiv 0 \bmod l$ such that $\mathfrak{p}_i^{n_i} = (a_i)$ are principal ideals in K.

We define the map $\varphi : \Delta S \to E$ by $\mathfrak{p}_\infty - \mathfrak{p}_0 \mapsto \xi_K = N_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/K}(1 - \zeta_p)^2$, $\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0 \mapsto p_0^{l-1}, \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_0 \mapsto a_i$ $(1 \leq i \leq t)$. It produces the commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccc} \Delta S_\infty & \rightarrowtail & \Delta S & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}S_f \\ \downarrow \varphi_\infty & & \downarrow \varphi & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ E_\infty & \rightarrowtail & E & \twoheadrightarrow & E/E_\infty \end{array},$$

in which E_∞ is the group of global units in K and φ_∞ the Ramachandra map taking $\sigma\mathfrak{p}_\infty - \mathfrak{p}_\infty$ to $\xi_K^{\sigma-1}$ for $\sigma \in G$. The map $\Delta S \twoheadrightarrow \mathbb{Z}S_f$ is given by $\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_\infty \mapsto 0$ or $\mathfrak{p}'$ according as $\mathfrak{p}'$ is infinite or not.

By glueing the following diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \otimes E_\infty & \rightarrowtail & \mathbb{C} \otimes E & \twoheadrightarrow & \mathbb{C} \otimes E/E_\infty \\ \downarrow \lambda_\infty & & \downarrow \lambda & & \downarrow \tilde{\lambda} \\ \mathbb{C} \otimes \Delta S_\infty & \rightarrowtail & \mathbb{C} \otimes \Delta S & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}S_f \end{array}$$

under the previous one we can compute $A_\varphi(\check{\chi})$ by means of the factorization

$$A_\varphi(\check{\chi}) = \frac{\det(\lambda_\infty\varphi_\infty|\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_\chi, \mathbb{C} \otimes \Delta S))}{c_{S_\infty(\check{\chi})}} \cdot \det(\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}|\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_\chi, \mathbb{C}S_f)) \cdot \frac{c_{S_\infty}(\check{\chi})}{c_S(\check{\chi})}.$$

Proposition 12 of [RW1] gives the factor on the left[1] and Lemma 7 of [RW1] the one on the right. The remaining factor is easily calculated because of the explicit knowledge of the map $\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}$.

An immediate consequence is the injectivity of φ, since $A_\varphi(\check{\chi}) \neq 0$ for all χ. Denote by X the cokernel of φ.

Lemma. *X is cohomologically trivial and $\Omega_\varphi - [X] \in KT_0(\mathbb{Z}G)$ is represented by the Galois homomorphism $r \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), F^\times)$ which takes χ to l or $(\chi(g_0) - 1)^{-1}$ depending on $\chi = 1$ or $\chi \neq 1$.*

---

[1] Recall, however, that we have changed the λ in [RW1] into $-\lambda$.

The proof is rather technical and will be omitted. It follows that $\omega^{(l)} = 0$ if, and only if, $[\mathbb{Z}_l \otimes X] \in K_0T(\mathbb{Z}_l G)$ is represented by $A_\varphi^{\check{}} /r \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_\mathfrak{l}}(R(G), F_\mathfrak{l}^\times)$. Of course, we may take $F_\mathfrak{l} = \mathbb{Q}_l(\zeta_l)$, ζ_l a primitive lth root of unity.

Combining the values of A_φ and r we have

$$A_\varphi(\check{\chi})/r(\chi) = \begin{cases} -4(l-1)\prod_1^t(-n_i) & \text{, if } \chi = 1 \\ -4\chi(g_0) - 1\chi(g_0^{-1}) - 1\prod_1^t(-n_i) & \text{, if } \chi \neq 1 \text{ ,} \end{cases}$$

whence

$$A_\varphi(1)/r(1) \equiv A_\varphi(\check{\chi})/r(\chi) \bmod \zeta_l - 1 \ .$$

Therefore $A_\varphi^{\check{}} /r \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_\mathfrak{l}}(R(G), \mathbb{Z}_l[\zeta_l]^\times)$ represents the trivial element in $K_0T(\mathbb{Z}_l G)$. It follows that $\omega^{(l)} = 0$ if $[\mathbb{Z}_l \otimes X] = 0$.

Let us then turn to X. From $\Delta S \rightarrowtail E \twoheadrightarrow X$ we infer $\Delta S^G \rightarrowtail E^G \twoheadrightarrow X^G$ since ΔS is here a permutation module. Using the $\mathbb{Z}$-bases $\hat{G}(\mathfrak{p}_\infty - \mathfrak{p}_0), \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0, \hat{G}(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_0)$ of ΔS^G and p_0, p, p_i of E^G we obtain $X^G \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/(l-1) \times \prod_1^t \mathbb{Z}/n_i$. Hence X^G has order prime to l and therefore so has X.

References

[Bu] Burns, D., *On multiplicative Galois structure invariants.* American Journal of Mathematics **117** (1995), 875-903

[Ch1] Chinburg, T., *On the Galois stucture of algebraic integers and S-units.* Inventiones math. **74** (1983), 321-349

[Ch2] –, *The analytic theory of multiplicative Galois structure.* Memoirs of the AMS **77** (1989)

[CR] Curtis, C.W., Reiner, I., *Methods of Representation Theory, vol. 2*. John Wiley & Sons (1987)

[Fr1] Fröhlich, A., *Galois Module Structure of Algebraic Integers.* Springer-Verlag (1983)

[Fr2] –, *Classgroups and Hermitian Modules.* Birkhäuser Verlag, PM **48** (1984)

[Fr3] –, *Central Extensions, Galois Groups, and Ideal Class Groups of Number Fields.* Contemporary Mathematics, AMS **24** (1983)

[GRW] Gruenberg, K.W., Ritter, J. and Weiss, A., "§ 1 and Appendix" in Ritter, J. *On Chinburg's conjecture relating Ω_m and $A_\varphi(\check{\chi})$ (Report on joint work with K. W. Gruenberg and A. Weiss in 1994, 1995, and with A. Weiss in 1996).* Preprint, Augsburg (1996)

[GW] Gruenberg, K.W. and Weiss, A., *Galois invariants for S-units.* American Journal of Mathematics, in press

[MW] Mazur, B. and Wiles, A., *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$. Inventiones math. **76** (1984), 179-330

[RW1] Ritter, J. and Weiss, A., *Cohomology of units and L-values at zero.* Journal of the AMS, in press

[RW2] –, "§§ 2,3,4" in Ritter, J. *On Chinburg's conjecture relating Ω_m and $A_\varphi(\check{\chi})$ (Report on joint work with K. W. Gruenberg and A. Weiss in 1994, 1995, and with A. Weiss in 1996).* Preprint, Augsburg (1996)

[Ta1] Tate, J., *The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields.* Nagoya Math. J. **27** (1966), 709-719

[Ta2] –, *Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en s* = 0. Progress in Math. **47,** Birkhäuser (1984)

[We] Weiss, A., *Multiplicative Galois module structure.* Fields Institute Monographs **5**, AMS (1996)

[Wi1] Wiles, A., *The Iwasawa conjecture for totally real fields.* Annals of Math. **131** (1990), 493-540

[Wi2] –, *On a conjecture of Brumer.* Annals of Math. **131** (1990), 555-565

Karl W. Gruenberg
School of Mathematical Sciences
Queen Mary & Westfield College
London E1 4NS, England

Jürgen Ritter
Institut für Mathematik der Universität
D-86135 Augsburg, Germany

Alfred Weiss
Department of Mathematics
University of Alberta
Edmonton T6G 2G1, Canada

(*Eingegangen 21. 2. 1997, in revidierter Form 7. 4. 1997*)

Buchbesprechungen

Schmidt, R., Subgroup Lattices of Groups (de Gruyther Expositions in Math. 14), Berlin u. a.: de Gruyter 1994, 576 S., in Leinen, DM 248,–

The book concerns the various problems on the relation between the structure of a group and the structure of the lattice of its subgroups. The only book on the subject was the reviewer's old Ergebnisbericht of 1956 which was out of date. This new book by R. Schmidt fills the gap in the literature nicely. It is a delight to see the ensuing advances made by many including the author, the Padova school led by Zacher, and the russian school.

The subject grew out of the advances of the abstract ideas in Mathematics, particularly with the concept of the lattice of subsystems. However, the real beginning of this interesting chapter of group theory was when Ada Rottländer discovered in 1928 that two or more nonisomorphic groups of the same order can have the same lattice of subgroups. In 1938, Ore determined the structure of a group whose lattice of subgroups satisfies the distributive law. This was the first major contribution to the subject. The progress of the following 15 years or so was reported in the Ergebnisbericht. By then, there are many results, notably by Baer, Iwasawa, Sadovskii, Zappa, and the reviewer, which were reported with some (incomplete) proofs or none at all.

The purpose of this book under review is "to describe more recent developments" and the author hopes that "this book will serve as a basic reference in the subject area, as a text for postgraduate students, and also as a source of research ideas" (the quotations from the preface). In the opinion of the reviewer, the author has succeeded admirably in writing this excellent book to serve these aims well.

Let G be a group. Let $L(G)$ denote the lattice of subgroups of the group G. The main questions in this field are:

(A) Given a class X of groups, what can we say about the lattices $L(G)$ of $G \in X$?
(B) Given a class Y of lattices, what can we say about the groups G with $L(G) \in Y$?

To state more specific questions, we need some definitions. If G and H are two groups, an isomorphism from the lattice $L(G)$ to the lattice $L(H)$ is called the *projectivity* from the group G to the group H. An isomorphism of groups always induces a projectivity, but not conversely. A group G is said to *be determined* by its lattice of subgroups if G is isomorphic to any group H with $L(H) \cong L(G)$; it is *strongly determined* if every projectivity of G is induced by an isomorphism of groups. We may ask the following questions. Which groups G are determined by the lattice of subgroups $L(G)$? Which groups are strongly determined? The book concerns with these questions.

The contents of the book are as follows. In Chapter 1, after introducing the basic concepts of lattice theory and developing the elementary properties of subgroup lattices and projectivities, the author proves Ore's main theorem on groups with distributive subgroup lattices, Sadovskii's approximation theorem, and other related results. The second chapter is devoted to the study of the groups G with modular subgroup lattice, called M-groups for short. The structure of M-groups was determined by Iwasawa, Napolitani, and the author. This chapter contains a new (correct) proof of Iwasawa's theorem on finite M-groups and the structure on M-groups in terms of the Tarski groups which completes Iwasawa's work on infinite torsion groups. The chapter includes a theorem of Sato that an M-group with elements of infinite order has its subgroup lattice isomorphic to $L(A)$ of an abelian group A, as well as theorems of Baer on projectivities of M-groups. Chapter 3 is a study of groups with complemented subgroup lattices, called K-groups, and various generalizations of this class of groups. Among many results, there are some interesting open questions. For example, is every finite nonabelian simple group a K-group?

Main theme of Chapter 4 is the influence of the subgroup lattice $L(G)$ on the arithmetic structure of a finite group G, such as the order $|G|$of the group G or the structure and embedding of Sylow subgroups of the group G. The main theorem of the reviewer is proved, according to which a projectivity of a finite group carries Sylow p-subgroups to Sylow p-subgroups with well described exceptions. This chapter includes the author's theorem asserting that if φ is a projectivity of a finite group G, then $\varphi(F_k(G)) = F_k(\varphi(G))$ for $k \geq 2$ where $F_k(G)$ is the iterated Fitting subgroup of G. This yields the Suzuki-Zappa theorem that the projective image of a finite solvable group is solvable. A direct shorter proof of the Suzuki-Zappa theorem is indicated. The chapter closes with two theorems of Menegazzo on the image of the center of a Sylow subgroup by a projectivity.

