E 20577 F
100. Band Heft 3
ausgegeben am 8.9.1998

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1998

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Sie sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH Stuttgart und Leipzig, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 7 89 01-0, Telefax (07 11) 7 89 01-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 100, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Bergmann, H. W. Knobloch: Hermann Schmidt 1902–1993
G. Burde, W. Schwarz: Wolfgang Franz zum Gedächtnis
G. Harder: Galoismoduln und Shimura-Varietäten
H. Karcher: Eingebettete Minimalflächen und ihre Riemannschen Flächen
J. Zabczyk: Infinite Dimensional Diffusions in Modelling and Analysis

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
100 (1998) 209–237
Mathematics Subject Classification: 62 G

Nichtparametrische Statistik: Aspekte ihrer Entwicklung 1957–1997

H. Witting, Freiburg

Unter dem Titel „Über nichtparametrische Methoden in der Mathematischen Statistik“ hat L. Schmetterer auf der Jahrestagung 1957 der DMV einen Übersichtsvortrag gehalten, dessen schriftliche Fassung [Sch59] in Band 61 des Jahresberichts erschienen ist. Rückblickend erweist sich dieser Zeitpunkt als sehr glücklich, ging doch Ende der fünfziger Jahre eine Periode zu Ende, in der – abgesehen von einigen ad hoc bewiesenen asymptotischen Resultaten verteilungstheoretischer Natur – finite Aussagen, etwa Rechtfertigungen intuitiv angegebener Verfahren durch Invarianz- und Suffizienzbetrachtungen, oder solche kombinatorischer Natur im Vordergrund standen. Seither wird das Gebiet zunehmend durch asymptotische Betrachtungsweisen[1] für unbeschränkt wachsenden Stichprobenumfang n geprägt. Bezeichnend ist eine Bemerkung am Ende von [Sch59]:

> „Zusatz bei der Korrektur (25.2.1959): Asymptotische Probleme erfreuen sich zunehmender Bedeutung. Vgl. etwa H. Chernoff und I.R. Savage: Ann.math.Statistics **29**, 972–994 (1958) und die dort angegebene Literatur.“

In der Tat war es diese Arbeit von Chernoff-Savage, die zusammen mit der mehr entscheidungstheoretisch orientierten Arbeit von Hájek [Haj62] sowie dem der Theorie der Rangtests gewidmeten Buch von Hájek-Šidák [HajS67] der nichtparametrischen Testtheorie entscheidende Impulse gegeben hat. Die in diesen verwendete, von Le Cam [LC60] entwickelte lokal asymptotische Betrachtungsweise hat später in [Haj70] zur Beantwortung der Frage nach einer unteren Schranke[2] für die Variabilität eines Schätzers in Form des (parametrischen) Faltungssatzes geführt, der zwischenzeitlich in verschiedener Form auf nichtparametrische Situationen verallgemeinert wurde [Mi85]. Die asymptotische Betrachtungsweise hat auch die Anregung zur Einführung neuer Teildisziplinen gegeben, etwa einer asymptotisch orientierten nichtparametrischen Theorie der Kurvenschätzungen.

Im folgenden soll anhand einfacher Fragestellungen in einem mittleren Abstraktheitsgrad ein Einblick in die Entwicklung der nichtparametrischen Statistik während der letzten 40 Jahre gegeben werden. Dabei werden in Teil 1 einige allgemei-

---

[1] In neuerer Zeit werden auch in der Statistik stochastischer Prozesse nichtparametrische Methoden verwendet, worauf hier jedoch nicht eingegangen werden soll; vgl. [Bo96].

[2] Zu dieser Fragestellung vgl. auch die in [KJ97] wieder abgedruckten Arbeiten von Hájek [Haj70] und Levit (1974) sowie die Einführungen zu diesen von R. Beran und J. Pfanzagl.

ne Gesichtpunkte sowie der Faltungssatz erläutert und in Teil 2 einige neuere Resultate aus verschiedenen Bereichen der Testtheorie vorgestellt; in Teil 3 wird auf das neu entstandene Gebiet der Dichte- und Regressionsschätzer eingegangen. Dabei können weder über den Faltungssatz hinausgehende Resultate der nicht- oder semiparametrischen Schätztheorie (die in Bickel et al. [BKRW93] eine moderne Darstellung gefunden hat) noch andere Teilgebiete der nichtparametrischen Statistik näher erörtert werden.

1 Allgemeine Gesichtspunkte

Nichtparametrische Modelle Unter einem nichtparametrischen Modell versteht man üblicherweise eines, das sich nicht in natürlicher Weise durch einen endlichdimensionalen Parameter beschreiben läßt [Sch59], d.h. ein Modell, bei dem die Klasse der zugelassenen Verteilungen nur durch Forderungen wie Stetigkeit, Glattheit, Unimodalität, Existenz von Dichten bzw. Momenten oder auch Lipschitz-Bedingungen eingeschränkt wird. Soweit sich Test- und Schätzprobleme nur auf bestimmte Charakteristika beziehen, hat man zu deren Formulierung auf dem Raum der zugelassenen Verteilungen – oder äquivalent ihrer Verteilungsfunktionen[3] (VF) F – geeignete Funktionale einzuführen. Beispiele für Lokationsfunktionale sind der *Median* und die *Quartilmitte*

$$(1) \qquad \gamma(F) = \operatorname{med} F := F^{-1}(1/2) \quad \text{bzw.} \quad \gamma(F) = \frac{1}{2}\left(F^{-1}(1/4) + F^{-1}(3/4)\right),$$

für Skalenfunktionale die *mittlere Abweichung* und der *Interquartilabstand*

$$(2) \qquad \gamma(F) = \int |x - \operatorname{med} F|\, dF(x) \quad \text{bzw.} \quad \gamma(F) = F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4).$$

Testprobleme lassen sich auch mit Hilfe von Ordnungen formulieren. Spezielle Ordnungen sind im Lokationsfall die *stochastische Ordnung* $\succeq_{\text{st}}$ und im Dispersionsfall mit festem Dispersionszentrum μ die *μ-Ordnung* $\succeq_\mu$:

$$(3) \qquad F_1 \succeq_{\text{st}} F_2 \quad :\Leftrightarrow \quad F_1(x) \le F_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(4) \qquad F_1 \succeq_\mu F_2 \quad :\Leftrightarrow \quad F_1(x) \ge F_2(x) \quad \forall x < \mu, \qquad F_1(x) \le F_2(x) \quad \forall x > \mu.$$

Semiparametrische Modelle Diverse Test- und Schätzprobleme erfordern spezielle Parametrisierungen. Ein einfaches Beispiel ist das *semiparametrische Loka-*

[3] Weitere Abkürzungen: $\mathfrak{F}_c$ für Menge der stetigen VF über $\mathbb{R}$; Φ für VF und u_α für α-Fraktil der Standard-Normalverteilung $\mathfrak{N}(0,1)$; $\mathfrak{N}(0,\mathcal{S})$ für mehrdimensionale Normalverteilung mit Kovarianzmatrix $\mathcal{S}$; $\lambda\!\!\lambda$ bzw. $\mathfrak{R}$ für Lebesgue-Maß über $\mathbb{R}$ bzw. $(0,1)$; $\mathfrak{R}(\alpha,\beta)$ für Gleichverteilung über (α,β); st.u. glv. ZG für stochastisch unabhängige gleichverteilte Zufallsgrößen; $\mathfrak{L}_F(X)$ für Verteilung der ZG X unter F; $X_n \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} X$ bzw. $\mathfrak{L}(X_n) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{L}(X)$ für Verteilungskonvergenz der ZG X_n gegen eine ZG X; $o_{u_n}(1)$ für X_n mit $u_n(|X_n|) > \delta) \to 0\, \forall \delta > 0$; $\mathbb{L}_2(F)$ bzw. $\mathbb{L}_2^0(F)$ für Menge der bzgl. F quadratintegrablen Funktionen bzw. Teilmenge der $f \in \mathbb{L}_2(F)$ mit $\int f dF = 0$; f.s. bzw. f.ü. für fast sicher bzw. fast überall; WS für Wahrscheinlichkeit; DQ für Dichtequotient; $\star$ für Faltungsprodukt und $\mathbb{R}^{k\times k}_{\text{p.d.}}$ bzw. $\mathbb{R}^{k\times k}_{\text{p.s.}}$ für Gesamtheit der positiv definiten bzw. positiv semidefiniten $k \times k$-Matrizen.

tionsmodell mit VF der Form $F(\cdot - \mu)$, wobei F eine nicht-spezifizierte, zumeist stetige VF (etwa mit Median 0) und $\mu \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Lokationsparameter ist. Ein weiteres Beispiel bilden *semiparametrische Lokations-Skalenmodelle.* Ihre Elemente werden durch VF der Form $F\left(\frac{\cdot-\mu}{\sigma}\right)$ beschrieben, wobei neben dem Lokationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und dem Skalenparameter $\sigma > 0$ auch die zumeist stetige VF (bis auf die Zugehörigkeit zu einer Klasse $\mathfrak{F}_0$ von VF) unbekannt ist. Für den insgesamt unendlich-dimensionalen Parameter gilt $(\mu, \sigma, F) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathfrak{F}_0$. Bei diesen beiden Beispielen läßt sich der „Parameter" zerlegen in einen endlich-dimensionalen Transformations- und einen unendlich-dimensionalen Gestaltsparameter. Allgemein spricht man von einem *semiparametrischen Modell,* wenn die Modellklasse $\mathfrak{F}$ durch eine endlich-dimensionale und eine hochdimensionale Größe parametrisiert wird. Hypothesen lassen sich dann mit dem ersten oder zweiten Anteil des „Parameters" formulieren. Ein bei vielen medizinischen und technischen Anwendungen verwendetes semiparametrisches Modell ist das *Regressionsmodell von Cox*[4] (1972). Bei diesem wird die Abhängigkeit der *Hazardfunktion* $\lambda(t) := f(t)/(1 - F(t))$ für eine Überlebenszeit T (mit Dichte f und VF F) in Abhängigkeit von einem Vektor z von Kovariaten angenommen in der Form $\lambda(t; z) = \exp(\beta^\top z)\lambda_0(t)$. Dabei entspricht die unbekannte Hazardfunktion $\lambda_0(t) = \lambda(t; 0)$ dem nichtparametrischen, $\exp(\beta^\top z)$ dem parametrischen Teil der Verteilungsannahme.

Datenbasen Grundbausteine von Statistiken nichtparametrischer Verfahren sind das *Ordnungstupel* V_n und das *Rangtupel* R_n. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $V_n(x) = (x_{n\uparrow 1}, \ldots, x_{n\uparrow n})$ definiert durch die Anordnung der Komponenten von x gemäß $x_{n\uparrow 1} \leq \ldots \leq x_{n\uparrow n}$. Sei $\mathfrak{X}' := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$. Dann gibt für $x \in \mathfrak{X}'$ die i-te Komponente von $R_n(x) = (R_{n1}(x), \ldots, R_{nn}(x))$ an, an welcher Stelle die Beobachtung x_i im geordneten Tupel steht. Es gilt also $x_i = x_{n\uparrow R_{ni}(x)}, i = 1, \ldots, n$. Die Bedeutung des Rangtupels ergibt sich daraus, daß es die Maximalinvariante gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Transformationen π des $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweise streng isotonen bijektiven Transformationen τ von $\mathbb{R}$ auf sich ist, die insbesondere das Testproblem (23), (24) invariant läßt.

Im folgenden sind häufig $X_1, \ldots, X_n$ st.u. ZG mit derselben VF $F \in \mathfrak{F}_c$. Dann gilt[5] $P(X \in \mathfrak{X}') = 1$ und R_n nimmt f.s. die Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_n$ mit derselben WS $1/n!$ an. Weiter sind R_n und V_n st.u. und die bedingte Verteilung von $X = (X_1, \ldots, X_n)$ bei gegebenem $V_n = v \in V_n(\mathfrak{X}')$ ist unabhängig von dem speziellen $F \in \mathfrak{F}_c$ die diskrete Gleichverteilung über den $n!$ Punkten πv, $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Folglich ist V_n *suffizient* für $F \in \mathfrak{F}_c$. V_n ist auch *vollständig* für $F \in \mathfrak{F}_c$, d.h. aus $E_F h(V_n) = 0 \; \forall F \in \mathfrak{F}_c$ folgt $h(v) = 0$ f.ü. Über die Eindeutigkeit eines erwartungstreuen Schätzers $g(V_n)$ für ein Funktional $\gamma(F)$ läßt sich so vielfach dessen Optimalität zeigen; vgl. etwa Satz 3 in [Sch59] oder [Le59]. Mit $V_n(x)$ äquivalent ist die *empirische* VF $\widehat{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[x_j,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Für diese gilt $E_F \widehat{F}_n(x) = F(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F(x)| \to 0$ f.s. Somit ist $\widehat{F}_n$ „der" kanonische Schätzer für F.

---

[4] Vgl. auch die in [KJ92] wieder abgedruckte Arbeit von Cox (1972) samt Einführung von Prentice. – Externe Variable werden in diesem Zusammenhang auch als *Kovariate* bezeichnet.

[5] Bei nicht-stetigem F sowie aufgrund beschränkter Meßgenauigkeit treten *Bindungen,* d.h. Beobachtungen x mit $x_i = x_j \; \exists i \neq j$, mit positiver WS auf; zu ihrer Behandlung vgl. [Be76].

Nichtparametrische Funktionale und ihre kanonischen Schätzer Ist γ ein *nichtparametrisches Funktional*, so heißt $\gamma(\widehat{F}_n)$ der *kanonische Schätzer* für $\gamma(F)$. Ist speziell $\gamma(F) = \int x dF(x)$ das *Mittelwertfunktional*, so ist $\gamma(\widehat{F}_n) = \int x d\widehat{F}_n(x) = n^{-1} \sum_{j=1}^n x_j =: \bar{x}_n$ das *Stichprobenmittel.* Von Bedeutung sind allgemeiner *V-Funktionale* (von Mises, 1947)

$$(5) \qquad \gamma(F) = \int \ldots \int \psi(x_1, \ldots, x_m) dF(x_1) \ldots dF(x_m)$$

mit o.E. symmetrischem Kern $\psi \in \mathbb{L}_1^{(m)}(F)$. An Stelle von $\gamma(\widehat{F}_n)$ wird hier zumeist der erwartungstreue Schätzer benutzt, wegen (5) also die *U-Statistik*

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} \sum \psi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}).$$

Viele nichtparametrische Statistiken lassen sich als (Funktionen mehrdimensionaler) U-Statistiken darstellen, was eine einfache Bestimmung ihrer Limesverteilungen ermöglicht (Hoeffding[6], 1948). *L-Funktionale*

$$(6) \qquad \gamma(F) = \int_0^1 h(F^{-1}(t)) d\nu(t)$$

sind häufig als Lokationsfunktionale interpretierbar. Mit $h = id$ und geeignetem diskreten Maß ν ergeben sich etwa z.B. die einleitend erwähnten Funktionale Median und Quartilmitte. Für $\nu = \Re(\alpha, 1-\alpha)$ und $0 \le \alpha < 1/2$ folgt das *α-getrimmte Mittel* $\gamma(F) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} F^{-1}(t) dt$, speziell für $\alpha = 0$ also der Mittelwert $\gamma(F) = \int_0^1 F^{-1}(t) dt = \int x dF(x)$. Ein Beispiel für ein L-Funktional, bei dem das Maß ν einen absolut stetigen und einen diskreten Anteil hat, ist das *α-Winsorisierte Mittel* $\gamma(F) = \int_\alpha^{1-\alpha} F^{-1}(t) dt + \alpha F^{-1}(\alpha) + \alpha F^{-1}(1-\alpha)$.

Die kanonischen Schätzer von (6), also die *L-Statistiken*

$$\gamma(\widehat{F}_n) = \int_0^1 h(\widehat{F}_n^{-1}(t)) d\nu(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj} h(X_{n\uparrow j}), \quad a_{nj} := \nu\Big(\Big(\tfrac{j-1}{n}, \tfrac{j}{n}\Big]\Big),$$

spielen ebenso in der *robusten Statistik* eine wichtige Rolle wie *M-Statistiken*, also die kanonischen Schätzer für *M-Funktionale* $\gamma(F)$ (Huber[7], 1964). Diese sind definiert als Lösungen t von Minimierungs- bzw. Nullstellenproblemen

$$\int \varrho(x,t) dF(x) = \min \quad \text{bzw.} \quad \int \psi(x,t) dF(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \psi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \varrho(x,t).$$

So ist z.B. der Median med F eine Lösung t von $\int |x-t| dF(x) = \min$, falls $id \in \mathbb{L}_1(F)$ (und im allgemeinen von $\int (|x-t| - |x|) dF(x) = \min$). Von Bedeutung sind weiter *R-Statistiken*; diese sind implizit über Rangstatistiken definiert.

Funktionale Grenzwertsätze Bei einem kanonischen Schätzer $\gamma(\widehat{F}_n)$ spiegelt $\widehat{F}_n$ die Abhängigkeit von den zugrundeliegenden Daten, $\gamma(\cdot)$ diejenige vom speziellen

[6] Vgl. auch die in [KJ91] wieder abgedruckte Arbeit von Hoeffding (1948) sowie die zugehörige Einführung von Sen, in der u.a. auch auf die *V-Statistiken* $\gamma(\widehat{F}_n)$ eingegangen wird.

[7] Vgl. die in [KJ92] wieder abgedruckte Arbeit von Huber samt Einführung von Hampel.

Problem wieder. Im Fall eines linearen Funktionals zerfällt also die Bestimmung der Limesverteilung von $\sqrt{n}(\gamma(\widehat{F}_n) - \gamma(F)) = \gamma(\sqrt{n}(\widehat{F}_n - F))$ in einen stochastischen und einen analytischen Anteil, nämlich in die Bestimmung der (geeignet präzisierten) Limesverteilung $\mathbf{F}$ von $\sqrt{n}(\widehat{F}_n - F)$ und in die der Verteilung von $\gamma(\mathbf{F})$ aufgrund derjenigen von $\mathbf{F}$. Die hierzu benötigten hochdimensionalen Verallgemeinerungen des zentralen Grenzwertsatzes werden als *funktionale Grenzwertsätze* (oder auch als *Invarianzprinzipien*) bezeichnet. Einfache, für die nichtparametrische Statistik wichtige Beispiele[8] sind bei st.u. ZG $X_j, j \in \mathbb{N}$, mit derselben VF F_0 die Verteilungskonvergenz des *empirischen Prozesses*

$$\mathbf{F}_n := \Big(\sqrt{n}\Big(\widehat{F}_n(z) - F_0(z)\Big),\ z \in \mathbb{R}\Big)$$

gegen einen Gauß-Prozeß $\mathbf{F}$ mit der Kovarianzfunktion $F_0(x) \wedge F_0(y) - F_0(x)F_0(y)$ und – falls F_0 eine positive Dichte f_0 besitzt – des (empirischen) *Quantilprozesses*

$$\mathbf{F}_n^- := \Big(\sqrt{n}\Big(\widehat{F}_n^{-1}(u) - F_0^{-1}(u)\Big),\ u \in (0,1)\Big)$$

gegen einen Gauß-Prozess $\mathbf{F}^-$ auf $(0,1)$ mit der Kovarianzfunktion

$$\big(F_0^{-1}(s) \wedge F_0^{-1}(t) - F_0^{-1}(s)F_0^{-1}(t)\big)/f\big(F_0^{-1}(s)\big)f\big(F_0^{-1}(t)\big).$$

Dieser *Ansatz von Doob* (1950) wurde durch die Bestimmung der Limesverteilung der Prüfgrößen einiger *Anpassungstests* zur Nullhypothese H: $F = F_0$ motiviert, die sich als Funktionale $\tau(\mathbf{F}_n)$ schreiben lassen, etwa von

$$\tau(\mathbf{F}_n) = \sqrt{n} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(z) - F_0(z)| \quad \text{oder} \quad \tau(\mathbf{F}_n) = n \int \Big(\widehat{F}_n(z) - F_0(z)\Big)^2 dF_0(z).$$

Auch hier liegt es nahe, die Limesverteilung von $\tau(\mathbf{F}_n)$ als Verteilung von $\tau(\mathbf{F})$ zu bestimmen. Man hat also zur Einbettung des Prozesses einen solchen Funktionenraum zu wählen, daß nicht nur $\mathbf{F}_n \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathbf{F}$ gilt, sondern auch $\tau(\mathbf{F}_n) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \tau(\mathbf{F})$ (was typischerweise bei stetigen Funktionalen τ der Fall ist).

Die Attraktivität des Doobschen Ansatzes hat dazu geführt, auf verschiedenen (normierten oder topologischen) Funktionenräumen eine Verteilungskonvergenz zu erklären und die obige Vorgehensweise zu rechtfertigen. Genannt seien hier der Raum $\mathbb{C}[0,1]$ mit der sup-Norm [Bil68], der Raum $\mathbb{D}[0,1]$ mit der Skorokhod-Topologie [Bil68] oder der sup-Norm, sofern sich das Limesmaß auf eine separable Teilmenge konzentriert [Pol84], sowie eine auf äußeren Maßen aufbauende und somit keine Meßbarkeitsvoraussetzungen benötigende Theorie von Hoffmann-Jørgensen (1984) und Dudley (1985); vgl. auch [BKRW93].

Weitere Anwendungen beziehen sich etwa auf Statistiken T_n, die sich als lineare Funktionale $\gamma(\widehat{F}_n)$ oder $\gamma(\widehat{F}_n^{-1})$ darstellen lassen. So kann man z.B. die L-Statistiken mit $h = id$ und *gemittelten Gewichten* $a_{nj} = n \int_{(j-1)/n}^{j/n} a(u)du$ zu einer Gewichtsfunktion $a \in \mathbb{L}_1^0(\Re)$ darstellen als Funktional $T_n = \gamma(\widehat{F}_n^{-1})$ mit

[8] Weiter von Bedeutung sind z.B. Rang- und Partialsummenprozesse [ShW86] oder die zur Gewinnung von Konfidenzbändern in Teil 2 bzw. 3 erforderlichen Prozeßapproximationen des Kaplan-Meier- bzw. Regressionskurven-Schätzers.