The chapters 5 and 6 are the study of influence of the subgroup lattice on the normal structure of the group. This is the high point of the book. There are a few fragmentary results on this topic in the reviewer's old monograph, but for finite groups only. The systematic development of the theory is done after 1970 by the author and others, and in 1980's by Busetto, Menegazzo, Napolitani, and Zacher. A subgroup M of a group G is called *modular* if the following two identities are satisfied:

$$X \cup (M \cap Z) = (X \cup M) \cap Z \quad \text{for all } X \subset Z, \qquad \text{and}$$
$$M \cup (Y \cap Z) = (M \cup Y) \cap Z \quad \text{for all } M \subset Z.$$

If M is a normal subgroup of G, then M is modular. For the class of finite groups, a modular group is close being normal. Let M_G be the core of M (i.e. the intersection of all the conjugates of M) and M^G the normal closure of the subgroup M of G. If M is a modular subgroup of a finite group G, then M^G/M_G is nilpotent. This is applied to the image of a normal subgroup by projectivity. If N is a normal subgroup of a finite group G and if φ is a projectivity, $\varphi(N)$ is modular in $\varphi(G)$. Let H and K be the subgroups of G such that $\varphi(H)$ is the normal closure and $\varphi(K)$ the core of $\varphi(N)$. Then, both H and K are normal subgroups of G and H/K is of very limited structure. For infinite groups, the situation is more complicated. The author presents in Chapter 6 the proof of the theorem that the class of solvable groups is invariant under projectivity (first proved by Yakovlev) following the works of the Padova school with improved bound on the derived length. One of the most interesting open questions is to give a lattice theoretic characterization of the class of solvable groups. (Such a lattice theoretic characterization is given for the class of finitely generated solvable groups.) An interesting theorem of Zacher and Rips which asserts that for any projectivity φ and two subgroups $K \subset H$, K has finite index in H if and only if $\varphi(K)$ has finite index in $\varphi(H)$ is proved in this chapter.

In Chapter 7, it is proved that every nonabelian free group is strongly determined (a theorem of Sadovskii) using the method of Yakovlev. Another theorem of Sadovskii saying that every nonabelian torsion-free nilpotent group is strongly determined is proved following an unpublished manuscript of G. E. Wall. It is remarked that the classification of finite simple groups has the following consequence: every nonabelian finite simple group is determined by its subgroup lattice. However, some simple groups, for example, the alternating groups A_m for $m = 3^r$ or $m = 3^r + 1$ (r odd and $r \geq 3$) are not strongly determined by their subgroup lattices. Chapter 8 discusses the duality in subgroup lattices. A group G has a *dual* if there exists a duality from its subgroup lattice onto the subgroup lattice of a group H. The main theorem is a theorem of Zacher on the structure of a locally finite group with dual. This is a vast improvement of the old monograph where only the structure of finite solvable groups with dual is determined. The proof of Zacher's theorem uses the Feit-Thomson theorem. In the last chapter, other lattices related to a group are discussed. They are the lattice of normal subgroups, the lattice of composition subgroups, the centralizer lattice, and the coset lattice.

As indicated above, the book covers almost all aspects of the relation between the structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. The only topics missing are the homomorphic mappings of $L(G)$ and the problem of embeddings of lattices in subgroup lattices. However, the author indicates references on the topics, so the interested readers can study these papers.

The proofs in text are well organized and clear; many are new. The elementary results in lattice theory are discussed in text. The standard results in group theory are used with clear reference to the standard textbook of group theory. The more special results, such as a theorem of Cooper on power automorphisms, are proved in text. This is one of the nice features of this book. The full power of the classification of finite simple groups is used minimally. However, at one or two places the argument really depends on the Feit-Thompson theorem. There are numerous well chosen exercises; some suggest an alternate approach to the theorem in text, some present additional theorems, and some offer interesting examples. The reviewer finds them very useful. In short, he recommends this book to anyone who is interested in group theory.

Urbana M. Suzuki

Turaev, V. G., Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds (de Gruyter Studies in Mathematics 18), Berlin u. a.: de Gruyter 1994, 688 S., in Leinen, DM 228,–

Hiermit liegt vor: Eine Forschungsmonographie über Invarianten von Knoten und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten sowie über topologische Quantenfeldtheorien. Eine ausführliche, abstrakte, gründliche, axiomatische Begründung der Theorie. Das erste zusammenfassende Werk über das betreffende aktuelle Forschungsgebiet.

Quantengruppen sind von Jimbo und Drinfel'd als Deformationen (Quantisierungen) der universellen Einhüllenden klassischer halbeinfacher Lie-Algebren eingeführt worden, wobei sie als gewisse Hopf-Algebren mit Zusatzstruktur (Zopfung, universelle R-Matrix) in Erscheinung traten. Für die Anwendungen auf Knoten und 3-Mannigfaltigkeiten sind hauptsächlich geeignete formale Eigenschaften ihrer Darstellungskategorien wichtig. Deshalb gründet die vorliegende Monographie auf einer axiomatischen Ausarbeitung der relevanten kategorientheoretischen Begriffsbildungen, und der genannte Ursprung liefert den Terminus „Quanteninvarianten". Die Darstellungstheorie der Quantengruppen ist zwar für nichttriviale Beispiele der Theorie wichtig, wird aber im XI-ten Kapitel des Buches nur kurz gestreift.

Grundlage der Theorie sind die Tensorkategorien. In ihnen wird die lineare Algebra des Tensorprodukts axiomatisiert, und sie sollten folglich zur mathematischen Allgemeinbildung avancieren. Die fundamentale methodische Erkenntnis über diese Kategorien ist der knotentheoretisch-graphische Beweiskalkül, dem das erste Kapitel des Buches gewidmet ist. Klassische lineare sprachliche Fixierung durch Buchstabensequenzen ist für manche Zwecke äußerst schwerfällig – hier wird dagegen Topologie für ein neues flexibles zweidimensionales „Schriftsystem" benutzt!

Obgleich Mannigfaltigkeiten zentrale Objekte in vielen mathematischen Gebieten sind, begegnet man ihnen nie an sich, sondern nur in ihren Beschreibungen. Theorie der Mannigfaltigkeiten ist daher zum größten Teil Manipulation ihrer Beschreibungssysteme. Auch die neuen, hier behandelten und von Witten vorausgesagten Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten, die zuerst von Reshetikhin und Turaev exakt konstruiert wurden, basieren exzessiv auf Beschreibungen, und zwar: (1) auf dem sogenannten Kirby-

Kalkül für die Präsentation durch Chirurgie entlang Verschlingungen; und (2) auf den klassischen Triangulierungen. Je ein Teil des Buches ist der Konstruktion von Invarianten, ausgehend von diesen Beschreibungen, gewidmet. Diese werden jeweils zu topologischen Quantenfeldtheorien verfeinert: Das sind im wesentlichen gewisse Funktoren auf der Kobordismenkategorie der 3-Mannigfaltigkeiten. In einem kategorientheoretischen Ansatz wird untersucht, welche Voraussetzungen die Mehrdeutigkeit der Beschreibungssysteme eliminieren. Für (1) sind das die modularen Kategorien; für (2) die $6j$-Symbole.

Das Werk tritt mit dem Anspruch einer allgemeinen Begründung auf. Grundlage sind hauptsächlich die Forschungen des Autors, zusammen mit Reshetikhin und mit Viro. Es ist ratsam, die gerade erst aufkeimenden zarten Ideen nicht gleich mit der Schneelast des Buches zu erdrücken, sondern zunächst die wesentlichen Resultate und Ideen aus den leichter lesbaren Originalarbeiten zu entnehmen. Verwiesen sei auf [1] für Knotenpolynome (Jones, HOMFLY-PT, Kauffman); auf [2] und [3] für die beiden Versionen von Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten; auf [4] und [5] für einen leicht zugänglichen Spezialfall; und auf [6] für die Erweiterung zu topologischen Quantenfeldtheorien.

[1] Turaev, V.: Operator invariants of tangles and R-matrices. Math. USSR Izvestia, **35** (1990) 411–444
[2] Reshetikhin, N.; Turaev, V.: Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. Inv. Math. **103** (1991) 547–598
[3] Turaev, V.; Viro, O. Y.: State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols. Topology **31** (1992) 865–902
[4] Lickorish, W. B. R.: Three-manifold invariants and the Temperley-Lieb algebra. Math. Ann. **290** (1991) 657–670
[5] Blanchet, C.; Habegger, N.; Masbaum, G.; Vogel, P.: Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket. Topology **31** (1992) 685–699
[6] Blanchet, C.; Habegger, N.; Masbaum, G.; Vogel P.: Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket. Topology **34** (1995) 883–927

Göttingen T. tom Dieck

Buekenhout, F. (Hrsg.), **Handbook of Incidence Geometry,** Amsterdam: North-Holland 1995, 1432 S., Dfl. 390.00

Das vorliegende Buch gehört zu einer Serie von „Handbüchern", die derzeit zu einigen Gebieten der Mathematik erscheinen. In diesem Buch werden von verschiedenen Autoren die wesentlichen Teilgebiete der Inzidenz-Geometrie vorgestellt. Das Buch startet mit einer sehr lesenswerten Betrachtung von F. Buekenhout über den Begriff Inzidenzgeometrie und die Frage, ob dies überhaupt ein selbständiges Gebiet der Mathematik ist und ordnet die folgenden Kapitel in einen allgemeinen Zusammenhang ein. In Kapitel 2 (F. Buekenhout, P. Cameron) werden projektive und affine Geometrien über Schiefkörpern behandelt. Dies geht bis zu polaren Räumen und Buekenhout-Geometrien. Die affine und projektive metrische Geometrie wird in Kapitel 17 (E. Schröder) behandelt. Projektive Geometrie über Ringe finden wir in Kapitel 19 (A. Veldkamp) und Kapitel 21 (U. Brehm, M. Greferath, S. Schmidt). Der Spezialfall der projektiven Ebene wird in Kapitel 4 (A. Beutelspacher) und Kapitel 5 die Translationsebenen (M. Kallaher) behandelt. Dies wird dann verallgemeinert in Kapitel 7 (A. Thas), wo projektive Geometrie über endlichen Körpern (k-arcs, curves, MDS-codes, ovals, spreads, ovoids, flocks) behandelt wird. Die Verallgemeinerung zu linearen Räumen (Matroiden, geometrischen Verbänden) wird in Kapitel 6 (A. Delandtsheer) dargestellt. Die Verallgemeinerung in Richtung Designs findet man in Kapitel 8 (A. Brouwer, H. A. Wilbrink). Die Verbindung von Inzidenz-Geometrie mit Topologie wird in Kapitel 23 (Th. Grundhöfer, R. Löwen) und Kapitel 24 (G. Steinke) behandelt. Das Zusammenspiel mit metrischen Strukturen ist Gegenstand der Kapitel 15 (J. Seidel), Kapitel 16 (J. Lester) und dem schon oben erwähnten Kapitel 17. Dies ist im wesentlichen der erste Teil des Buches, der die klassischen geometrischen Themen behandelt. Insbesondere ist der Zusammenhang mit der Gruppentheorie, der für viele Entwicklungen der letzten Jahre sehr befruchtend war, kaum sichtbar. In diesen Teil gehören noch drei Kapitel, die eher zusammenhanglos zum Rest sind: Kapitel 14 (A. Herzer) über Kettengeometrien, Kapitel 18 (G. Gerla), in dem nicht die Punkte als Grundobjekt der Geometrie zugrunde gelegt, sondern aus anderen Objekten konstruiert werden und Kapitel 13 (M. Funk, K. Strambach), in dem freie Konstruktionen vorgestellt werden.