$\gamma(F^{-1}) = \int_0^1 a(u)F^{-1}(u)du$. Wegen der Linearität und Stetigkeit von γ gilt $\sqrt{n}\Big(\gamma(\widehat{F}_n^{-1}) - \gamma(F^{-1})\Big) = \gamma(\mathbf{F}_n^-) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \gamma(\mathbf{F}^-)$.

Limesverteilungen nichtparametrischer Statistiken Für nichtlineare Funktionale γ wird man den Doobschen Ansatz nach Linearisierung anzuwenden versuchen. Ist γ'_F eine geeignet erklärte Ableitung, so hat man hierzu bei einer Statistik $\gamma(\widehat{F}_n)$ die Schlußweise $\sqrt{n}\Big(\gamma(\widehat{F}_n) - \gamma(F)\Big) \approx \gamma'_F(\mathbf{F}_n) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \gamma'_F(\mathbf{F})$ bzw. im Fall $\gamma(\widehat{F}_n^{-1})$ die entsprechende Beziehung zu präzisieren. Dabei sind $\gamma'_F(\mathbf{F})$ und $\gamma'_F(\mathbf{F}^-)$ als lineare Funktionale von Gauß-Prozessen normalverteilt. In diesem Zusammenhang sind eine Reihe von Techniken entwickelt worden, z.B.:

1) *Differentiationsansätze im strengen Sinne*, bei denen etwa $\gamma(\widehat{F}_n) - \gamma(F)$ durch ein Fréchet- oder Hadamard-Differential approximiert wird;
2) *Differentiationsansätze im weiteren Sinne*, bei denen etwa Bewertungs- oder Gewichtsfunktionen im elementaren Sinne differenziert werden, um zu einer in st.u. ZG linearen oder quadratischen Vergleichsstatistik zu kommen, z.T. gekoppelt mit verteilungsgleichen Ersetzungen; vgl. [ChS58] und [ShW86];
3) *Projektionsmethode*, bei der $T_n - E_F T_n$ mit der (linearen) $\mathbb{L}_2(F)$-Projektion $\sum_{j=1}^n (E_F(T_n|X_j) - E_F T_n)$ verglichen wird. Die Anwendbarkeit setzt voraus, daß sich für $\mathrm{Var}_F T_n$ handhabbare Ausdrücke finden lassen. Bei $T_n = \gamma(\widehat{F}_n)$ ist noch die Verzerrung $E_F\gamma(\widehat{F}_n) - \gamma(F)$ zu berücksichtigen; vgl. [ShW86];
4) *Pyke-Shorack-Methode*, bei der eine Folge von Rangstatistiken T_n als stetiges Funktional eines Rangprozesses geschrieben wird, dessen Konvergenz dann zu zeigen ist; vgl. [ShW86].

Eine andersartige häufig angewendete Approximationsmethode ist das **Bootstrap** Ist $\mathbf{X}_n$ ein n-Tupel von st.u. ZG $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ zu einer (unbekannten) VF F, so ist die empirische VF $\widehat{F}_n$ – zumindest für große n – ein guter Schätzer von F. Es ist deshalb plausibel, daß sich etwa Größen $R(\mathbf{X}_n, F)$ vielfach asymptotisch durch $R(\mathbf{X}_n^*, \widehat{F}_n)$ ersetzen lassen, wenn $\mathbf{X}_n^*$ ein n-Tupel von st.u. ZG $X_{n1}^*, \dots, X_{nn}^*$ zur (bekannten) VF $\widehat{F}_n$ ist. Genauer läßt sich vielfach zeigen, daß für fast alle Realisierungen von $\mathbf{X}_n$ der Limes der bedingten Verteilung von $R(\mathbf{X}_n^*, \widehat{F}_n)$ bei gegebenem $\mathbf{X}_n$ (*Bootstrap-Verteilung*) gleich der Limesverteilung von $R(\mathbf{X}_n, F)$ ist[9]. Ist allgemeiner $\widetilde{F}_n$ irgendein Schätzer von F (auch unter einer allgemeineren Verteilungsannahme) und $L(F) := \mathfrak{L}_F(R(\mathbf{X}_n, F))$, so bezeichnet man $L(\widetilde{F}_n)$ als *Bootstrap-Schätzer* von $L(F)$. Wegen ihrer Berechenbarkeit läßt sich die Bootstrap-Verteilung bei den verschiedensten Fragestellungen anwenden. Ist etwa $\gamma(\cdot)$ ein reellwertiges Funktional und $R(\mathbf{X}_n, F) := \gamma(\widehat{F}_n) - \gamma(F)$, so läßt sich mit dem $\alpha/2$- und $(1-\alpha/2)$-Fraktil von $L(\widehat{F}_n)$ ein *Bootstrap-Konfidenzintervall* zum Niveau $1-\alpha$ gewinnen[10].

Asymptotische Entwicklungen und Berry-Esseen-Schranke Wie bei Summen st.u. glv. ZG interessiert auch bei (standardisierten) nichtparametrischen Statistiken nicht nur die asympotische Normalität, also die Gültigkeit von

$$(7) \qquad F_n(x) \to \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

---

[9] Zu diesbzgl. Sätzen vgl. etwa [Mm92] und die dort zitierte Literatur sowie die in [KJ92] wieder abgedruckte grundlegende Arbeit von B. Efron (1979) samt Einführung von R. Beran.
[10] Vgl. hierzu die in [KJ97] wieder abgedruckte Arbeit [Ha88] von P. Hall samt Einführung von E. Mammen sowie etwa [HdMm93].

sondern auch die Approximationsgüte, zum einen eine *Berry-Esseen-Schranke*

$$(8) \qquad \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq Cn^{-1/2}$$

mit geeignetem $C > 0$, zum anderen eine *Edgeworth-Entwicklung*

$$(9) \qquad G_n(x) = \Phi(x) - \frac{\kappa}{6n^{1/2}} \Phi'(x)(x^2 - 1)$$

mit geeignetem $\kappa \in \mathbb{R}$, d.h. ein *asymptotisches Resultat zweiter Ordnung*

$$(10) \qquad \sup_x |F_n(x) - G_n(x)| = O(n^{-1}).$$

Berry-Esseen-Schranken sind mehr von theoretischem als numerischem Interesse; Edgeworth-Approximationen, auch solche mit einem weiteren Korrekturterm der Ordnung $O(n^{-1})$, stellen häufig nützliche Approximationen von $F_n(x)$ dar.

Eine Berry-Esseen-Schranke und eine Edgeworth-Entwicklung mit Restterm $O(n^{-1})$ wurden für *symmetrische* $\mathbb{L}_2$-*Statistiken* in [vZ84] bzw. [BGvZ97] hergeleitet. Beide Arbeiten beruhen auf der *Hoeffding-Zerlegung* für derartige Statistiken

$$(11) \qquad T_n - ET_n = T_n^{(1)} + T_n^{(2)} + \dots,$$

wobei $T_n^{(1)}, T_n^{(2)}, \dots$ unkorrelierte U-Statistiken der Ordnung $1, 2, \dots$ sind und

$$T_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} [E(T_n|X_i) - ET_n]$$

eine Summe st.u. glv. Summanden ist. In beiden Arbeiten sind Wachstumsbedingungen an die 3. Momente von $E(T_n|X_1)$ erforderlich, sowie solche an die höheren Momente, durch die der Einfluß der weiteren Terme kontrolliert wird.

Asymptotische Entwicklungen sind ein Hilfsmittel zur Unterscheidung zwischen asymptotisch äquivalenten Verfahren. Von besonderem Interesse ist diese Unterscheidung bei asymptotisch effizienten Verfahren. In diesem Fall zeigt sich unter relativ allgemeinen Bedingungen, daß dann nicht nur die Limesverteilungen, also die n^0-Terme, sondern auch die $n^{-1/2}$-Terme der Edgeworth-Entwicklung übereinstimmen [Pf79]. Zur Unterscheidung ist somit eine Analyse der nächsthöheren Terme erforderlich. Typischerweise sind dies diejenigen von der Ordnung n^{-1}. Deren Faktor entspricht dann der *Defizienz* [HL70], d.h. der Anzahl der zur Erzielung derselben Wirksamkeit zusätzlich benötigten Beobachtungen. So erwies sich aufgrund der in [ABvZ76] und [BvZ78] angegebenen asymptotischen Entwicklungen der Gütefunktionen linearer Rang- und Permutationstests die Defizienz des (auf Normalverteilungssituationen zugeschnittenen) Fisher-Yates-Tests im Vergleich zum t-Test unter Normalverteilungsalternativen als ∞ (mit der Konvergenzordnung $\log \log n$), die des Pitman-Permutationstests im Vergleich zum t-Test dagegen als 0 [Bi74].

Lokal asymptotische Betrachtungsweisen Die Idee dieses von Le Cam [LC60] in die asymptotische Statistik eingeführten Beweiskonzepts besteht darin, durch eine geeignete Lokalisierung aus der gegebenen Verteilungsklasse zu einer solchen zu kommen, die sich durch ein einfacher behandelbares Limesmodell approximieren läßt. Betrachtet werde das in Teil 2 benötigte (parametrische) Problem einer „*Regres-*

sion im Parameterraum" bei Produktmaßen, deren Randverteilungen aus einer k-parametrigen Klasse $\mathfrak{F} = \{F_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ seien. Zur Lokalisierung in der Umgebung einer Verteilung $F_\vartheta^{(n)}, \vartheta \in \mathring{\Theta}$, seien Regressionskoeffizienten $c_{nj}, j = 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}$, gegeben, die der *Noether-Bedingung*[11]

$$(12) \qquad \max_{1 \le j \le n} c_{nj}^2 \to 0, \sum_{j=1}^{n} c_{nj}^2 \to 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

genügen. Mit einem *lokalen Parameter* $\zeta \in \mathbb{R}^k$ lauten dann die *lokalisierten Verteilungen*[12] $w_{n\zeta} := \otimes_{j=1}^n F_{\vartheta + \zeta c_{nj}}$. Ist nun $\mathfrak{F}$ in ϑ $\mathbb{L}_2$-differenzierbar mit Ableitung $\dot{L}_\vartheta \in \mathbb{R}^k$ und *Informationsmatrix* $\mathcal{J}_\vartheta := E_\vartheta \dot{L}_\vartheta \dot{L}_\vartheta^\top \in \mathbb{R}_{\text{p.s.}}^{k \times k}$, so lassen sich die $w_{n\zeta}$ asymptotisch für $n \to \infty$ in ζ linearisieren. Hierzu seien $Z_{n\vartheta} := \sum_{j=1}^n c_{nj} \dot{L}_\vartheta(X_{nj})$ die *zentrale Statistik* und $L_{n\zeta} := dw_{n\zeta}/dw_{n0}$ der DQ. Dann folgt nach dem *2. Le Cam Lemma*[13] bzw. dem zentralen Grenzwertsatz

$$(13) \qquad \log L_{n\zeta} = \zeta^\top Z_{n\vartheta} - \frac{1}{2} \zeta^\top \mathcal{J}_\vartheta \zeta + o_{w_{n0}}(1),$$

$$(14) \qquad \mathfrak{L}_{w_{n0}}(Z_{n\vartheta}) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(0, \mathcal{J}_\vartheta)$$

und somit

$$(15) \qquad \mathfrak{L}_{w_{n0}}(\log L_{n\zeta}) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(-\kappa^2/2, \kappa^2), \quad \kappa^2 := \zeta^\top \mathcal{J}_\vartheta \zeta.$$

Damit ist nach dem *1. Le Cam Lemma* $(w_{n\zeta})$ für jedes feste $\zeta \in \mathbb{R}^k$ zu (w_{n0}) *benachbart*, d.h. *asymptotisch dominiert* im Sinne von

$$(16) \qquad w_{n0}(B_n) \to 0 \quad \Rightarrow \quad w_{n\zeta}(B_n) \to 0.$$

Aus dem *3. Le Cam Lemma* folgt weiter für jedes feste $\zeta \in \mathbb{R}^k$

$$(17) \qquad \mathfrak{L}_{w_{n\zeta}}(Z_{n\vartheta}) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(\mathcal{J}_\vartheta \zeta, \mathcal{J}_\vartheta).$$

Als Limesmodell ergibt sich also die Klasse der Normalverteilungen $\mathfrak{N}(\mathcal{J}_\vartheta \zeta, \mathcal{J}_\vartheta)$, deren Kovarianzmatrix $\mathcal{J}_\vartheta$ nur von der Klasse $\mathfrak{F}$ und dem Lokalisierungszentrum ϑ abhängt, also bekannt ist, und deren Mittelwerte linear von ζ abhängen. In derartigen Modellen lassen sich viele Schätz- und Testprobleme explizit lösen. Da der DQ $d\mathfrak{N}(\mathcal{J}_\vartheta \zeta, \mathcal{J}_\vartheta)/d\mathfrak{N}(0, \mathcal{J}_\vartheta)$ bei $|\mathcal{J}_\vartheta| \neq 0$ gerade die Dichte einer $\mathfrak{N}(\zeta, \mathcal{J}_\vartheta^{-1})$- bzgl. einer $\mathfrak{N}(0, \mathcal{J}_\vartheta^{-1})$-Verteilung ist, nennt man Klassen $\{w_{n\zeta} : \zeta \in \mathbb{R}^k\}$ mit (13) und (14) auch *lokal asymptotisch normal in $Z_{n\vartheta}$ und $\mathcal{J}_\vartheta$* oder kurz LAN.

Faltungssatz Liegen st.u. ZG $X_j, j \in \mathbb{N}$, mit derselben Verteilung F zugrunde, die aus einer Klasse $\mathfrak{F} = \{F_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, mit Informationsmatrix

[11] Benannt nach Gottfried Noether, einem Neffen von Emmy Noether. – Die Gültigkeit dieser Bedingung sei fortan vorausgesetzt. Die Zweistichprobenstatistiken (26), (27) und (29) sind demgemäß für asymptotische Überlegungen mit $\sqrt{n_1 n_2/(n_1 + n_2)}$ zu multiplizieren.

[12] Dies sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die gemeinsamen Verteilungen von st. u. gemäß $F_{\vartheta + \zeta c_{nj}}$-verteilten ZG $X_{nj}, j = 1, \dots, n$.

[13] Die Bezeichnungen 1., 2. und 3. Le Cam-Lemma gehen auf [Haj62] zurück. Entsprechende Aussagen lassen sich auch unter schwächeren Voraussetzungen formulieren, vgl. etwa [WMF95].

$\mathcal{J}_\vartheta \in \mathbb{R}^{k\times k}_{\text{p.d.}}$ stammt, so sind viele Schätzer $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ für ϑ *asymptotisch normal*, genauer: es existiert eine Matrix $\mathcal{S}_\vartheta \in \mathbb{R}^{k\times k}_{\text{p.s.}}$ mit

(18) $\quad \mathfrak{L}_\vartheta(\sqrt{n}(T_n - \vartheta)) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(0, \mathcal{S}_\vartheta).$

Andererseits gilt für den Maximum-Likelihood-(ML-)Schätzer $\widehat{\vartheta}_n$

(19) $\quad \mathfrak{L}_\vartheta(\sqrt{n}(\widehat{\vartheta}_n - \vartheta)) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(0, \mathcal{J}_\vartheta^{-1}).$

Nach einer Vermutung[14] von R.A. Fisher (1925) ist der ML-Schätzer unter allen Schätzern mit (18) *asymptotisch effizient* in dem Sinne, daß – zumindest für alle hinreichend regulären Verteilungsklassen – im Sinne der Loewner-Ordnung gilt

(20) $\quad \mathcal{S}_\vartheta \succeq \mathcal{J}_\vartheta^{-1}.$

Ein von Hodges (1953) angegebenes Beispiel zeigte jedoch, daß selbst in der „schönsten" aller Verteilungsklassen $\mathfrak{F}$, nämlich derjenigen mit $F_\vartheta = \mathfrak{N}(\vartheta, 1)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, die untere Schranke für die Variabilität, die *„Informationsschranke"* $\mathcal{J}_\vartheta^{-1}$, zumindest in einzelnen Punkten unterschritten werden kann[15]. Zwar konnten Le Cam (1953) und Bahadur (1964) zeigen, daß eine derartige *Supereffizienz* höchstens in Punkten einer $\lambda\!\!\setminus^k$-Nullmenge auftreten kann; mehrere Versuche, auch diese Nullmenge durch Bedingungen an die Folge (T_n) ausschließen zu können, führten schließlich in [Haj70] zu der Beschränkung auf *reguläre Schätzerfolgen*, d.h. auf Folgen (T_n), für die unter allen Folgen $(\vartheta_n) = (\vartheta + \zeta n^{-1/2})$ mit einer von $\zeta \in \mathbb{R}^k$ unabhängigen Limesverteilung G_ϑ gilt

(21) $\quad \mathfrak{L}_{\vartheta_n}(\sqrt{n}(T_n - \vartheta_n)) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} G_\vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathring{\Theta}.$

In LAN-Modellen gilt nämlich für reguläre Schätzer (T_n) nach Hájek [Haj70] der *Faltungssatz*, d.h. die Aussage, daß es stets eine Verteilung H_ϑ gibt mit

(22) $\quad \mathfrak{L}_\vartheta(\sqrt{n}(T_n - \vartheta)) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(0, \mathcal{J}_\vartheta^{-1}) * H_\vartheta.$

Die Limesverteilung ist also mindestens so gespreizt wie die $\mathfrak{N}(0, \mathcal{J}_\vartheta^{-1})$-Verteilung, so daß sich diese als verallgemeinerte Informationsschranke auffassen läßt.

Auch die (im Anschluß an [Haj70] bewiesenen) nichtparametrischen Faltungssätze beruhen auf zwei Voraussetzungen, nämlich den geeignet verallgemeinerten Konzepten der LAN-Eigenschaft einer Verteilungsklasse und der Regularität einer Schätzerfolge. Hinsichtlich deren genauen Formulierungen muß auf die Literatur verwiesen werden, z.B. auf Levit [Lev78], Millar [Mi85] sowie auf verschiedene semiparametrische Formulierungen in [BKRW93]. Eine Hilbert-Raum-Version des Faltungssatzes ist u.a. enthalten in [vdVW96]. Abstrakte Versionen finden sich bei Le Cam [LC72] und Millar (1983).

---

[14] Diese wird auch nahegelegt durch die für festes $n \in \mathbb{N}$ und T_n mit $E_\vartheta T_n = \vartheta \ \forall \vartheta \in \Theta$ unter Regularitätsvoraussetzungen gültige *Cramér-Rao-Ungleichung* $E_\vartheta(T_n - \vartheta)(T_n - \vartheta)^\top \succeq \mathcal{J}_\vartheta^{-1}$.

[15] Der ML-Schätzer ist in diesem Fall $\widehat{\vartheta}_n(x) = \bar{x}_n := n^{-1} \sum_{j=1}^n x_j$. Man setze nun etwa $T_n = \bar{x}_n \mathbf{1}(|\bar{x}_n| > n^{-1/4}) + \frac{1}{2}\bar{x}_n \mathbf{1}(|\bar{x}_n| \le n^{-1/4})$. Dann gilt (18) für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}$ und die Informationsschranke wird in $\vartheta \neq 0$ angenommen, in $\vartheta = 0$ dagegen unterschritten.

2 Nichtparametrische Testtheorie

Reduktion auf (bedingt) verteilungsfreie Tests Typischerweise hängen die Verteilungen F des *Randes* J der Hypothesen eines Testproblems noch von einem *nuisance functional*[16] $\nu(F)$ ab, das eine von $F \in \mathrm{J}$ unabhängige Festlegung des kritischen Werts zu einer vorgegebenen Prüfgröße verhindert. Zu dessen Elimination gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, die sich – je nach Natur des jeweiligen Problems – einzeln oder in Kombination hierfür eignen. Demgemäß gibt es drei unterschiedliche Typen nichtparametrischer Tests:

a) *Permutationstests* bei Vorliegen einer für $F \in \mathrm{J}$ suffizienten und vollständigen Statistik V. Dann ist nämlich definitionsgemäß die bedingte Verteilung von X bei gegebenem $V = v$ unabhängig von $F \in \mathrm{J}$ wählbar. Da bei nichtparametrischen Testproblemen typischerweise V aus X durch eine Permutation der Komponenten hervorgeht, besteht der bedingte Test darin, das beobachtete x mit den aus diesem durch geeignete Permutation der Komponenten entstandenen x' zu vergleichen.
b) *Rangtests*, falls die Maximalinvariante M der größten Gruppe, die das Testproblem invariant läßt, auf J finit verteilungsfrei ist. Da bei nichtparametrischen Testproblemen M typischerweise ein Rangtupel ist, besteht die Reduktion durch Invarianz in diesem Fall aus einer solchen auf Rangtests.
c) *Bedingte Rangtests*, falls die Maximalinvariante M der größten Gruppe, die das Testproblem invariant läßt, auf J nicht verteilungsfrei ist, und es für den verbleibenden Nebenparameter $\nu(F)$ eine suffiziente und vollständige Statistik W gibt, so daß $\nu(F)$ durch Bedingen bzgl. W eliminiert werden kann.