Der zweite Teil des vorliegenden Buches ist von den Tits'schen Gebäuden dominiert. Diese sind aus dem Versuch der Konstruktion von Chevalley-Gruppen entstanden und wurden von dem Zusammenhang der projektiven Geometrien mit der linearen Gruppe inspiriert. Hier ist also ein sehr enger Zusammenhang mit der Gruppentheorie gegeben, weshalb die folgenden Kapitel ohne einige Kenntnisse auf diesem Gebiet nicht ganz einfach zu lesen sind. Diese werden in Kapitel 3 (F. Buekenhout) vorbereitet. Hier wird zum ersten Mal auf die prominente Rolle von Gruppen zur Konstruktion von Beispielen eingegangen, und zwar der verschiedensten Arten, nicht nur der Gebäude. Hier finden wir auch die wichtigste Verallgemeinerung der Gebäude, Buekenhouts Diagrammgeometrien. Das zentrale Kapitel in diesem Teil ist aber Kapitel 11 (R. Scharlau), in dem ein hervorragender Überblick über die Theorie der Gebäude gegeben wird. Die kleinsten Gebäude, nämlich die verallgemeinerte n-Ecke, findet man in Kapitel 9 (J. Thas). Verallgemeinerung hiervon zu gewissen Rang 2-Geometrien werden in Kapitel 10 (F. De Clerck, H. van Maldeghem) studiert. Die Gebäude betrachtet als Punkt-Geraden-Geometrie ist Gegenstand von Kapitel 12 (A. Cohen). Die Verallgemeinerungen der Gebäude zu Diagrammgeometrien im Hinblick auf die sporadischen einfachen Gruppen wird in Kapitel 22 (F. Buekenhout, A. Pasini) vorgestellt. Schließlich werden in Kapitel 20 (J. Rohlfs, T. A. Springer) Anwendungen der Gebäude auf die Theorie der algebraischen Gruppen diskutiert.

Die Auswahl der Themen spiegelt natürlich die Sicht des Herausgebers wider. Die Gebäude sind, obwohl nicht immer thematisiert, so doch fast überall präsent. Man wird vielleicht das eine oder andere Gebiet vermissen. Alles in allem kann man aber konstatieren, daß hier ein ziemlich umfassender Überblick über das Gebiet „Inzidenz-Geometrie" gegeben wird. Bei der Vielzahl der Autoren ist es selbstverständlich, daß die einzelnen Kapitel im Stil sehr unterschiedlich sind. So finden wir reine Übersichtsartikel, wir finden Artikel, die im wesentlichen die neuesten Resultate beschreiben. Wir finden aber auch Artikel, die versuchen, ein Gebiet näher zu bringen und die wesentlichen Resultate auch zu beweisen. Es ist nicht klar, inwieweit der Herausgeber auf die Länge und die Art der Artikel Einfluß genommen hat. Die extremen Beispiele sind sicherlich Kapitel 4, Kapitel 11 und Kapitel 22. Im Kapitel 11 wird auf 170 Seiten eine hervorragende Darstellung der Theorie der Gebäude bis zu den neuesten Entwicklungen gegeben, und dies nicht nur in Übersichtsform, sondern die meisten Resultate werden bewiesen. Mit ein wenig mehr Aufwand hätte dies ein eigenständiges Buch sein können. Der Leser dieses Kapitels hat danach nicht nur ein Gefühl für das Gebiet, sondern kann sich ein Bild der benutzten Methoden machen. Kapitel 22 über Diagrammgeometrien ist ein reiner Übersichtsartikel. Auf 100 Seiten werden die wesentlichen Resultate (in Verbindung mit sporadischen Gruppen) dargestellt. Dies ist eine Resultatssammlung, die in einen Zusammenhang gestellt wurde. Beweise kommen nicht vor. Wertvoll ist die Vielzahl der vorgestellten offenen Probleme, wobei man bei aufmerksamer Lektüre noch weitere finden wird. Offensichtlich sind beide Kapitel für verschiedene Leserkreise geschrieben. Das erste mehr für den Leser, der sich für den Aufbau der Theorie und die Methoden interessiert, das zweite mehr für den Leser, der den aktuellen Stand der Forschung und die Richtung, in die das Gebiet in nächster Zeit wahrscheinlich gehen wird, kennen lernen will. Das andere Extrem ist Kapitel 4. Hier gibt der Autor auf 35 Seiten einen Überblick über projektive Ebenen (unter Ausschluß der Translationsebenen, die in Kapitel 5 behandelt werden). Es werden keine Beweise gegeben. Daß bei nur 35 Seiten hier mehr Fragen offen bleiben als beantwortet werden, ist klar. So findet man z. B. nichts über die Struktur der Kollineationsgruppen zu projektiven Ebenen. Die wichtigsten Arbeiten von Chr. Hering, M. Walker und Ch. Ho bleiben unerwähnt. Alle weiteren Kapitel reihen sich irgendwo zwischen diese Beispiele ein. Je nach Seitenzahl und Intension der Autoren finden wir Beweise, Resultatsammlungen und offene Probleme. Allen Artikeln gemeinsam ist die jeweils umfangreiche Literaturliste. Der Index von 40 Seiten macht das Buch auch als Nachschlagewerk angenehm.

Das Buch hat in dem Buch von P. Dembowski „Finite Geometries" einen berühmten Vorgänger. Dieses hat enormen Einfluß auf das Gebiet bis in die heutigen Tage ausgeübt. Ob dem vorliegenden Buch ein ähnlicher Erfolg beschieden ist, kann bezweifelt werden. Das Gebiet ist wesentlich heterogener geworden, und die Entwicklung schreitet mit einer rasanten Geschwindigkeit fort. Dies ist vielleicht der wesentliche Nachteil einiger Artikel. Der Leser sei gewarnt, daß manche „offene" Probleme inzwischen gelöst bzw. eine Lösung am Horizont sichtbar ist. Insofern ist das Buch an einigen Stellen, in der die Forschung derzeit besonders aktiv ist, nicht mehr aktuell.

Für wen ist das Buch nun geeignet? Zunächst ist es mit ca. 1400 Seiten sicherlich kein Handbuch, das man mit sich herumträgt. Bei einem Preis von ca. DM 350 wird man sich einen Kauf auch sicherlich zweimal überlegen.

Das Buch bietet gut geschriebene Übersichtsartikel mit einer großen Literaturliste. Jeder in dem Gebiet Arbeitende wird sicherlich mindestens 5 Artikel finden, die ihn direkt interessieren, vielleicht auch mehr. Inwieweit dies einen Kauf rechtfertigt, hängt bei dem Preis sicherlich auch davon ab, ob es die eigene Universitätsbibliothek anschafft oder nicht. Dort sollte es aber vorhanden sein, damit es Studenten zugänglich ist. Es gibt kaum eine bessere Gelegenheit, sich über einzelne ausgewählte Gebiete zu informieren (insbesondere die Gebäude und deren Entwicklungen, die darauf aufbauen), als in den Artikeln dieses Buches.

Halle G. Stroth

Cohn, P. M., Skew fields, Theory of general division rings (Encyclopediae of mathematics and its applications 57), Cambridge University Press 1995, 500 S., £ 55.00

Die Theorie der Schiefkörper ist bis heute nicht Allgemeingut breiterer mathematischer Kreise geworden. Mit Ausnahme von Algebraikern und Geometern, deren Hauptaugenmerk nicht auf der Algebraischen Geometrie ruht, weiß man wegen der Quaternionen von der Existenz von Schiefkörpern; sonst aber hofft man, sie würden sich, träfe man sie notgedrungenerweise, schon analog ihren kommutativen Vettern verhalten. Das vorliegende Buch, das alle bis heute erreichten wesentlichen Fortschritte über Schiefkörper enthält und welches, abgesehen von seinem Vorgänger „Skew Field Constructions" desselben Autors sowie die auf Verbindungen zur Logik- und Modelltheorie ausgerichteten Lecture Notes Nr. 454 von J. Hirschfeld und W. H. Wheeler (Forcing, Arithmetric, Division Rings), die einzige heute vorhandene Monographie über Schiefkörper ist, belehrt den Leser aber eines anderen: Die Schiefkörper verhalten sich radikal anders als ihre kommutativen Verwandten, haben ein eigenes unverwechselbares Gesicht, dessen Linien unvergleichlich komplexer sind und daher sich der Entwirrung viel unzugänglicher erweisen, als man anfänglich hat hoffen mögen.

Eine gewisse Ausnahme von dieser Feststellung bildet der wohlstudierte Fall der Schiefkörper, die endlich-dimensional über ihrem Zentrum sind, eine Einschränkung, die der Autor zu Recht als zu einschneidend empfindet und sie daher als Annahme weitgehend aus seinem Buch verbannt. Der rote Faden, der das Buch durchzieht, ist die Konstruktion eines Schiefkörpers mittels Einbettung geeigneter Ringe. Bereits das erste sowie das vierte Kapitel sind der Frage gewidmet, für welche Ringe ein Quotientenschiefkörper existiert. Im ersten Kapitel wird etwa gezeigt, wie die Ore-Bedingung und Lokalisierungen im nichtkommutativen Fall funktionieren. Es wird bewiesen, daß jeder Rechts-Ore-Bereich einen bis auf Isomorphismen eindeutigen Quotientenkörper besitzt und daß die Rechts-Ore-Bereiche eine große Klasse von Ringen bilden. Im vierten Kapitel wird das Problem der Existenz von Quotientenkörpern in voller Allgemeinheit angegriffen. Der Verfasser zeigt, daß die Elemente des Quotientenkörpers, falls einer existiert, als Lösungen von Matrixgleichungen gefunden werden können und daß man für sie bis zu einem gewissen Grade Normalformen bereitstellen kann. Ein Kriterium für die Existenz von einem Quotientenkörper lautet so: Ein Ring R hat genau dann einen Quotientenkörper, wenn $R \neq 0$ ist und keine Diagonalmatrix mit von Null verschiedenen Diagonalelementen als determinale Summe nichtvoller Matrizen ausgedrückt werden kann. Daraus sieht man, daß man zum Verständnis der Sätze viele neue Begriffe lernen muß und daß man auch danach durchaus Kunstfertigkeit benötigt, um sie sachgerecht auszuweiden. Da der Quotientenkörper (so etwa für freie Algebren) nicht eindeutig bestimmt ist, ist der (bis auf Isomorphie eindeutige) universelle Quotientenkörper von größerem Gewicht. Seine vom Autor vor etwa zwanzig Jahren bewiesene Eindeutigkeit markiert in der Theorie der Schiefkörper einen großen Durchbruch. Der Verfasser ist in der Lage, hinreichende Bedingungen für die Existenz universeller Quotientenkörper anzugeben; so etwa für sogenannte semifirs, d. h. Ringe, in denen jede Relation $\sum_{i=1}^{t} a_i \cdot b_i = 0$ für jedes $t \in \mathbb{N}$ trivialisierbar ist. Im 5. Kapitel benutzt der Verfasser dies, um zu zeigen, daß jede Familie von Körpern, die einen Teilkörper gemeinsam haben, sich in einen Körper, ein Koprodukt von Körpern einbetten läßt. Die Koprodukte können als eine Art freier Produkte angesehen werden. Der Verfasser studiert genauer eine spezielle Art von Koprodukten, die den sogenannten HNN-Erweiterungen der Gruppentheorie nachmodelliert sind und die es erlauben, folgende Behauptungen zu beweisen: Jeder unendliche Körper läßt sich sowohl in einen homogenen derselben Kardinalität als auch in einen solchen einbetten, in welchem zwei Elemente mit derselben Minimalgleichung über dem Zentrum konjugiert sind. Jeder Körper über einem zentralen Unterkörper k kann in einen Körper L eingebettet werden, so daß jeder abzählbar erzeugte Unterkörper von L in einem von zwei Elementen erzeugten Unterkörper enthalten ist. Der Autor benutzt die in diesem Kapitel erhaltenen Theoreme über Koprodukte auch zur Untersuchung des Einflusses von adjungierten Elementen oder von Lokalisierungen auf die globale Dimension. Dies erlaubt es ihm etwa, Integritätsbereiche zu konstruieren, die sich nicht in Körper einbetten lassen. Durch die Einführung des universellen Derivationsmoduls kann der Autor zeigen, daß die Erzeugendenzahl eines freien Körpers eine Invariante ist. Die Resultate des fünften Kapitels gestatten es, Körpererweiterungen zu konstruieren, deren Links- und Rechtsgrad verschieden sind.

Das zweite Kapitel ist den Polynomringen und Potenzreihen über Schiefkörpern gewidmet. Der Autor studiert deren Idealtheorie und Komplettierungen, die von „schiefen" Polynomringen zu „schiefen" Potenzreihen führen. Dies gibt ihm die Möglichkeit zu zeigen, daß die Gruppenalgebra einer total geordneten Gruppe in einen Körper einbettbar ist und daß die Konstruktion von Polynomringen über Schiefkörpern sich iterieren läßt. Außerdem kann er beweisen, daß ein filtrierter Ring in einen Körper, der als inverser Limes konstruiert wird, einbettbar ist.

Im dritten Kapitel wird vorgeführt, daß sich, im Prinzip, indem man die Jacobson-Bourbaki-Korrespondenz verwendet, die Galoistheorie von Schiefkörpererweiterungen analog zur kommutativen Theorie entwickeln läßt. Im Gegensatz zur kommutativen Theorie sind aber die algebraischen Gleichungen über Schiefkörpern explizit kaum zu behandeln; allerdings sammelt der Autor alles, was man weiß, sorgfältig auf. Konkret lassen sich quadratische Erweiterungen, die pseudo-linearen Erweiterungen sowie äußere Galoiserweiterungen ziemlich vollständig beschreiben. Ein erholsamer Einschub in diesem Kapitel ist der letzte Abschnitt, in dem die bis jetzt sporadischen Ergebnisse über die Struktur der multiplikativen Gruppe eines Schiefkörpers enthalten sind.

Im Mittelpunkt des sechsten Kapitels stehen die freien Körper und die Beziehungen zwischen freien Körpern über verschiedenen Grundkörpern. Die Elemente eines freien Körpers lassen sich durch Matrizen über einem Tensorring beschreiben. Der Verfasser behandelt auch die nichtkommutativen Analoga algebraisch abgeschlossener Körper, die existentiell abgeschlossenen Schiefkörper; in ihnen hat jede endliche, konsistente Menge von Gleichungen über dem Grundkörper eine Lösung. In diesem Kapitel wird dem Leser eindrucksvoll klargemacht, daß die Methoden der Modelltheorie für Schiefkörper relevant sind und wie sie eingesetzt werden können.

In der Theorie der Schiefkörper spielt das Spezialisierungslemma eine wichtige Rolle. Es besagt, daß in einem Körper, der unendlichen Grad über seinem Zentrum hat, es keine rationalen Indentitäten gibt, falls das Zentrum selbst unendlich ist. Im siebten Kapitel wird das systematische Studium der rationalen Identitäten aufgenommen, insbesondere werden deren Änderungen bei Spezialisierungen untersucht. Zu diesem Zwecke werden generische Divisionsalgebren verschiedener PI-Grade eingeführt.

Das achte Kapitel ist überwiegend Problemen gewidmet, die entstehen, wenn man versucht, algebraische Geometrie über Schiefkörpern zu betreiben. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß man keine intuitiven geometrischen Bilder hat. Aber es gibt auch eine solche Unmenge technischer Probleme, daß der Verfasser dieses Kapitel als ein Programm für zukünftige Forschung ansieht. Immerhin ist es möglich, in affinen und projektiven Räumen (die natürlich wie im kommutativen Fall gebildet werden) die Zariski-Topologie und die rationale Topologie einzuführen sowie die Spezialisierung zu definieren. Auch ein nichtkommutatives Analogon des Nullstellensatzes existiert, und es gibt interessante Beispiele von Varietäten.

Im letzten Kapitel wird die Bewertungstheorie auf nichtkommutative Körper ausgedehnt. Falls die Wertegruppe abelsch ist, bewegt man sich noch auf einem Terrain, welchem der Bewertungen bei kommutativen Körpern nicht allzu entlegen ist. Da die freien Körper solche Bewertungen gestatten, mag diese Einschränkung doch nicht als allzu brutal empfunden werden. Im allgemeinen lassen sich jedoch die vertrauten Ergebnisse des kommutativen Falles für Schiefkörper nicht retten. Am Schluß des Buches behandelt der Verfasser geordnete Körper und zeigt unter anderem, daß freie Körper sich anordnen lassen.

In der vorliegenden Monographie ist ein großer Teil des Lebenswerkes des Verfassers komprimiert, der die Theorie der Schiefkörper, die unendlichdimensional über ihrem Zentrum sind, mit einem vorbildhaften individuellen Kraftakt auf den heutigen Stand gebracht hat. Um ihn zu erreichen, hat er neue Begriffsbildungen geprägt, die einem Nichtspezialisten oft nicht geläufig sind. Daher ist die Lektüre kein Spaziergang. Bei erster Durchsicht des Textes hat mir der exzellente sprachliche Stil des Buches vollkommen die Schwierigkeiten verdeckt, denen ich beim Aufbröseln einiger Beweise anheimgefallen bin. Doch bei gründlicheren Anläufen stellte ich fest, daß der Grund für meine Verständnisschwierigkeiten darin lag, den Text zu schnell konsumieren zu wollen. Auf jeden Fall kann ich feststellen, daß das Buch von Herrn Cohn originell, ja einzigartig ist und daß es nur von ihm verfaßt werden konnte. Seine Lektüre ist ein Muß für jeden, der die Schiefkörper gründlicher kennenlernen möchte.

Erlangen K. Strambach

Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., Finite Model Theory, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1995, 327 + XV S., DM 158,–

Die Modelltheorie untersucht die Zusammenhänge zwischen den syntaktischen Eigenschaften von Formeln, Axiomensystemen, Theorien einerseits und den mathematischen Eigenschaften ihrer Modelle andererseits. *Endliche* Strukturen spielen in der klassischen Modelltheorie nur eine sehr untergeordnete Rolle. Die grundlegenden Ziele wie etwa die Strukturtheorie axiomatisierbarer Modellklassen und die wichtigsten Modellkonstruktionen beziehen sich fast ausschließlich auf den Bereich unendlicher Strukturen. Generell gilt, daß die Mathematische Logik traditionell von den Grundlagenproblemen der Mathematik geprägt und daher vornehmlich mit dem Unendlichen befaßt ist, und daß die wichtigsten Resultate und Methoden der Logik versagen, wenn ausschließlich endliche Strukturen betrachtet werden. Insbesondere gilt dies für die zentralen Sätze über die Prädikatenlogik erster Stufe wie den Vollständigkeitssatz und den Kompaktheitssatz.

Es gibt aber dennoch wichtige Gründe, speziell die Modelltheorie endlicher Strukturen systematisch zu untersuchen. Diese haben wesentlich mit neueren Fragestellungen und Herausforderungen aus der Informatik zu tun, sowie mit dem engen Zusammenhang zwischen *logischer Definierbarkeit* und *algorithmischer Komplexität.* Die Endliche Modelltheorie ist daher in den letzten zehn Jahren ein sehr aktives Forschungsgebiet geworden. Es vereinigt Fragestellungen und Methoden aus verschiedenen Gebieten der Mathematik und der Informatik, so etwa der Modelltheorie, der Komplexitätstheorie, der Theorie relationaler Datenbanken und der Kombinatorik. Das vorliegende Buch von Ebbinghaus und Flum ist die erste (und lang erwartete) Monographie zur Endlichen Modelltheorie überhaupt. Während bisher nur Übersichtsartikel zu Teilaspekten des Gebiets existierten, steht jetzt eine zusammenhängende Darstellung zur Verfügung, welche sowohl eine Einführung wie einen aktuellen Überblick vermittelt.

Die von Ebbinghaus und Flum beschriebene Sicht der Endlichen Modelltheorie geht aus von der klassischen Logik. Obwohl nur elementare Kenntnisse in Mathematischer Logik vorausgesetzt werden, ist daher das Buch sicher einfacher zu bewältigen von Lesern, welche eine gewisse Vertrautheit mit modelltheoretischen Methoden mitbringen. Auch die Gewichtung der Teilgebiete (z. B. mit dem starken Akzent auf Hierarchiefragen und Normalformen für Fixpunktlogiken) ist eher diktiert von klassischen Themen der Logik als von den Fragestellungen und Herausforderungen der Informatik, welche die Entwicklung der Endlichen Modelltheorie wesentlich mitgeprägt haben. Das Buch von Ebbinghaus und Flum wird aber mit Sicherheit bald durch andere Darstellungen, z. B. aus Sicht der Komplexitätstheorie, ergänzt werden, welche diese Aspekte stärker gewichten werden.

In den ersten beiden Kapiteln wird die Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode ausführlich und mit vielen Anwendungen erläutert. Wie erwähnt stehen ja die meisten traditionellen Methoden der Modelltheorie im Endlichen nicht zur Verfügung. Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele sind das wichtigste modelltheoretische Werkzeug, das in diesem Bereich überlebt und sogar massiv an Bedeutung gewinnt. Die sehr sorgfältige Einführung dieser Methodik wird zweifellos von großem Nutzen für das Gebiet sein. In diesen Kapiteln werden auch bereits die grundlegenden Ausdrucksschwächen der Logik erster Stufe behandelt, welche dazu führen, daß diese in der Endlichen Modelltheorie nicht die ausgezeichnete Stellung hat, die sie sonst in der Modelltheorie einnimmt.

Das dritte Kapitel führt in eine weitere grundlegende Methodik der Endlichen Modelltheorie ein, nämlich die Betrachtung von Zufallsstrukturen. Auch der Erfolg der probabilistischen Methode in der Endlichen Modelltheorie beruht letztlich auf einer Ausdrucksschwäche der wichtigsten logischen Systeme, welche am prägnantesten durch die sogenannten 0–1-Gesetze beschrieben wird: Für jeden Satz ψ konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zufallsstruktur mit n Elementen ein Modell von ψ ist, mit wachsendem

n immer gegen 0 oder 1. Es können in diesen Logiken also insbesondere keine nicht-trivialen Aussagen über Kardinalitäten formalisiert werden.

Kapitel 4 behandelt exemplarisch zwei Fragmente der Prädikatenlogik, welche die „finite model property" besitzen: Jede Formel, welche erfüllbar ist, hat auch ein endliches Modell. Diese Eigenschaft impliziert insbesondere, daß das Erfüllbarkeitsproblem für die entsprechenden Fragmente algorithmisch entscheidbar ist.

In Kapitel 5 wird der Zusammenhang von Logik und Automatentheorie behandelt und die klassische, in den 60er Jahren von Büchi, Elgot und Trakhtenbrot angegebenen Charakterisierung der regulären Sprachen durch die monadische Logik zweiter Stufe bewiesen. Diese Resultate werden als Ausgangspunkt (oder Mikrokosmos) für die generelle Thematik der Deskriptiven Komplexitätstheorie aufgefaßt, welche im 6. Kapitel entwickelt wird. Es geht dabei um die modelltheoretische Charakterisierung von Komplexität, in dem Sinn, daß Logiken angegeben werden sollen, deren Ausdrucksstärken genau den wichtigsten Komplexitätsklassen entsprechen. Dieses Forschungsprogramm war für den Bereich *geordneter* endlicher Strukturen sehr erfolgreich: Für alle wichtigen Komplexitätsklassen kennt man heute (in der Regel mehrere) modelltheoretische Charakterisierungen, typischerweise durch Logiken, welche die Prädikatenlogik erster Stufe um einen Rekursionsmechanismus (etwa zur Definition von transitiven Hüllen oder Fixpunkten) erweitern, oder durch Fragmente der Logik zweiter Stufe. Man kann also sagen, daß auf geordneten Strukturen die Logik eine ähnliche Rolle spielt, wie ein abstraktes Berechnungsmodell (z. B. Turingmaschinen). Ohne eine explizit gegebene oder definierbare lineare Ordnung sind allerdings bis heute für Klassen unterhalb von NP keine solchen Charakterisierungen bekannt. Die Frage, ob auch im ungeordneten Fall eine „Logik für PTIME" existiert, ist nach wie vor ungeklärt und gilt als das wichtigste offene Problem der Endlichen Modelltheorie.