Permutationstests Erläuternd betrachten wir zwei Testprobleme mit den ZG

(23) $\quad X_1, \ldots, X_n \text{ st.u.}, \quad \mathfrak{L}(X_j) = F_1 \text{ für } j \le n_1, \quad \mathfrak{L}(X_j) = F_2 \text{ für } j > n_1,$

also der Modellannahme $\mathfrak{P} = \left\{F_1^{(n_1)} \otimes F_2^{(n_2)} : F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_c\right\}$, und zwar das *Zweistichproben-Lokationsproblem* $\mathcal{L}$ mit den Hypothesen[17]

(24) $\quad \mathrm{H} : F_1 \preceq_{\mathrm{st}} F_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{K} : F_1 \succeq_{\mathrm{st}} F_2 \quad \text{mit} \quad F_1 \neq F_2$

sowie das *Zweistichproben-Dispersionproblem* $\mathcal{D}(\mu)$ mit bekanntem Dispersionszentrum $\mu \in \mathbb{R}$, also unter der Modellannahme (23) die Hypothesen[18]

(25) $\quad \mathrm{H} : F_1 \preceq_{\mu} F_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{K} : F_1 \succeq_{\mu} F_2 \quad \text{mit} \quad F_1 \neq F_2.$

Bei beiden Testproblemen ist $\mathrm{J} : F_1 = F_2$, also $\mathfrak{P}_\mathrm{J} = \{F^{(n)} : F \in \mathfrak{F}_c\}$. Da $V_n(x) = x_{n\uparrow}$ suffizient und vollständig ist für $F \in \mathrm{J}$, sind für beide Probleme die bedingten Tests Permutationstests bei gegebenem $x_{n\uparrow}$, etwa mit (in den bewerteten Beobachtungen) *linearen Prüfgrößen*

[16] Beim Testen von $\mathrm{H} : \gamma(F) \le 0$ gegen $\mathrm{K} : \gamma(F) > 0$ denke man sich F zerlegt in $\gamma(F)$ und $\nu(F)$. Dann verbleibt auf dem Rand $\overline{\mathrm{H}} \cap \overline{\mathrm{K}} : \gamma(F) = 0$ noch das „nuisance functional" $\nu(F)$.

[17] Im Fall eines Lokationsmodells mit den VF $F_i(\cdot) = F(\frac{\cdot - \mu_i}{\sigma})$, $i = 1, 2$, und bekanntem $\sigma^2 > 0$ reduzieren sich die Hypothesen auf $\mathrm{H} : \mu_1 \le \mu_2$ gegen $\mathrm{K} : \mu_1 > \mu_2$.

[18] Im Fall eines Skalenmodells mit den VF $F_i(\cdot) = F(\frac{\cdot - \mu}{\sigma_i})$, $i = 1, 2$, und bekanntem μ reduzieren sich diese Hypothesen auf $\mathrm{H} : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ gegen $\mathrm{K} : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

(26) $$S_n^g = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} g(X_j) - \frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n} g(X_j) =: \sum_{j=1}^{n} c_{nj} g(X_j).$$

Die Bewertungsfunktion g hat im Fall $\mathcal{L}$ isoton, im Fall $\mathcal{D}(\mu)$ *μ-monoton*, d.h. $g|_{(-\infty,\mu)}$ antiton und $g|_{(\mu,\infty)}$ isoton, zu sein. Dieses ist in beiden Problemen bei $g \in \mathbb{L}_2^0(F)$ gerade die Gesamtheit aller Prüfgrößen von in $F \in$ J lokal asymptotisch besten Tests, die über H niveautreu und über K unverfälscht sind [BMFW92]. Ein Beispiel im Fall $\mathcal{L}$ ist für $g = id$ der Pitman-Test[19].

Lineare Rangtests Im Lokationsproblem $\mathcal{L}$ sind das Rangtupel R_n und damit z.B. die *linearen Rangstatistiken*

(27) $$T_n^b = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} b_{nR_{nj}} - \frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n} b_{nR_{nj}} =: \sum_{j=1}^{n} c_{nj} b_{nR_{nj}}$$

bei vorgegebenen Bewertungen $b_{n1}, \ldots, b_{nn}$ auf J verteilungsfrei, da unter den Verteilungen $F^{(n)}$ das Rangtupel $R_n = (R_{n1}, \ldots, R_{nn})$ alle $n!$ möglichen Werte $\pi \in \mathfrak{S}_n$ mit der gleichen WS annimmt. Von besonderer Bedeutung sind lineare Rangstatistiken (27) mit exakten Bewertungen[20]. Dies zeigt sich bereits daran, daß diese mit $b = g \circ F^{-1}$ aus den linearen Statistiken (26) durch $\mathbb{L}_2(F)$-Projektion auf den Raum der Rangstatistiken hervorgehen [HajS67].

(27) ist die Prüfgröße eines niveautreuen und unverfälschten Tests für das Problem $\mathcal{L}$, falls $b_{n1} \leq \ldots \leq b_{nn}$ gilt, was bei einer isotonen Funktion b sowohl für die exakten wie für die approximativen Bewertungen der Fall ist. Beispiele sind etwa der Fisher-Yates- und der van der Waerden-Test mit den exakten bzw. approximativen Bewertungen zu $b = \Phi^{-1}$ sowie der Wilcoxon-Test zu $b = id$.

Bedingte Rangtests Auch für das Dispersionsproblem $\mathcal{D}(\mu)$ ist das Rangtupel R_n auf J verteilungsfrei. Deshalb wurden auch bei diesen Hypothesen zunächst lineare Rangstatistiken (27) als Prüfgrößen genommen [HajS67], wobei nur die auf das Problem $\mathcal{L}$ zugeschnittene Bedingung $b_{n1} \leq \ldots \leq b_{nn}$ ersetzt wurde durch die bei Streuungsproblemen adäquate Bedingung

(28) $$b_{n1} \geq \ldots \geq b_{nv}, b_{n,v+1} \leq \ldots \leq b_{nn}$$

mit $v = [(n+1)/2]$. Obwohl diese Bedingung etwa bei den Tests von Capon (1961) und Klotz (1964) mit den exakten bzw. approximativen Bewertungen zur Funktion $b = \left(\Phi^{-1}\right)^2 - 1$ oder bei dem Test von Ansari-Bradley (1960) mit den Bewertungen $b_{nj} = 2\left|2\frac{j}{n+1} - 1\right| - 1$ erfüllt ist, sind diese Tests für die Hypothesen (25) weder ni-

[19] Im Gegensatz zu Rangtests machen Permutationstests vollen Gebrauch von den Daten (und nicht nur von den Rangzahlen). Sie sind damit zwar rechenintensiver (was jedoch bei der Leistungsfähigkeit heutiger Rechenanlagen nur noch wenig ins Gewicht fällt), zugleich aber in Situationen, in denen es auf größtmögliche Genauigkeit ankommt, von großer Bedeutung.

[20] Mit *exakten Bewertungen* zur Stufe n zu einer Funktion $b \in \mathbb{L}_1(\mathfrak{R})$ bezeichnet man die Größen $b_{nj} = Eb(U_{n\uparrow j}), j = 1, \ldots, n$, wenn $U_{n\uparrow 1}, \ldots, U_{n\uparrow n}$ die Ordnungsstatistiken zu st.u. $\mathfrak{R}(0,1)$-verteilten ZG $U_1, \ldots, U_n$ sind. Wegen $E\, U_{n\uparrow j} = j/(n+1)$ sind diese (zumindest für mittlere Werte von j und stetiges b) näherungsweise gleich den numerisch leichter bestimmbaren *approximativen Bewertungen* $b(j/(n+1))$.

veautreu noch unverfälscht [Bur93]. Eine Erklärung ergibt sich daraus, daß das Testproblem $\mathcal{D}(\mu)$ nicht wie das Testproblem $\mathcal{L}$ invariant ist gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$, sondern nur gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{G}(\mu)$ von $\mathfrak{G}$, für deren Elemente gilt $\tau(\mu) = \mu$. Folglich ist nicht R_n, sondern das Tupel $M_n = (R_n, W_n)$ maximalinvariant, wobei W_n die Anzahl der Beobachtungen X_i mit $X_i \leq \mu$ ist. Rangtests $\psi_n(R_n)$ wie diejenigen von Capon, Klotz und Ansari-Bradley sind zwar invariant und verteilungsfrei, nützen aber nicht die gesamte relevante Information aus. Andererseits sind Tests der Form $\psi_n(R_n, W_n)$ im allgemeinen nicht auf J verteilungsfrei, da die Verteilung von W_n noch von dem unbekannten Parameter $\nu = P(X_1 \leq \mu)$ abhängt. Dieser läßt sich aber leicht durch Bedingen hinsichtlich $W_n = v$ eliminieren. Adäquat für das Problem $\mathcal{D}(\mu)$ sind also *bedingte Rangtests*, d.h. solche mit Prüfgrößen der Form

$$T_n^b(W_n) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} b_{nR_{nj}}(W_n) - \frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n} b_{nR_{nj}}(W_n) =: \sum_{j=1}^{n} c_{nj} b_{nR_{nj}}(W_n). \tag{29}$$

Diese sind für $\vartheta \in$ J *bedingt verteilungsfrei*, genauer bei gegebenem $W_n = v$ bedingt verteilungsgleich einer linearen Rangstatistik (27) mit den *bedingten Bewertungen* $b_{nj}(v)$, $v = 0, \ldots, n$. Genügen diese für jedes v der Bedingung

$$b_{n1}(v) \geq \ldots \geq b_{nv}(v), \quad b_{n,v+1}(v) \leq \ldots \leq b_{nn}(v) \qquad \forall v = 0, \ldots, n, \tag{30}$$

so ist (29) die Prüfgröße eines niveautreuen, unverfälschten Tests für die Hypothesen (25) [Bur93]. Beispiele sind etwa der *bedingte Capon-Test mit den exakten bedingten Bewertungen* $b_{nj}^{\kappa}(v)$ *zu* $b = (\Phi^{-1})^2 - 1$ *und* $\kappa = 1/2$,

$$b_{nj}^{\kappa}(v) = Eb\big(\kappa U_{v\uparrow j}\big) \quad \text{bzw.} \quad b_{nj}^{\kappa}(v) = Eb\big(\kappa + (1-\kappa) U_{n-v\uparrow j-v}\big) \tag{31}$$

für $j \leq v$ bzw. $j > v$, der mit den entsprechenden approximativen Bewertungen gebildete bedingte Klotz-Test oder der bedingte Ansari-Bradley-Test.

Lokal asymptotische Optimalität von Rangtests Hoeffding (1951) hatte im wesentlichen gezeigt, daß sich ein linearer Rangtest φ_n^b mit exakten Bewertungen für festes $n \in \mathbb{N}$ als *lokal optimaler Rangtest* längs einer einparametrigen Verteilungsklasse[21] $\mathfrak{F}_1$ kennzeichnen läßt, die im Schnittpunkt F mit dem Rand J $\mathbb{L}_1$-differenzierbar ist mit Ableitung $b \circ F$. Unter Verwendung der in Teil 1 skizzierten lokal asymptotischen Betrachtungsweise wurde diese Aussage in [Haj62] modifiziert zu einer *lokal asymptotischen Optimalität* längs einer einparametrigen Klasse $\mathfrak{F}_1$, die in $F \in$ J $\mathbb{L}_2$-differenzierbar ist mit Ableitung $g = b \circ F$ und zwar *unter allen Tests* (und nicht nur unter allen Rangtests). Das Rangtupel R_n ist also *asymptotisch suffizient*, d.h. es enthält asymptotisch die gesamte relevante Information: eine Reduktion durch Invarianz auf Rangtests wie für festes $n \in \mathbb{N}$ ist lokal asymptotisch für $n \to \infty$ nicht erforderlich.

Diese Optimalitätsaussage gilt allgemeiner für alle linearen Rangtests φ_n^b mit $\mathbb{L}_2$-stabilen[22] Bewertungen. Zum einen haben die mit diesen Koeffizienten gebildeten

[21] Genauer: längs der durch $\mathfrak{F}_1$ festgelegten Klasse $\mathfrak{P}_1 = \{\otimes_{j=1}^n F_{\zeta c_{nj}} : F_\Delta \in \mathfrak{F}_1, \Delta \in \mathbb{R}\}$.