Das 7. Kapitel ist den Fixpunktlogiken, ihrer Struktur, Ausdrucksstärke und dem Zusammenhang zu andern logischen Systemen gewidmet, insbesondere zur infinitären Logik und der Logik zweiter Stufe. Kapitel 8 behandelt die Datenbanksprache Datalog (welche auch als eine Variante der Fixpunktlogik gesehen werden kann) und ihre Erweiterungen. Hier wird auch nochmals ausführlich auf Normalformen und Hierarchien für Fixpunktlogiken eingegangen.

Kapitel 9 ist eine knappe Einführung in den Zusammenhang von Definierbarkeit und den Approximationseigenschaften von Optimierungsproblemen, und im letzten Kapitel werden verallgemeinerte Quantoren und logische Reduktionen behandelt.

Das Buch behandelt viele Aspekte der Endlichen Modelltheorie und gibt so einen guten Überblick. Obwohl viele Bereiche nur kurz angeschnitten werden können, entsteht ein interessantes Gesamtbild und eine angemessene Beschreibung dieses Gebiets, von der aus der Leser relativ schnell den Anschluß an die aktuelle Forschung gewinnen kann. Was vielleicht etwas zu kurz kommt, ist die Motivation. Eine ausführlichere Darstellung, was die Hauptanliegen und Fragestellungen der Endlichen Modelltheorie sind, eine systematische Wertung des bisher Erreichten, und eine explizitere Beleuchtung des Spannungsfeldes zwischen Logik, Komplexitätstheorie, Datenbanken und Kombinatorik, in dem die Endliche Modelltheorie steht, hätte dem Buch sicher gut getan. Man hätte sich vielleicht auch etwas ausführlichere und vor allem systematischere historische Bemerkungen, sowie mehr Literaturhinweise gewünscht. (Nur ein Beispiel: Obwohl dem Zusammenhang von Automatentheorie und Logik als „Mikrokosmos der Endlichen Modelltheorie" ein eigenes Kapitel gewidmet ist, fehlt jeder Hinweis auf die einschlägigen Arbeiten von Büchi.)

Insgesamt aber ist dies ein sehr gutes und nützliches Buch. Es führt sorgfältig und gründlich in die wichtigsten Methoden des Gebietes ein, bietet einen ausgezeichneten Überblick über die zentralen Fragestellungen und führt an den aktuellen Stand der Forschung heran. Ich kann das Buch allen sehr empfehlen, welche sich für neuere Entwicklungen in der Mathematischen Logik und Zusammenhänge zu aktuellen Fragestellungen in der Theoretischen Informatik interessieren.

Aachen E. Grädel

Fedosov, B., Deformation Quantization and Index Theory, Berlin: Akademie Verlag 1995, 325 S., DM 130,–

Eines der Hauptresultate der Mathematik von Quantisierungstheorien ist der Satz, daß jede symplektische Mannigfaltigkeit M eine formale Deformationsquantisierung besitzt. Dies bedeutet, daß auf dem Raum $\mathcal{C}^\infty(M)[\![\hbar]\!]$ von formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^\infty(M)$ ein nichtkommutatives $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-bilineares Produkt $*$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(i) Für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ hat das Produkt $f * g$ eine Entwicklung der Form

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f, g)\,\hbar^n,$$

wobei die c_n Bidifferentialoperatoren auf M sind und $c_0(f, g) = fg$ gilt.

(ii) Bezeichnet man mit $\{\,,\}$ die Poissonklammer auf $\mathcal{C}^\infty(M)$, so ist die Diracsche Quantisierungsbedingung

$$[f, g]_* := f * g - g * f = i\hbar\{f, g\} + o(\hbar^2)$$

in der Algebra $(\mathcal{C}^\infty(M)[\![\hbar]\!], *)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erfüllt.

Man nennt $*$ dann auch ein *Sternprodukt* auf $\mathcal{C}^\infty(M)$. Der erste Beweis für die Tatsache, daß jede symplektische Mannigfaltigkeit formal quantisiert werden kann, stammt von deWilde und Lecomte (Lett. Math. Phys. **7** (1983)) und basiert im wesentlichen auf Methoden, die sich aus der Deformationstheorie von Algebren nach Gerstenhaber und geeigneter Betrachtung der Hochschildkohomologie von Funktionenalgebren auf M ergeben. Methodisch unabhängig davon gab B. Fedosov einen kürzeren und mehr geometrisch orientierten Beweis, der aber erst 1994 durch eine Veröffentlichung im Journal of Differential Geometry (Bd. **40**, S. 213–238) der internationalen Mathematikergemeinschaft vorgestellt wurde.

Das vorliegende Buch liefert nun eine Einführung in die Theorie der Deformationsquantisierung nach Fedosov und bringt sie in Zusammenhang mit der Indextheorie elliptischer Operatoren. Insbesondere geht es darum, den berühmten Indexsatz von Atiyah und Singer auf Quantenalgebren, also auf die in obigem Sinne deformierten Algebren zu verallgemeinern.

Im ersten Kapitel wird ein Überblick über einige im folgenden benötigten Elemente der Differentialgeometrie und Topologie gegeben, genauer gesagt über die Theorie charakteristischer Klassen nach Chern und Weil, über Riemannsche Mannigfaltigkeiten und K-Theorie. Im nächsten Kapitel stellt der Autor die Grundzüge der Theorie symplektischer Mannigfaltigkeiten dar, dann in Kapitel 3 die der Pseudodifferentialoperatoren und den Weylschen Symbolkalkül auf $\mathbb{R}^n$. Dieser Symbolkalkül führt zu einer ersten Quantisierung, nämlich der Weylquantisierung auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit der kanonischen symplektischen Struktur. Die Weylquantisierung liefert für jedes reelle $\hbar > 0$ eine modulo glättender Operatoren bzw. Symbole bijektive Abbildung $\mathrm{Op}_\hbar : \Sigma^\infty \to \Psi^\infty$, wobei Σ^∞ den Raum der Symbole über $\mathbb{R}^n$ bezeichnet und Ψ^∞ den Raum der Pseudodifferentialoperatoren. Bezeichnet man mit $\sigma_\hbar$ die Umkehrabbildung von $\mathrm{Op}_\hbar$, so definiert $a *_\hbar b =$

$\sigma_\hbar(\mathrm{Op}_\hbar(a)\mathrm{OP}_\hbar(b))$ ein $\hbar$-abhängiges nichtkommutatives Produkt auf Σ^∞. Ersetzt man darin $\hbar$ durch einen formalen Parameter, so erhält man die gesuchte formale Deformationsquantisierung von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, die in der Literatur auch unter dem Namen *Moyalprodukt* bekannt ist. Im vierten Kapitel findet der Leser eine Exkursion über die analytischen Aspekte der Indextheorie mit Themen wie Fredholm-Operatoren und elliptische Differentialoperatoren; besondere Aufmerksamkeit erfährt das Beispiel des Harmonischen Oszillators. Der Beweis des Satzes über die Existenz einer formalen Deformationsquantisierung wird im fünften Kapitel vorgestellt. Zuerst wird dazu das Weylalgebren-Bündel $\mathrm{W}M$ über M konstruiert, das aus formalen Potenzreihen im Parameter $\hbar$ mit Koeffizienten im Raum der symmetrischen kovarianten Tensorfelder über M besteht. Die Produktstruktur $\circ : \mathrm{W}M \times \mathrm{W}M \to \mathrm{W}M$ ist dabei faserweise für alle $m \in M$ durch $a \circ b(m) = a(m) * b(m)$ gegeben, wobei $*$ das Moyalprodukt auf $T^*_m M \cong \mathbb{R}^{2\dim M}$ darstellt. Nach Wahl eines symplektischen Zusammenhangs auf M wird nun ein flacher Zusammenhang D auf $\mathrm{W}M$ konstruiert. Dieser hat die fundamentale Eigenschaft, daß der Raum $\mathrm{W}_D M$ der globalen parallelen Schnitte kanonisch isomorph zu $\mathcal{C}^\infty(M)[\![\hbar]\!]$ ist. Die nichtkommutative Algebrastruktur auf $\mathrm{W}_D M$ überträgt sich damit auf $\mathcal{C}^\infty(M)[\![\hbar]\!]$ und liefert die gewünschte Quantisierung.

Das Kapitel 6 ist dem Indexsatz für Quantenalgebren gewidmet. Zur Formulierung dieses Satzes müssen einige Begriffe bereitgestellt werden, wie zum Beispiel Spuren auf Quantenalgebren mit Werten in Laurentreihen über $\hbar$. Der Beweis des Indexsatzes folgt in gewissem Sinne der durch Atiyah und Singer vorgegebenen K-theoretischen Linie; unter anderem deshalb wird von Fedosov auch ein Analogon des Thom-Isomorphismus für Quantenalgebren eingeführt.

Die letzten drei Kapitel beschäftigen sich mit Themen, die der aktuellen Forschung angehören. Im siebten Kapitel geht es darum, asymptotische Darstellungen der Quantenalgebren $\mathrm{W}_D M$ bzw. geeigneter Unteralgebren $\mathrm{W}^s_D M \subset W_D M$ zu konstruieren. Bis auf technische Einzelheiten heißt dies, einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ zu finden, eine Menge $\Lambda \subset]0,1]$, die 0 als Häufungspunkt enthält, sowie für alle $\hbar \in \Lambda$ lineare Abbildungen $\mathrm{Op}_{N,\hbar} : \mathrm{W}^s_D M \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $N \in \mathbb{N}$, so daß bis auf Terme der Ordnung $\hbar^{N+1}$ die Abbildungen $\mathrm{Op}_{N,\hbar}$ Darstellung sind und mit $\mathrm{Op}_{N+1,\hbar}$ übereinstimmen. Für den Fall kompakter symplektischer Mannigfaltigkeiten M beweist Fedosov die Existenz asymptotischer Darstellungen von $\mathrm{W}^s_D M$, für den allgemeinen Fall bleibt das Problem noch zu lösen.

In Kapitel 8 beschäftigt sich Fedosov mit der Frage, inwieweit im Rahmen der Deformationsquantisierung eine quantisierte Version der Marsden-Weinstein-Reduktion existiert. Falls die symplektische Mannigfaltigkeit M eine reduzierbare symplektische $U(1)$-Gruppenwirkung besitzt, so kann gezeigt werden, daß eine reduzierte Quantisierung existiert, und diese für einen passenden Zusammenhang $\tilde{D}$ auf der Weylalgebra des Orbitraums $B = M/U(1)$ mit der Quantenalgebra $\mathrm{W}_{\tilde{D}} B$ übereinstimmt.

Im letzten Kapitel sind einige analytische Untersuchungen zur Schrödinger-Gleichung bezüglich eines Sternprodukts enthalten. Im allgemeinen ist es unmöglich, zu einer vorgegebenen Hamiltonfunktion H eine einparametrige Gruppe $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ von Elementen der quantisierten Algebra $\mathrm{W}_D M$ zu finden, so daß die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H * U(t), \quad U(0) = 1$$

erfüllt ist. Bezüglich einer asymptotischen Operatordarstellung von $\mathrm{W}_D M$ existiert jedoch eine solche Lösung der Schrödinger-Gleichung als einparametrige Gruppe von Transformationen des Hilbertraums. Zudem wird für $a \in \mathrm{W}_D M$ mit kompakten Träger gezeigt, daß $U(t)a$ Spurklasse ist, und $\mathrm{tr}\, U(t)a$ berechnet.

Das Buch von Fedosov stellt die erste umfassende Monographie zum Thema Deformationsquantisierung dar. Besonders ansprechend sind die hervorragende Stoffauswahl und der rote Faden, an dem der Leser von einigen Grundelementen der Differentialgeometrie und Theorie der Pseudodifferentialoperatoren bis zu tiefliegenden Resultaten der Deformationsquantisierung und Indextheorie geführt wird. Den in der Einleitung gestellten Anspruch, „selfcontained“ zu sein, kann das Buch angesichts der manchmal doch sehr knappen Darstellung und der wenigen Beispielen allerdings nicht ganz erfüllen. Zudem fällt das Literaturverzeichnis etwas kurz aus. Nichtsdestoweniger wird jeder Leser, der die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten kennt, großen Gewinn aus der Lektüre von Fedosovs Monographie ziehen. Schließlich enthält das Buch eine Fülle neuer Ideen und insbesondere für den Experten auch genügend Anregungen für weitere Entwicklungen.

Das Buch von Fedosov ist jedem wärmstens zu empfehlen, der nach einer Darstellung des aktuellen Wissenstandes in der Theorie der formalen Deformationsquantisierung sucht.

Berlin M. Pflaum

Graham, R. L., Grötschel, M., Lovász, L. (Hrsg.), **Handbook of Combinatorics,** 2 Bände, Amsterdam: Elsevier Science 1995, insgesamt 2250 S., Dfl 260,– (1. Bd.), Dfl 240,– (2. Bd.)

Nun liegt es also vor, das lange angekündigte Handbuch der Kombinatorik. Die Erwartungen waren hoch – und jetzt da das Buch auf dem Tisch liegt, kann man sagen, sie wurden in hohem Maße erfüllt. Die Idee und Intention der beiden Bände (insgesamt 2200 Seiten) beschreiben die Herausgeber in ihrem Vorwort: “... Despite the dynamic state of this development [of combinatorics], we feel that the time is ripe for summarizing the current status of the field and for surveying those major results that in our opinion will be of long-term importance”, und weiter unten “... the intention of the Handbook is to provide the working mathematician or computer scientist with a good overview of basic methods and paradigms, as well as important results and current issues and trends across the broad spectrum of combinatorics”. Nicht ein umfassender und detaillierter Ergebnisbericht war also die Absicht, sondern die Konzentration auf große Leitlinien, die weit in die Zukunft weisen – bei insgesamt 44 Kapiteln und 57 Autoren ein nicht nur dem Umfange nach gewaltiges Unternehmen.

Schon die Einteilung des Handbuches, nicht wie üblich in Teilgebiete, sondern in Ideen und Perspektiven, überzeugt. Viele der fundamentalen Resultate erscheinen in mehreren Kapiteln, unter einem neuen Gesichtspunkt und in der Interpretation der jeweiligen Autoren. Band I enthält

Part I: Structures
mit den Untertiteln: Graphs, Finite Sets and Relations, Matroids, Symmetric Structures, Combinatorial Structures in Geometry and Number Theory,

Band II widmet sich den 4 Abschnitten

Part II: Aspects
Part III: Methods
Part IV: Applications
Part V: Horizons.

Band I führt, wie schon der Titel besagt, in die grundlegenden Strukturen ein. Die Themenauswahl ist dabei meist auf die Interessen der Autoren zugeschnitten, und der Stil variiert von detailliert bis kursorisch. Mir persönlich scheinen die Teile II und III, Aspects and Methods, besonders gelungen. Um die Neugier der Leser zu wecken, seien hier die Kapitelüberschriften und Autoren angegeben. Aspects: Algebraic Enumeration (I. . M. Gessel und R. P. Stanley), Asymptotic Enumeration Methods (A. M. Odlyzko), Extremal Graph Theory (B. Bollobas), Extremal Set Systems (P. Frankl), Ramsey Theory (J. Nesetril), Discrepancy Theory (J. Beck und V. Sos), Automorphism Groups, Isomorphism, Reconstruction (L. Babai), Combinatorial Optimization (M. Grötschel und L. Lovász), Computational Complexity (D. B. Shmoys und E. Tardos); Methods: Polyhedral Combinatorics (A. Schrijver), Tools from Linear Algebra (C. D. Godsil mit einem Appendix von L. Lovász), Tools from Higher Algebra (N. Alon), Probabilistic Methods (J. Spencer), Topological Methods (A. Björner). In all diesen Kapiteln wird eine wunderbare Tour d'horizon geboten, die in vielen Fällen an die neuesten Ergebnisse heranführt und fast durchwegs mit einem informativen Literaturverzeichnis ausgestattet ist.

Schwächen hat das Handbuch natürlich auch. Nicht alle Autoren haben ihrem Thema dieselbe Sorgfalt angedeihen lassen, einige Kapitel sind (wohl wegen der langen Entstehungszeit) schon heute überholungsbedürftig. Die letzten beiden Abschnitte über Applications und Horizons überzeugen nur zum Teil. In Applications ist es nicht allen Autoren gelungen, wirklich überzeugend eine Brücke von den konkreten Problemen (vor allem aus den Naturwissenschaften) zur mathematischen Behandlung zu schlagen. Der Stil wird manchmal diffus und läßt den roten Faden vermissen, der mathematisch orientierten Lesern am Herzen liegt. Der letzte Teil Horizons hätte wohl besser unter die anderen Abschnitte eingereiht werden sollen, z. B. würde das Kapitel Infinite Combinatorics bestens in Teil II passen. So wirkt dieser Teil etwas abgetrennt vom Rest.

Insgesamt ist den Herausgebern für dieses wichtige Werk die größte Hochachtung auszusprechen. Die 2200 Seiten sind (soweit ich das feststellen konnte) fast druckfehlerfrei. Die Querverweise, die Literatur und der Index sind exzellent organisiert. Schade, daß der Preis in Regionen liegt, der das Handbuch im wesentlichen wohl auf die Bibliotheken verweisen wird. Es hätte seinen Platz auf jedem Schreibtisch verdient.

Berlin M. Aigner

O'Neill, B., The Geometry of Kerr Black Holes, Wellesley: A. K. Peters 1995, 381 S., $ 79.95

Vor fast genau 80 Jahren, am 20. 3. 1916, reichte Albert Einstein seine berühmteste Arbeit bei den „Annalen der Physik" ein: „Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie". Die Riemannsche Geometrie stand bei der Geburt dieser neuen geometrisch-physikalischen Theorie Pate, und von der ersten Stunde an haben immer wieder auch Mathematiker wesentliche Beiträge dazu geleistet. Anstelle des Newtonschen Gravitationspotentials tritt eine Lorentz-Metrik, d. h. eine differenzierbar vom Punkt abhängige symmetrische Bilinearform g vom Typ $(+, +, +, -)$ auf der 4-dimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, deren Riccikrümmung über den sogenannten Massentensor durch die Materieverteilung in Raum und Zeit bestimmt ist – insbesondere ist sie Null im Vakuum – und deren Geodätische mit zeit- oder lichtartigen Anfangsrichtungen die Bewegungen von Materie und Licht unter dem Einfluß der Gravitation beschreiben. Das einfachste Modell für das Gravitationsfeld eines Sternes in dieser Theorie wurde bereits 1915 von Karl Schwarzschild gefunden. Der Stern wird im Schwarzschild-Modell als sphärisch symmetrisch und für alle Zeiten unverändert (statisch) angenommen. Das Modell bietet eine zutreffende Beschreibung für die relativistischen Effekte im Gravitationsfeld der Sonne, z. B. die Lichtablenkung am Sonnenrand und die relativistische Periheldrehung des Merkur. Für Sterne, deren Rotation um die eigene Achse nicht mehr vernachlässigbar ist, wird das Schwarzschild-Modell falsch; von der vollen Kugelsymmetrie bleibt nur noch die Symmetrie unter Drehungen in der Äquatiorialebene übrig. Das zu dieser Situation gehörige Modell wurde erst 1963 von Roy Kerr gefunden. Während die Schwarzschild-Metrik geometrisch gut verstanden ist (vgl. z. B. [Besse], Kap. 3), wurde die Kerr-Metrik von Seiten der Differentialgeometrie bisher kaum beachtet. Diese Lücke wird durch das nun vorliegende Buch [O'Neill] von Barrett O'Neill geschlossen, das eine detaillierte Beschreibung der Kerr-Geometrie, ihrer Geodätischen, ihrer Krümmung und ihrer maximalen Fortsetzung enthält.

Analytische Metriken verhalten sich ähnlich wie analytische Funktionen: Wie diese lokal durch eine Potenzreihe definiert werden können, sich aber weit über den Konvergenzbereich der Potenzreihe hinaus analytisch fortsetzen lassen, so sind analytische Metriken anfänglich in bestimmten (physikalisch motivierten) Koordinaten definiert, die am Rande ihres Bereichs singulär werden, wie z. B. Polarkoordinaten im Ursprung. Durch Übergang zu neuen Koordinaten läßt sich die Metrik solange fortsetzen, bis sie an eine „wesentliche" Singularität stößt. Typisch für Lorentz-Metriken ist, daß solche neu hinzugewonnenen Bereiche von „Horizonten" umgeben sind, d. h. Hyperflächen, die von zeit- und lichtartigen Kurven nur in einer Richtung passiert werden können. Da also aus dem dahinter verborgenen Bereich weder Materie noch Licht entweichen kann, nennt man solche Bereiche Schwarze Löcher. Physikalisch gesehen könnten Schwarze Löcher beim Kollaps eines Sterns nach Aufbrauchen aller Energiereserven entstehen. Da die Rotationsgeschwindigkeit eines kollabierenden Sterns wegen der Drehimpuls-Erhaltung wächst, wird der Rotationseffekt beim Schwarzen Loch besonders relevant. Nach gängiger Theorie wird sich das Gravitationsfeld jedes kollabierenden Sterns am Ende wie in der Kerr-Geometrie verhalten, was dieser Metrik eine besondere Bedeutung gibt.

Ein statisches Schwarzes Loch ist von der Schwarzschild-Metrik her wohlbekannt. Ein Astronaut, der den Horizont dieser Metrik (Schwarzschild-Radius) passiert, wird allerdings nur noch kurz zu leben haben, da er in die wesentliche Singularität hineingezogen wird. Das „rotierende" Schwarze Loch der Kerr-Geometrie ist vollständig anders geartet; dies zu beschreiben ist eine der Absichten des vorliegenden Buches. Es treten die merkwürdigsten Phänomene auf: Der Astronaut kann diesmal die wesentliche Singularität vermeiden und überleben; er wird (im Fall langsamer Rotation) noch einen zweiten Horizont passieren (vgl. Fig. 2.8, S. 88) und in einen Bereich gelangen, in dem keine Kausalität mehr gilt und eine Zeitmaschine auf ihn wartet (Fig. 2.5, S. 77). Das Schwarze Loch kann auch auf höchst seltsame Weise (klassisch) Energie abgeben; es ist also nicht völlig schwarz.