[22] Ein System $(b_{nj}) \subset \mathbb{R}$ von Bewertungen heißt $\mathbb{L}_2$-*stabil* für eine Funktion $b \in \mathbb{L}_2(\mathfrak{R})$, falls für die zugehörigen Sprungfunktionen $b_n(u) := \sum_{j=1}^n b_{nj} \mathbf{1}_{(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]}(u)$, $u \in (0,1)$, gilt $b_n \to b$ in $\mathbb{L}_2(\mathfrak{R})$. Zu diesen gehören nicht nur die exakten, sondern z.B. auch – falls b von lokal beschränkter Variation ist – die approximativen Bewertungen [WMF95].

linearen Rangstatistiken T_n^b in jedem Punkt $F \in$ J eine lineare *Vergleichsstatistik* S_n^{bF} im Sinne von

$$(32) \qquad T_n^b - S_n^{bF} \to 0 \quad \text{nach } w_{n0}\text{-WS}, \quad w_{n0} := F^{(n)},$$

nämlich $S_n^{bF} = \sum_{j=1}^n c_{nj} b(F(x_j))$; zum anderen ist das mit (12) lokalisierte Modell LAN in[23] S_n^{bF} und $\sigma_b^2 := \int b^2 d\lambda\!\!\setminus$, so daß insbesondere Benachbartheit (16) gilt. Äquivalent hierzu ist, daß Approximationen unter (w_{n0}) auch unter $(w_{n\zeta})$ gelten, daß also aus (32) folgt $T_n^b - S_n^{bF} \to 0$ nach $w_{n\zeta}$-WS $\forall \zeta \in \mathbb{R}^k$.

Mit den entsprechend lokalisierten Hypothesen $\mathrm{H}_1 : \zeta \leq 0$, $\mathrm{K}_1 : \zeta > 0$, besitzt das *Limesproblem* einen gleichmäßig besten Test φ^*, aus dem sich gemäß $\varphi_n^* := \varphi^* \circ S_n^{bF}$ ein in dem betrachteten Punkt F lokal asymptotisch gleichmäßig bester Test ergibt; vgl. [WMF95]. Ersetzt man noch S_n^{bF} durch T_n^b, so ergibt sich wegen (32) die lokal asymptotische gleichmäßige Optimalität des Rangtests $\varphi_n^b = \varphi^* \circ T_n^b$ für H_1 gegen K_1 in jedem Punkt $F \in$ J. Zur Charakterisierung der Tests φ_n^b als lokal asymptotisch beste Tests in einem Punkt $F \in$ J werden die *Richtungen*, also die $\mathbb{L}_2$-Ableitungen der in $F \in$ J als $\mathbb{L}_2$-differenzierbar vorausgesetzten einparametrigen Verteilungsklassen $\mathfrak{F}_1$ verwendet.

Berücksichtigt man in geeigneter Form das Vorliegen des Nebenparameters $\nu = F(\mu)$, so lassen sich alle Überlegungen zwanglos vom Problem $\mathcal{L}$ auf das Problem $\mathcal{D}(\mu)$ übertragen. Mit dem in (31) bereits eingeführten[24] zusätzlichen Parameter κ ist (30) erfüllt, falls b κ-monoton ist. Bei Untersuchungen in der Umgebung einer Stelle $F \in$ J hat man schließlich zu berücksichtigen, daß im allgemeinen $F(\mu) =: \nu \neq \kappa$ gelten wird und somit die κ-monotone Funktion b durch eine an die Stelle F *adaptierte* ν-monotone Funktion b_ν zu ersetzen ist.

Konsistenz linearer Rangtests Im Problem $\mathcal{L}$ gilt: Für[25] $(F_1, F_2) \in \mathring{\mathrm{H}} \cup \mathrm{K}$ trifft φ_n^b asymptotisch die richtige Entscheidung. Dies folgt bei $\lambda\!\!\setminus$-f.ü. streng isotonem b leicht aus einem *starken Gesetz der großen Zahlen* für lineare Rangstatistiken mit $\mathbb{L}_1$-stabilen Bewertungen [MF83]: Unter festen $(F_1, F_2) \in \mathfrak{F}_c \times \mathfrak{F}_c$ gilt bei $n_1, n_2 \to \infty$ mit $n_1/(n_1 + n_2) \to \lambda \in (0, 1)$

$$(33) \qquad T_n^b \to \gamma^b(F_1, F_2, \lambda) := \int b \circ G dF_1 - \int b \circ G dF_2 \quad (F_1, F_2)\text{-f.s.}$$

mit $G := \lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2$. Offenbar gilt für $\lambda\!\!\setminus$-f.ü. streng isotones $b \in \mathbb{L}_1^0$

$$F \in \mathring{\mathrm{H}} \Leftrightarrow \gamma^b(F_1, F_2, \lambda) < 0, \quad F \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \gamma^b(F_1, F_2, \lambda) > 0.$$

Die gleichen Aussagen gelten auch für das Testproblem $\mathcal{D}(\mu)$ [BMFW92].

Schätzung von b Bisher wurde unterstellt, daß die Richtung $b \in \mathbb{L}_2^0(\mathfrak{R})$ vorgezeichnet war, in die ein lokal asymptotisch bester Test gesucht wird. Es sind jedoch

---

[23] Wegen (12) gilt dann $\mathfrak{L}_{u_n}(S_n^{bF}) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(0, \sigma_b^2)$, $\sigma_b^2 := \int b^2 d\lambda\!\!\setminus$.

[24] Entsprechend ist die Definition der Sprungfunktion $b_n(\cdot)$ aus Fußnote 22 abzuändern.

[25] Für die mit approximativen Bewertungen gebildete lineare Rangstatistik T_n^b läßt sich unter schwachen Zusatzvoraussetzungen für festes $(F_1, F_2) \in \mathring{\mathrm{H}} \cup \mathrm{K}$ auch asymptotische Normalität zeigen. Die wichtigste Voraussetzung für die hierbei verwendete Chernoff-Savage-Technik [ChS58] ist eine *Chernoff-Savage-Bedingung* an die Bewertungsfunktion b und ihre ersten beiden Ableitungen: $\exists\ \chi \in (0, \infty)$ mit $|b^{(i)}(u)| \leq \chi[u(1-u)]^{-i-\frac{1}{2}+\delta}$, $i = 0, 1, 2$, $0 < u < 1$.

auch Vorgehensweisen angegeben, mittels deren der hochdimensionale Nebenparameter b zunächst geeignet geschätzt wird, vgl. [HajS67], [BeN89].

Anpassungstests Für Tests der Hypothesen H : $F = F_0$, K : $F \neq F_0$ hat sich die Bezeichnung „Omnibus-Test" eingebürgert, weil in K keine Verteilung vor den anderen bevorzugt ist. Durch Erweiterung einer Komponentenzerlegung von Durbin-Knott (1972) und unter Heranziehung benachbarter Verteilungsfolgen wurde in [Neu76] jedoch gezeigt, daß die asymptotische Schärfe des Cramér-von Mises-Tests – mit der Prüfgröße $\int(\widehat{F}_n - F_0)^2 d\widehat{F}_n$ – durch einen kompakten linearen Operator in einem separablen Hilbertraum beschrieben wird und sich somit vornehmlich auf Verteilungen aus der linearen Hülle der zu den größten Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren konzentriert. Diese Überlegungen sind in [MiSt90] auf den Kolmogorov-Smirnov-Test – mit der Prüfgröße $\sup_{z\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(z) - F(z)|$ – erweitert worden, wobei die Zerlegung nun jedoch im Tangentenraum von K erfolgt. Allgemeiner wurde in [Ja95] gezeigt, daß die Krümmung der Gütefunktion eines jeden Anpassungstests auf einer Hauptkomponentenzerlegung beruht, so daß auch im allgemeinen Fall eine nennenswerte Schärfe nur für wenige orthogonale Richtungen vorliegt.

Zensierte Daten und Martingalmethoden Bei vielen medizinischen oder technischen Anwendungen liegen zufällige Größen Y zugrunde, die nur dann zu beobachten sind, so lange sie einen ebenfalls zufallsabhängigen (und von Y st.u.) Schwellenwert Z nicht überschreiten, etwa den Zeitpunkt des Ausscheidens aus der Studie infolge einer anderweitigen Krankheit oder Wegzugs bzw. bei technischen Problemen infolge eines anderweitigen Defekts. Liegen st.u. ZG (Y_i, Z_i), $i = 1, \dots, n$, zugrunde, so beobachtet man also die (rechts-zensierten) Größen $T_i := Y_i \wedge Z_i$ und $\delta_i := \mathbf{1}(Y_i \leq Z_i)$, $i = 1, \dots, n$. Die Rolle der empirischen VF $\widehat{F}_n$ bei theoretischen Untersuchungen nimmt dann der *Kaplan-Meier-Schätzer* $\widehat{S}_n$ für die Überlebensfunktion $S = 1 - F$ der Y_i ein,

$$\widehat{S}_n(t) := \prod \left\{ i \text{ mit } T_{n\uparrow i} \leq t : \left(\frac{n-i}{n-i+1}\right)^{\delta_{(i)}} \right\} \quad \text{für } t \leq T_{n\uparrow n}$$

mit $\delta_{(i)} = \delta_j$ für $T_{n\uparrow i} = T_j$ und $\widehat{S}_n(t) = 0$ für $t > T_{n\uparrow n}$. $\sqrt{n}(\widehat{S}_n(t) - S(t))$ ist für jedes $t > 0$ asymptotisch normalverteilt, $(\sqrt{n}(\widehat{S}_n(t) - S(t)), t > 0)$ asymptotisch ein Gauß-Prozeß[26] (Breslow-Crowley, 1974). Die Heranziehung von *Martingalmethoden* durch Aalen[27] [Aa78] und Gill [Gi80], insbesondere der Theorie der stochastischen Integration bei Zählprozessen, hat zu einer Vielzahl anwendungsrelevanter Resultate geführt; vgl. [ABGK93]. Im Rahmen der LAN-Theorie wurden von Neuhaus (1988) und Janssen (1989) im Zweistichprobenfall bei gleichen Zensierungsverteilungen H_1 und H_2 asymptotisch optimale Rangstatistiken hergeleitet, die asymptotisch äquivalent sind zu den bei Aalen und Gill angegebenen Martingalstatistiken. Darüberhinaus wurde in [Neu93] gezeigt, daß eine bedingte Version der auf den Martingalstatistiken

[26] Zur expliziten Gestalt der Kovarianzfunktion sowie zu Folgearbeiten, u.a. zur Herleitung von Konfidenzbändern durch Hall-Wellner (1980), vgl. die Einführung von Breslow zu der in [KJ92] wieder abgedruckten Arbeit von Kaplan-Meier (1958).

[27] Vgl. auch die in [KJ93] wieder abgedruckte Arbeit von Aalen (1978) sowie die Einführung hierzu von McKeague und die in Fußnote 26 zitierte Einführung von Breslow.

basierenden Rangstatistiken zur unbedingten Version sogar bei $H_1 \neq H_2$ asymptotisch äquivalent ist und bei $H_1 = H_2$ finit exakt das Niveau einhält. Martingaldarstellungen wurden im Anschluß an [Gi80] auch bei sonstigen Rangstatistiken mit Erfolg verwendet. Diese Methoden haben u.a. Eingang gefunden in die Behandlung und Erweiterung des Regressionsmodells von Cox auf zeitabhängige externe Variable [ABGK93].