Kap. 1 gibt eine kurze Einführung in die Differentialgeometrie der Lorentz-Metriken und stellt (in Abschnitt 1.9, S. 55f) einige der weiteren Ergebnisse für die Kerr-Metrik vor. Kap. 2 beschreibt die Kerr-Metrik zunächst in den ursprünglich gewählten Koordinaten (Boyer-Lindquist-Koordinaten). In 2.6 und 2.7 werden in diesen Koordinaten mit Hilfe von Differentialformen (Cartan-Kalkül) kovariante Ableitungen und Krümmungen berechnet und insbesondere gezeigt, daß die Riccikrümmung Null ist. Der Definitionsbereich der Koordinaten kann je nach der Größe des Drehimpulses a und der Masse M des Sterns eine (für $a > M$), zwei (für $a = M$) oder drei Zusammenhangskomponenten („Blocks") haben. Der letzte Fall $a < M$ mit drei Blocks ist der interessanteste und auch physikalisch wichtigste. Die Blocks werden zunächst einzeln beschrieben und dann (in 2.5) nach Wahl neuer Koordinaten durch verbindenden Hyperflächen (Horizonte) zusammengefügt. Der Wahl dieser Koordinaten liegt dieselbe Idee zugrunde wie auch bereits in der Schwarzschild-Geometrie: Die Lichtgeodätischen, die von weit draußen kommen und dort direkt auf den Stern gerichtet sind („Haupt-Nullrichtungen"), werden zu Koordinatenlinien, die beide Horizonte durchdringen. Wählt man statt der auf den Stern gerichteten die von Stern fortstrebenden Lichtgeodätischen, so fügt man die Blöcke auf eine andere Art zusammen. Diese beiden Metriken können in einer noch viel größeren maximalen Fortsetzung vereinigt werden, deren Geometrie und Topologie, in Kap. 3 behandelt werden; Fig. 3.10 auf S. 119 gibt einen ersten Eindruck dieser maximal fortgesetzten Kerr-Metrik.

Das 4. Kapitel enthält eine detaillierte Beschreibung der zeit- und lichtartigen Geodätischen der Kerr-Metrik. Man sieht sofort drei erste Integrale (Erhaltungsgrößen): das Skalarprodukt des Tangentenvektors sowie zwei andere, die von der zweiparametrigen Isometriegruppe (Drehungen und Zeit-Translationen) kommen. Es gibt aber noch ein weiteres erstes Integral, das die Differentialgleichung der Geodätischen zu einem vollständig integrablen System macht. Diese vierte Erhaltungsgröße kommt von einem Killing-Tensorfeld her, das eng mit den beiden Haupt-Nullrichtungsscharen verbunden ist: dieser Aspekt wird leider nicht behandelt (vgl. dazu [Wald], S. 321). Der Verlauf der Geodätischen in der maximalen Kerr-Metrik wird in Abhängigkeit von den vier Erhaltungsgrößen quantitativ und qualitativ beschrieben.

R. Kerr hat die nach ihm benannte Metrik auf Grund folgender Beobachtung gefunden: Wegen der beiden Scharen von Haupt-Nullrichtungen (Tangentenvektoren der ein- und auslaufenden Lichtgeodätischen), die eine solche Metrik besitzen muß, hat der Krümmungstensor eine ganz spezielle Gestalt, nämlich Typ D der 1954 von dem russischen Mathematiker A. Z. Petrov gegebenen Klassifikation. Damit beschäftigt sich das 5. Kapitel. Zunächst wird (sehr schön) die übliche Aufspaltung eines Krümmungstensors in Skalarkrümmungs-, Ricci- und Weyl-Anteil hergeleitet. Für eine Metrik mit Riccikrümmung Null bleibt nur der Weyl-Anteil W übrig. Dieser vertauscht mit dem Hodge-Stern-Operator auf 2-Formen, der für 4-dimensionale Lorenzmetriken eine komplexe Struktur ist ($** = -id$). Damit wird W in jedem Punkt zu einer komplex-linearen Abbildung mit Spur 0 auf einem komplex 3-dimensionalen Vektorraum. Wenn W diagonalisierbar ist mit genau zwei verschiedenen Eigenwerten, sprechen wir vom Petrov-Typ D. Aus der Existenz der oben erwähnten zwei Scharen von Haupt-Nullrichtungen wird abgeleitet, daß die Kerr-Metrik (ebenso wie die Schwarzschild-Metrik) von diesem Typ sein muß.

Eine vergleichbar ausführliche Darstellung der Kerr-Metrik ist [Chandrasekhar]. Dieses Buch geht beträchtlich über [O'Neill] hinaus; die behandelten Gegenstände finde ich aber in [O'Neill] tiefergehend und besser verständlich dargestellt. Was man bei O'Neill nicht findet, ist die Physik auf dem Hintergrund der Kerr-Metrik (Elektrodynamik, Thermodynamik, Quantentheorie); hierzu vgl. [Chandrasekhar] und [Wald]. Als Mathematiker vermißt man etwas schmerzlicher, daß keine Herleitung der Kerr-Metrik gegeben wird. Ähnlich wie im Schwarzschild-Fall bestimmen die Symmetrieannahmen, die asymptotische Flachheit und das Verschwinden der Riccikrümmung die Kerr-Metrik bereits eindeutig, vgl. hierzu die Darstellung in [Chandrasekhar], die aber vom mathematischen Standpunkt nicht ganz befriedigt. Die Literatur zu den mehr strukturellen Aspekten dieser Herleitung (Zusammenhang mit harmonischen Abbildungen mit Werten in Symmetrischen Räumen) wurde kürzlich in der Diplomarbeit [Kollross] aufgearbeitet.

Die Kerr-Metrik birgt eine Fülle von interessanter Geometrie und Analysis. Vieles davon scheint mir noch nicht vollständig verstanden zu sein. Es ist zu wünschen, daß das schöne Buch von O'Neill die Neugierde und das Interesse vieler Leser weckt.

[Besse] Besse, A. L.: Einstein Manifolds. Springer 1986

[Chandrasekhar] Chandrasekhar, S.: The Mathematical Theory of Black holes. Clarendon Press, Oxford, 1983

[Kollross] Kollross, A.: Die Kerrmetrik in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Diplomarbeit, Universität Augsburg 1994

[O'Neill] O'Neill, B.: The Geometry of Kerr Black Holes. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995

[Wald] Wald, R. M.: General Relativity. The University of Chicago Press 1984

Augsburg J. H. Eschenburg

Jost, J., Riemannian Geometry and Geometric Analysis (Universitext), Berlin u. a.: Springer 1995, 401 S., softcover, DM 78,–

In den letzten Jahrzehnten ist die Riemannsche Geometrie ein sehr lebhaftes Forschungsgebiet gewesen. Es ist daher eine wichtige und reizvolle Frage, ob und inwiefern man den Studenten diese Entwicklung schon bei der ersten Begegnung mit dem Gebiet nahebringen kann.

Es sind sehr viele neue Lehrbücher der Riemannschen Geometrie in den letzten Jahren erschienen. Das vorliegende Buch, das aus einer dreisemestrigen Vorlesung des Verfassers an der Universität Bochum entstanden ist, scheint mir wegen der Breite der behandelten Themen zu den interessantesten zu gehören. Der Schwerpunkt ist eher auf der analytischen Seite, im Unterschied zu der Mehrzahl der Lehrbücher, die sich an Anfänger richten. So ist z. B. das letzte Kapitel ein langer Bericht über harmonische Abbildungen, in dem auf viele neuere Ergebnisse eingegangen wird. Sehr reizvoll finde ich die kleingedruckten Bemerkungen, die der Verfasser *Perspectives* nennt. Hier wird der Leser sowohl auf die historische Entwicklung hingewiesen wie auch Ausblick auf die aktuelle Forschung gegeben. Vom Nachteil ist, daß dadurch die Literaturangaben durch das ganze Buch verstreut sind und nicht am Ende des Buches wie üblich angeführt werden. Leider hilft der Index hier wenig. Die Notation bezieht sich vorwiegend auf lokale Koordinaten. Das wird sicherlich vielen nicht gefallen, obwohl alles andere bei der Stoffauswahl unnatürlich oder unmöglich wäre.

Das Buch fängt nach einem einführenden Kapitel mit De Rham-Kohomologie und harmonischen Differentialformen an. Dann werden kovariante Ableitungen und Zusammenhänge eingeführt. Hier richtet sich der Formalismus nach dem, was in der Eichtheorie üblich ist. Es wird dann auf die einfachsten Grundlagen der Yang-Mills-Theorie eingegangen, die erste Variation für das Volumen einer Untermannigfaltigkeit hergeleitet und die Bochner-Methode am Beispiel der harmonischen 1-Formen eingeführt.

Dann kommt ein Kapitel über Geodätische und Jacobifelder, in dem zunächst der Morsesche Indexsatz und der Satz von Bonnet-Myers bewiesen werden. Die Darstellung unterscheidet sich hier wenig von den üblichen Lehrbüchern, außer daß etwas mehr Funktionalanalysis benutzt wird. Das Kapitel wird fortgesetzt mit einer ausführlichen Diskussion von Jacobi-Feld-Abschätzungen und deren Anwendungen. In einem kurzen Kapitel, das sich anschließt, werden einige Resultate über Krümmung und Topologie ohne Beweis zitiert. Es handelt sich hier um eines der schönsten Kapitel der Riemannschen Geometrie. Der Verfasser geht zurecht wenig auf diese Sachen ein, denn das Einfachere ist oft genug dargestellt worden und das Schwierigere gehört in ein anderes Buch, auf das wir immer noch warten müssen.

Jetzt kommt ein Kapitel mit einer Einführung in die Morse-Theorie und Anwendungen auf geschlossene Geodätische. Der Satz von Lusternik-Fet, daß es auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtkonstante geschlossene Geodätische gibt, wird bewiesen. Geschlossene Geodätische sind ein schönes Thema, auf das wenige Lehrbücher eingehen. Hier ist natürlich kein Platz für eine ausführliche Darstellung. Schön wäre es, wenn dieses Gebiet in nicht allzu ferner Zukunft neu aufgearbeitet würde. Der Verfasser benutzt hier die altbewährte Methode der endlichdimensionalen Approximationen, aber in einem späteren Kapitel wird auf die Palais-Smale-Bedingung eingegangen, mit der diese meistens vermieden werden können.

Das nächste Kapitel behandelt zunächst kurz Kähler-Mannigfaltigkeiten und gibt dann eine Einführung in die Theorie symmetrischer Räume bis dahin, wo die Theorie Liescher Gruppen vorausgesetzt werden müßte. Der Verfasser enthält dem Leser die Strukturtheorie nicht ganz vor, denn geschickterweise wird die Wurzelraumzerlegung und ähnliches am Beispiel des Raumes $SL(n, R)\ SO(n)$ erläutert.

Das letzte Kapitel, in dem harmonische Abbildungen behandelt werden, ist das längste und wird den schon eingeweihten Leser am meisten interessieren. Hier gehört der Verfasser auch zu den bekanntesten Experten. Zunächst werden harmonische Abbildungen von Flächen ausführlich diskutiert: Existenzsätze werden bewiesen, und es wird auf das Phänomen des Abspaltens von minimalen 2-Sphären eingegangen. Weitere Themen in diesem Kapitel sind Regularitätssätze, die Bochner-Methode und Existenz- und Eindeutigkeitssätze für harmonische Abbildungen in Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung.

Ich bin mir nicht sicher, ob Studenten in mittleren Semestern den Beweisen immer gut folgen können werden, denn sie sind doch oft recht knapp. Inspirierend für sie ist das Buch bestimmt. Für die Dozenten, die eine Vorlesung über Riemannsche Geometrie planen oder lesen, sollte dieses Buch auch hilfreich sein. Das Buch liefert sicherlich auch eine gute Antwort zu der Anfangs erwähnten Frage, wie man die moderne Entwicklung der Riemannschen Geometrie in einem Lehrbuch berücksichtigen kann.

Köln G. Thorbergsson

Padberg, M., Linear Optimization and Extensions (Algorithms and Combinatorics Bd. 12), Berlin u. a.: Springer 1995, 449 S., DM 148,–

This book gives a very impressive overview over (theoretical and practical) aspects of Linear Programming from the standpoint of an author who is strongly interested and experienced in extremely high-dimensioned real-world applications of Linear Programming. In this sense it is a significant completion and augmentation of the existing literature. Most books in this field had turned out to be either theoretically or practically oriented. Here, the reader gets convinced that theory is not explained as a self-purpose and that practical problems are attacked only after a rigorous analysis of the theoretical background.