Effizienzbegriffe Beim Gütevergleich eines Rangtests mit dem besten Test oder allgemeiner bei demjenigen zweier Tests (φ_{ni}) setzt man die bei zugelassenem Niveau α zur Erzielung einer Schärfe β in $\vartheta \in \mathrm{K}$ benötigten Stichprobenumfänge $n_i(\alpha,\beta,\vartheta)$, $i = 1,2$, in Beziehung; $e((\varphi_{n1}) : (\varphi_{n2})|\alpha,\beta,\vartheta)$ oder kurz

$$(34) \quad e(\varphi_{n1} : \varphi_{n2}|\alpha,\beta,\vartheta) := \frac{n_2(\alpha,\beta,\vartheta)}{n_1(\alpha,\beta,\vartheta)}$$

heißt *relative Effizienz* der Folgen (φ_{n1}) zu (φ_{n2}) unter ϑ. Da diese Größe nur schwer zu bestimmen ist, betrachtet man zumeist die Grenzwerte für $\alpha \to 0$ oder $\beta \to 1$ oder $\vartheta \to \vartheta_0 \in \mathrm{J}$, wobei dann auch die Stichprobenumfänge gegen ∞ streben. Die Bildung dieser Limiten ist auch deshalb gerechtfertigt, weil Situationen mit $\alpha \approx 0$ bzw. $\beta \approx 1$ bzw. $\vartheta \approx \vartheta_0$ von besonderem praktischen Interesse sind. Am gebräuchlichsten sind die Grenzübergänge $\vartheta \to \vartheta_0$ und $\alpha \to 0$.

Pitman-Effizienz [Pit49] $e_p(\varphi_{n1} : \varphi_{n2}|\vartheta_n)$. Dieser (häufig von α und β unabhängige) Grenzwert von (34) längs einer Folge (ϑ_n) mit $\vartheta_n \to \vartheta_0 \in \mathrm{J}$ läßt sich zumeist dann leicht bestimmen, wenn die Prüfgrößen T_{ni} von φ_{ni} für $i = 1,2$ sowohl unter P_{ϑ_0} wie unter P_{ϑ_n} mit derselben Varianz σ_i^2 asymptotisch normalverteilt sind, d.h. wenn es, etwa bei $\sigma_i^2 = 1$, Zahlen $\delta_i \in [0,\infty]$ gibt mit[28]

$$(35) \quad E_{\vartheta_n}\varphi_{ni} \to 1 - \Phi(u_\alpha - \delta_i), \quad i = 1,2.$$

Dann gilt nämlich, vgl. etwa [WMF95],

$$(36) \quad e_p(\varphi_{n1} : \varphi_{n2}|\vartheta_n) = \delta_1^2/\delta_2^2.$$

Die Mittelwertverschiebungen δ_i lassen sich vielfach mit Hilfe des 3. Le Cam-Lemmas bestimmen. Dies enthält – in der hier benötigten Form – eine hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Limes-Normalverteilung einer Statistik nur um eine Mittelwertverschiebung ändert, wenn die (ϑ_0 entsprechende) Verteilungsfolge (u_n) (beim Übergang zu ϑ_n) durch eine benachbarte Folge (v_n) ersetzt wird, nämlich für

$$(37) \quad \mathfrak{L}_{\vartheta_0}(T_{ni}) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(\nu_i, \sigma_i^2), \quad \mathfrak{L}_{\vartheta_n}(T_{ni}) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(\nu_i + \varrho_i\sigma_i\kappa, \sigma_i^2).$$

Dabei ist ϱ_i die Korrelation von T_{ni} und $\log L_n$ in der (unter u_n vorausgesetzten) zweidimensionalen Limes-Normalverteilung, aus der neben (37) noch $\mathfrak{L}_{u_n}(\log L_n) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}(-\kappa^2/2, \kappa^2)$ und somit Benachbartheit folgt. Damit gilt $\delta_i = \varrho_i\kappa$ für $i = 1,2$, insgesamt also nach (36)

$$(38) \quad e_p(\varphi_{n1} : \varphi_{n2}|\vartheta_n) = \varrho_1^2/\varrho_2^2.$$

---

[28] Die Überlegungen lassen sich auch auf den Fall übertragen, daß im Limes nicht-zentrale χ^2-Verteilungen mit verschiedenen Nichtzentralitätsparametern auftreten; vgl. [WMF95].

Speziell ergibt sich für den Vergleich eines Tests φ_n (mit $\delta = \varrho\kappa$) mit einem unter den Verteilungen P_{ϑ_n} asymptotisch optimalen Test φ_n^* (also mit[29] $\delta^* = \kappa$)

(39) $\quad e_p(\varphi_n : \varphi_n^* | \vartheta_n) = \varrho^2.$

Typischerweise wird die Pitman-Effizienz längs $\mathbb{L}_2$-differenzierbarer Verteilungsklassen $\mathfrak{F}_1$ gebildet; sie hängt dann nur von der Richtung im Schnittpunkt mit J, nicht aber vom sonstigen Verlauf von $\mathfrak{F}_1$ ab[30].

Bahadur-Effizienz [Ba60] $e_B(\varphi_{n1} : \varphi_{n2}|\vartheta)$. Für diesen (vielfach von β unabhängigen) Grenzwert von (34) für $\alpha \to 0$ läßt sich eine zu (36) analoge Berechnungsvorschrift angeben. Seien hierzu $\{T_n > t\}$ mit $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ der kritische Bereich eines Tests und $1 - F_{\vartheta,n}(t) := P_\vartheta(T_n > t)$ die zugehörige Gütefunktion. Dann ist mit der Abkürzung $1 - G_n(t) := \sup_{\vartheta \in \mathrm{H}} P_\vartheta(T_n > t)$

(40) $\quad L_n = L_n(X_1, \dots, X_n) := 1 - G_n(T_n)$

das bei dem beobachteten Wert T_n der Prüfgröße angenommene Niveau des Tests. Vielfach gilt mit der auf K definierten *exakten Bahadur-Neigung* $c_T(\cdot)$

(41) $\quad n^{-1} \log L_n \to -c_T(\vartheta) \;\; P_\vartheta\text{-f.ü.} \quad \forall \vartheta \in \mathrm{K},$

was mit Hilfe von *Grenzwertsätzen für große Abweichungen* unter $\vartheta \in \mathrm{H}$ (entsprechend $\alpha \to 0$) verifiziert werden kann. Besitzen (T_{n1}) und (T_{n2}) die exakten Neigungen c_{T_1} und c_{T_2}, so ergibt sich für die *Bahadur-Effizienz* analog (36)

(42) $$e_B(\varphi_{n2} : \varphi_{n1}|\vartheta) = \frac{c_{T_1}(\vartheta)}{c_{T_2}(\vartheta)}, \quad \vartheta \in \mathrm{K},$$

[Ba71]. Der Nachteil der Bahadur-Effizienz ist die Schwierigkeit des Verifizierens von (41) mangels hierfür erforderlicher Grenzwertsätze für große Abweichungen. Beispiele bei linearen Rangtests und Anpassungstests findet man in [Nik95].

Hodges-Lehmann-Effizienz [HL56] $e_{HL}(\varphi_{n1} : \varphi_{n2}|\vartheta)$. Bei dem Grenzwert von (34) für $\beta \to 1$ läßt sich zwar das Vorgehen vom Fall $\alpha \to 0$ weitgehend übertragen. Jedoch setzt das Verifizieren der (41) entsprechenden Beziehung nun die Gültigkeit eines geeigneten Grenzwertsatzes für große Abweichungen unter $\vartheta \in \mathrm{K}$ voraus[31]. Beispiele sowie eine Diskussion des *Chernoff-Index*, der dem simultanen Grenzübergang $\alpha \to 0, \beta \to 1$ entspricht, findet man in [Nik95].

---

[29] Speziell folgt aus (15) mit dem 3. Le Cam-Lemma $\mathfrak{L}_{v_n}(\log L_{n\zeta}) \xrightarrow{\mathfrak{L}} \mathfrak{N}(\kappa^2/2, \kappa^2)$.

[30] Ist speziell φ_{n1} der Fisher-Yates- und φ_{n2} der Wilcoxon-Test, so ist die Pitman-Effizienz für alle Richtungen mindestens $\pi/6$; sie kann aber beliebig groß sein [Be71]; vgl. auch [Be76]. Beschränkt man sich auf $\mathbb{L}_2(0)$-differenzierbare Translationsfamilien zu absolut stetigen Dichten f (d.h. mit Richtungen $-f'/f \in \mathbb{L}_2(F)$), so ergeben sich für φ_{n1} und φ_{n2} im Fall der Normalverteilungsdichte – also im Vergleich zum t-Test – gemäß (39) die Werte $3/\pi \approx 0,955$ bzw. 1. In [HL56] bzw. der eingangs erwähnten Arbeit [ChS58] war bereits gezeigt worden, daß im Fall einer beliebigen absolut stetigen Dichte f mit $\int f'^2/f d\lambda < \infty$ die Pitman-Effizienz nie kleiner als $108/125 \approx 0,864$ bzw. als 1 ist.

[31] Weitere statistische Anwendungen von Grenzwertsätzen großer Abweichungen und zugleich eine Einführung in die *nicht-lokale asymptotische Statistik* findet man bei [Rü88].

3 Nichtparametrische Kurvenschätzung

Ausgehend von den methodischen Ansätzen in Rosenblatt [Ros56] und Parzen [Par62] hat sich dieses Gebiet zu einem solchen großer praktischer Bedeutung mit einer umfangreichen Literatur entwickelt. Es umfaßt insbesondere

a) *Schätzung von Dichten:* Gegeben sind Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ von st.u. ZG $X_1, \ldots, X_n$ mit derselben Verteilung, die durch eine unbekannte und aufgrund der Daten zu bestimmende Dichte f beschrieben wird;
b) *Schätzung von Regressionskurven bei festem Design (deterministische Regressoren):* Gegeben sind Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, wobei die Design-Punkte x_i vorgegebene Werte und die y_i Realisierungen st.u. ZG Y_i sind, deren Mittelwerte EY_i auf einer unbekannten und aufgrund der Daten zu bestimmenden *Regressionskurve* $m(\cdot)$ liegen und deren Streuung σ_i^2 (häufig) konstant ist;
c) *Schätzung von Regressionskurven bei zufälligem Design (stochastische Regressoren):* Sind auch die Design-Punkte zufallsabhängig, d.h. sind $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ Realisierungen st.u. ZG mit derselben Verteilung $\mathfrak{L}(X, Y)$, so ist aufgrund der Daten die Funktion $m(\cdot) = E(Y|X = \cdot)$, die sog. *Regression von Y über X,* zu bestimmen. Hier ist $\sigma^2(\cdot) = \mathrm{Var}(Y|X = \cdot)$ nicht konstant.