This philosophy and this way of doing mathematics come up in the structure of the book. It includes a lot of application problems which are discussed verbally in detail before the author turns to a mathematical model for the real problem and before he describes the solution procedure. Also the intention of the author is reflected by inclusion of a chapter on combinatorial optimization resp. integer Linear Programming, which seems to be the ultimate goal.

The authors starts with some practical examples, before he presents the typical forms of Linear Programming problems. Chapters 3 and 4 make the reader familiar with the basic calculus and argumentation in standard Linear Programming. Finally, in Chapter 5, the Simplex-Algorithm is introduced. The author puts stress on not dealing with Tableau-Methods. Instead he directly addresses the matrix-oriented representation of the revised Simplex-Method in order to get on the fundamentum for solving large dimensioned problems efficiently. The corresponding Linear Algebra is given in detail. Less attention is directed towards complexity questions, as e.g. the existence of problem-families with exponential many pivot steps. These questions are ironically comprehended as "worstcasitis of the 70's". Another aspect, namely the simple geometric interpretation of walking on edges from vertex to vertex, is also put into the background.

Chapter 6 deals with duality-theory of Linear Programming and Chapter 7 is entitled Analytical Geometry, but essentially deals with Polyhedral Theory, which is given in a very convincing way, in order to prepare the polyhedral combinatorics of integer programming. Special emphasis is laid on "double description algorithms" which show the way from inequality-systems for polyhedra to finite generation and vice versa. Also in great detail the author discusses and calculates the digital sizes of rational polyhedra based on the finite precision of number representation in computers. In addition, many methods, which are extremely valuable for achieving numerical stability, are explained.

In Chapter 8, the author gives a very interesting and illuminating explanation of different approaches to interior-point methods. These pages reflect his point of view and help very much to recognize the essential concepts in the overwhelming flood of papers in that field. I find this chapter very helpful for understanding, what is going on, from a more distant and neutral point of view.

After that, in Chapter 9, the reader finds an intensive study on Ellipsoid Algorithms, which is less justified by the numerical efficiency of that method, but by the theoretical polynomiality of Linear Programming, which could be proven using this approach. These polynomiality-issues, together with the parallel problem of separation of violated inequalities form the main theoretical support and backbone for the branch-and-cut-algorithms used for combinatorial optimization.

Finally, as already mentioned, the author comes to his most successive field of applications, namely combinatorial optimization. What he writes in about thirty pages, gives – having all the theory of Linear Programming available – a very interesting and instructive insight how and why combinatorial methods based on LP-methods work (so efficiently).

Summarizing, I feel that this book is a very valuable contribution to the literature on Linear Optimization. It will be extremely useful for all who have to deal with high-dimensional applications and for all who want to learn about the different approaches of the LP-community to attack the intrinsic difficulty of large-scaled linear-, integer-, mixed-integer- or combinatorial optimization problems.

Augsburg K. H. Borgwardt

Tenenbaum, G., Introduction to analytic and probabilistic number theory (Cambridge Studies in advanced Mathematics 46), Cambridge University Press 1995, 448 S., £ 45.00

Zwar gibt es zahlreiche Bücher zur analytischen Zahlentheorie, aber nur wenige sind originell, elegant und motivierend. Seit einigen Jahren kursierte in Insiderkreisen eine erweiterte Vorlesungsausarbeitung von Gérald Tenenbaum (auf französisch), die oft hoch gelobt wurde, doch aufgrund ihrer beschränkten Verbreitung außerhalb Frankreichs recht wirkungslos blieb. So ist es besonders erfreulich, wenn Cambridge University Press dieses Buch jetzt auf Englisch einem breiteren Publikum zugänglich macht.

Der Verfasser hatte es sich zur Aufgabe gemacht, gleichzeitig dem fortgeschrittenen Studierenden eine in sich geschlossene Einführung in die analytischen Methoden der Zahlentheorie zu geben und dem Experten zu grundlegenden Fragen handbuchartig Wissen bereitzustellen. Daß bei diesem Anspruch ein umfangreiches Werk von rund 450 Seiten entstanden ist, sollte nicht verwundern. Dabei wird allerdings ein eindrucksvolles Programm bewältigt, das eine ausführliche Diskussion lohnt.

Der Text ist in drei Kapitel gegliedert und diskutiert nacheinander elementare, funktionentheoretische und probabilistische Methoden. Die im ersten Kapitel behandelten Themen Mertenssche Primzahltheorie, arithmetische Funktionen und Dirichletreihen lassen eine klassische Darstellung vermuten, doch der mit der Materie vertraute Leser wird immer wieder durch individuelle Wendungen oder den Einsatz wenig bekannter oder gar neuer Methoden und Beweisanordnungen überrascht. Eine Perle ist bereits auf den ersten Seiten zu finden: die Chebychevschen Abschätzungen für die Primzahlzählfunktion werden sehr rasch und durchsichtig nach einer Methode von Nair (1982) hergeleitet. Viele weitere Beispiele ließen sich anfügen.

Im Kapitel über elementare Methoden finden sich auch Abschnitte über Siebe (Eratosthenes, Brun und das „große“ nebst Anwendungen auf Primzahlzwillinge u. ä.) und die van der Corputsche Theorie für Exponentialsummen. Bei der in diesem Buch benutzten Definition ist die Zuordnung schlüssig: jede von komplex-analytischen Hilfsmitteln freie Methode ist elementar.

Der funktionentheoretische Abschnitt beginnt mit einer Darstellung der Riemannschen Ideen bis hin zum Primzahlsatz. Unter der Überschrift *Selberg-Delange method* wird eine selten in Büchern zu findende Technik zur Diskussion gestellt, die für Dirichlet-Reihen, die im gewissen Sinne einer Potenz der Riemannschen Zetafunktion nahekommen, dem Primzahlsatz verwandte asymptotische Aussagen liefert. Dieser Teil gehört ebenso wie der nachfolgende Abschnitt über Taubersätze zu den Höhepunkten des Buches. Zum Schluß dieses Kapitels werden Primzahlen in arithmetischen Progressionen besprochen. Dieses auch in Anwendungen so wichtige Thema hätte eine ausführlichere Behandlung verdient, wenigstens einen Beweis für den sehr wichtigen Satz von Siegel-Walfisz, der nur zitiert wird, hätte man sich gewünscht. Dies ist allerdings die einzige kritische Anmerkung zur Stoffauswahl, und der Verfasser verweist durchaus berechtigt auf mehrere gute Quellen zu diesem Fragenkreis.

Das letzte Kapitel gibt eine Einführung in eine von statistischen Ideen geprägte Theorie arithmetischer Funktionen, einem Arbeitsgebiet des Verfassers. Es gibt eine Reihe weiterer Darstellungen dazu, vor allem die Grundlehrenbände von Elliott (Probabilistic Number Theory I, II, Springer, New York 1979/1980), doch immer wieder besticht das vorliegende Buch durch seine erfrischend andere Darstellung. Hier kommt eine Vorliebe des Autors zugunsten komplex-analytischer Methoden besonders zum Tragen, diese Tendenz deutet sich aber schon früh an (z. B. kommt bei der Begründung des großen Siebs der Satz von Paley-Wiener über ganze Funktionen endlicher Ordnung zum Einsatz, obwohl es erheblich „elementarere“ Zugänge gibt).

Am Ende jedes Abschnitts folgen „Notes“ mit wohlbegründeten historischen Kommentaren und Hinweisen auf aktuelle Literatur. So wird der Leser über den Haupttext hinaus bis an die Forschung herangeführt. Besonders hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang auch die zahlreichen Aufgaben, die ebenfalls als Ergänzung des Haupttextes angesehen werden können. Freilich gehen viele dieser Aufgaben weit über das hinaus, was zur Zeit unter Übung verstanden wird. Lassen wir den Verfasser selbst sprechen[1]): ... *we have tried to break away from an unfortunate modern tendency by only proposing exercises which are soluble without excessive ingenuity or exceptional technical skill.* Gerade deshalb sind sie eine Fundgrube auch, aber nicht nur, für den Experten. Ein Band mit Lösungen soll in Kürze folgen.

Auf der hinteren Umschlagseite steht zu lesen: *We guarantee that this work will rapidly become a classic.* Dem ist nur noch hinzuzufügen, daß in diesem eindrucksvollen Buch nicht nur sehr viel zu finden ist, auch das Lesen darin ist ein Vergnügen.

Stuttgart J. Brüdern

[1]) aus dem Vorwort, S. xiii.

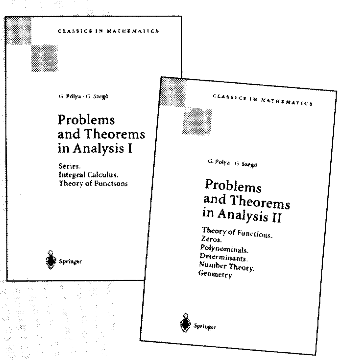
The class of '98

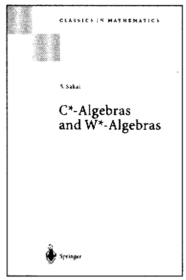
CLASSICS IN MATHEMATICS ∞ CIM

G. Pólya, G. Szegö
Problems and Theorems in Analysis I
Series. Integral Calculus. Theory of Functions.
1997. XII, 386 pp.
Softcover DM 68,-
ISBN 3-540-63640-4

G. Pólya, G. Szegö
Problems and Theorems in Analysis II
Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry
1997. XII, 320 pp.
Softcover DM 68,-
ISBN 3-540-63686-2

From the reviews:
"The work is one of the real classics of this century; it has had much influence on teaching, on research in several branches of hard analysis, particularly complex function theory, and it has been an essential indispensable source book for those seriously interested in mathematical problems. These volumes contain many extraordinary problems and sequences of problems, mostly from some time past, well worth attention today and tomorrow. Written in the early twenties by two young mathematicians of outstanding talent, taste, breadth, perception, perseverence, and pedagogical skill, this work broke new ground in the teaching of mathematics and how to do mathematical research.
Bulletin of the American Mathematical Society





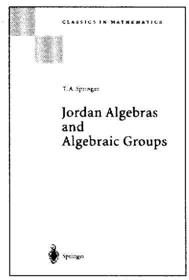
S. Sakai
C*-Algebras and W*-Algebras
1997. X, 256 pp.
Softcover DM 68,-
ISBN 3-540-63633-1

From the reviews:
"This book is an excellent and comprehensive survey of the theory of von Neumann algebras. It includes all the fundamental results of the subject, and is a valuable reference for both the beginner and the expert."
Math. Reviews

"The specialist in this and allied areas will find the wealth of recent results and new approaches throughout the text especially rewarding." *American Scientist*

"The title of this book at once suggests comparison with the two volumes of Dixmier and the fact that one can seriously make this comparison indicates that it is a far more substantial work that others on this subject which have recently appeared"
Bull. Lond. Math. Soc.

T.A. Springer
Jordan Algebras and Algebraic Groups
1997. VIII, 170 pp.
Softcover DM 68,-
ISBN 3-540-63632-3



From the reviews:
"...presents an important and novel approach to Jordan algebras. Springer's work will be of service to research workers familiar with linear algebraic groups who find they need to know something about Jordan algebras and will provide Jordan algebraists with new techniques and a new approach to finite-dimensional algebras over fields."
American Scientist

"By placing the classification of Jordan algebras in the perspective of classification of certain root systems, the book demonstrates that the structure theories associative, Lie, and Jordan algebras are not separate creations but rather instances of the one all-encompassing miracle of root systems. ..." *Math. Reviews*

Please order from
Springer-Verlag Berlin
Fax: + 49 / 30 / 8 27 87- 301
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

Prices subject to change without notice.
In EU countries the local VAT is effective.

Springer