Im Gegensatz zur parametrischen Kurvenschätzung, bei der es sich – nach Annahme eines bestimmten parametrischen Modells – nur noch um die Schätzung der Parameter handelt, wird bei der nichtparametrischen Vorgehensweise keine Voraussetzung an die Gestalt der zu schätzenden Funktion gemacht. Im folgenden sollen die Grundideen der wichtigsten Verfahren kurz skizziert und im Anschluß daran einige Güteeigenschaften sowie Fehlerschranken diskutiert werden. Aus Platzgründen kann weder auf die Schätzung von Ableitungen oder Funktionalen wie etwa von Maxima oder Hazardraten noch auf die zahlreichen Anwendungen, etwa in der Mustererkennung oder bei Dekonvolutionsproblemen, eingegangen werden. Die x_i seien der Einfachheit halber stets als eindimensional[32] angenommen. Soweit nicht anders angegeben, sollen alle benötigten Ableitungen sowie alle auftretenden Momente existieren und endlich sein.

Konvergenzraten Diese sind sowohl für lokale wie für globale Abstandsmaße typischerweise von der Form $n^{-\delta}$ mit $\delta < 1/2$. Dies steht im Gegensatz zu der von den üblichen Schätzern der parametrischen Statistik her geläufigen Rate $n^{-1/2}$. Dabei gibt es eine (über eine Minimax-Schranke[33] definierte) *bestmögliche Rate*, die häufig auch angenommen wird (jedoch nicht von jedem der im folgenden angegebenen Schätzer; vgl. Fußnote 36). In diesem Fall spricht man von einer *optimalen Rate.* Diese beträgt bei Vorliegen geeigneter Regularitätsvoraussetzungen für Dichte- wie für Regressionsschätzer jeweils $n^{-k/(2k+1)}$, wenn das zu schätzende f bzw. m einer Lipschitz-Bedingung der Ordnung β an die r-te Ableitung genügt und $k = \beta + r$ ist [Sto80],[Sto82].

---

[32] Zu dem mehrdimensionalen Fall – für den übrigens weitere Methoden entwickelt wurden wie z.B. die Verwendung neuronaler Netze und radialer Basisfunktionen [LugZ95] – und sonstigen, auch die praktische Durchführung sowie die Dimensionsreduzierung betreffenden, Einzelheiten sei auf [Hd90] und [Sim96] sowie die dort zitierte Literatur verwiesen.
[33] Vgl. hierzu [IH81].

Dichteschätzer Ein *Dichteschätzer* aufgrund einer zufälligen Beobachtung $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist eine (produktmeßbare) Abbildung $\widehat{f}_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Nebenbedingungen[34] $\widehat{f}_n(\cdot; \boldsymbol{x}) \geq 0$, $\int \widehat{f}_n(z; \boldsymbol{x})dz = 1 \; \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Beachtet man, daß unter entsprechenden Voraussetzungen

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{h}\left[F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)\right] + o(h) \quad \text{für} \quad h \to 0$$

gilt und der Wert der empirischen VF an der Stelle x, also

$$\widehat{F}_n(x) = \widehat{F}_n(x; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\#\{i = 1, \dots, n : x_i \leq x\},$$

ein optimaler Schätzer für $F(x)$ ist, so ergibt sich zunächst der *naive Schätzer*

$$\widehat{f}_n(x) = \widehat{f}_n(x; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{h}\left[\widehat{F}_n\left(x + \frac{h}{2}; \boldsymbol{x}\right) - \widehat{F}_n\left(x - \frac{h}{2}; \boldsymbol{x}\right)\right]$$

$$(43) \qquad = \frac{1}{nh}\#\{i = 1, \dots, n : x - \tfrac{h}{2} < x_i \leq x + \tfrac{h}{2}\}.$$

Für diesen sind die obigen Nebenbedingungen erfüllt. Das gleiche gilt für den (von n abhängigen) *Histogramm-* oder *Partitionenschätzer* mit äquidistanter Einteilung von $\mathbb{R}$ in disjunkte Intervalle I_{nj} der Länge $h = h_n$, also für

$$(44) \qquad \widehat{f}_n(x) = \widehat{f}_n(x; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{nh}\#\{i = 1, \dots, n : x_i \in I_{nj}\}, \quad x \in I_{nj}, \; j \in \mathbb{Z}.$$

Als Schätzung einer stetigen Dichte erscheint jedoch ein Polygonzug oder eine anderweitig geglättete Funktion geeigneter als die Treppenfunktion (44).

Kernschätzer (44) und (43) sind lokale Mittelbildungen. Bei (43) werden alle Beobachtungen $x_i \in \left[x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right)$ gleich berücksichtigt. Plausibler wäre es, diejenigen x_i stärker zu berücksichtigen, die näher an der Stelle x sind, entfernter liegende dagegen weniger. Demgemäß werden *gleitende Mittelbildungen* entsprechend einer WS-Verteilung oder allgemeiner bzgl. eines *Kerns* zugelassen, d.h. bzgl. einer Funktion $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int k(u)du = 1$, für die zwar typischerweise, aber nicht notwendig gilt $k \geq 0$. Der so resultierende *Kernschätzer*

$$(45) \quad \widehat{f}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}k\Big(\frac{x - x_i}{h}\Big) = \frac{1}{h}\int k\Big(\frac{x - z}{h}\Big)d\widehat{F}_n(z; \boldsymbol{x}) = k_h * \widehat{F}_n(x; \boldsymbol{x}),$$

$k_h(\cdot) := h^{-1}k(h^{-1}\cdot), h = h_n$, läßt sich als „Glättung“ von (44) auffassen. Dabei hat die *Bandbreite h* die Funktion eines *Glättungsparameters* und ist als solche für die Güte des Kernschätzers von größter Bedeutung. Ist h klein, so ist die Kurve flatterig und damit die Varianz groß, die Verzerrung klein. Ist dagegen h groß, so ist die Kurve zwar ruhiger, aber es wird u.U. wesentliche Information weggeglättet. Beim *erwarteten quadratischen Fehler* (mean squared error)

$$(46) \qquad \mathrm{MSE}(x) := E(\widehat{f}_n(x) - f(x))^2 = \mathrm{Var}\widehat{f}_n(x) + (E\widehat{f}_n(x) - f(x))^2$$

---

[34] Auf diese Nebenbedingungen wird gelegentlich verzichtet, etwa um die Konvergenzrate von Kernschätzern bei höherer Differenzierbarkeit von f zu verbessern; vgl. Fußnote 36.

wächst also der zweite Summand mit h, während der erste abnimmt. Dies zeigen auch die durch Taylorentwicklung gewonnenen analytischen Ausdrücke

$$\text{(47)}\qquad \operatorname{Var}\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{nh}f(x)R(k) + o((nh)^{-1}), \quad R(k) := \int k^2(u)du,$$

$$\text{(48)}\qquad E\widehat{f}_n(x) - f(x) = \frac{1}{2}h^2 f''(x)\sigma_k^2 + o(h^2), \quad \sigma_k^2 := \int u^2 k(u)du.$$

Man wird also h in Abhängigkeit von n so wählen, daß $h \to 0$, und $nh \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt, zugleich aber versuchen, durch Minimierung von (46) hinsichtlich h das Anwachsen der beiden Summanden gegeneinander auszubalancieren.

Um bei der Wahl von h keine Abhängigkeit von x zu erhalten (vgl. jedoch (68)), betrachtet man statt (46) den (asymptotisch relevanten Anteil des) *erwarteten integrierten quadratischen Fehlers* (mean integrated squared error)

$$\text{(49)}\qquad \text{MISE} := \int E(\widehat{f}_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{1}{nh}R(k) + \frac{h^4}{4}\sigma_k^4 R(f'') + o((nh)^{-1} + h^4)$$

und erhält so bis auf Glieder höherer Ordnung als *optimale*[35] *Wahl* von h

$$\text{(50)}\qquad h = h_n = \left[\frac{R(k)}{\sigma_k^4 R(f'')}\right]^{1/5} n^{-1/5}$$

und damit als minimalen Wert[36] des asymptotischen Anteils von (49)

$$\text{(51)}\qquad \inf_{h>0} \text{AMISE} = \frac{5}{4}(\sigma_k R(k))^{4/5}(R(f''))^{1/5} n^{-4/5}.$$

Erwartungsgemäß sind also stark schwankende Dichten schlechter zu schätzen als solche mit kleinem Wert von $R(f'')$. Wegen (51) wird man den Kern so wählen, daß $\sigma_k R(k)$ möglichst klein ist. Unter den Nebenbedingungen

$$\text{(52)}\qquad k(\cdot) \geq 0, \quad \int k(u)du = 1, \quad \int uk(u)du = 0$$

führt dies (bis auf einen Skalenfaktor) auf den *Epanechnikov-Kern*

$$\text{(53)}\qquad k^*(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2)\mathbf{1}_{[-1,+1]}(u).$$

Da dieser nicht überall beliebig oft differenzierbar ist, wird auch (45) nicht beliebig glatt sein. Dies wäre beim *Gauß-Kern* $k(u) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-u^2/2)$ der Fall, der wegen $\sigma_k R(k)/\sigma_{k^*} R(k^*) = 1{,}0513$ nahezu gleich gut ist.

---

[35] Sofern – wie vielfach üblich – quadratische Abweichungen als Gütekriterium zugrundegelegt werden und f als zweifach differenzierbar vorausgesetzt wird.

[36] Die Rate des zugehörigen $\mathbb{L}_2$-Abstandes ist dann $n^{-2/5}$, also gemäß [Sto82] optimal. – Für den Histogrammschätzer (44) liefert die analoge Rechnung $h_n = O(n^{-1/3})$ und $\inf_{h>0}$ AMISE $= O(n^{-2/3})$. Ersetzt man (44) durch einen geeigneten Polygonzug, so ergibt sich wie beim Kernschätzer (45) $h_n = O(n^{-1/5})$ und $\inf_{h>0}$ AMISE $= O(n^{-4/5})$. – Ist f r-fach differenzierbar, $r > 2$, so ergibt sich bei einem Kern k mit $\int x^j k(x)dx = \delta_{jr}$ für $1 \leq j \leq r$ die nach [Sto80], [Sto82] optimale Rate $\inf_{h>0}$ AMISE $= O(n^{-2r/(2r+1)})$ und zwar bei $h_n = O(n^{-1/(2r+1)})$.

Kreuz-Validierung Störend bei der Wahl von h gemäß (50) ist die Abhängigkeit von der unbekannten Dichte. Eine von $f \in \mathbb{L}_2$ unabhängige Wahl[37] knüpft an die Minimierung des *integrierten quadratischen Fehlers*

$$(54) \qquad \int (\widehat{f}_n(x) - f(x))^2 dx = R(\widehat{f}_n) - 2\int \widehat{f}_n(x;\mathbf{x}) f(x)dx + R(f)$$

an. Wegen der Unabhängigkeit des letzten Summanden von h ist diese Minimierung äquivalent mit derjenigen von $R(\widehat{f}_n) - 2E\widehat{f}_n$, wobei sich im zweiten Term wie bei der folgenden Überlegung die Bildung des Erwartungswerts gemäß (54) auf die erste Variable x von $\widehat{f}_n(x;\boldsymbol{x})$ bezieht. Die Abhängigkeit von der unbekannten Dichte f wird nun dadurch eliminiert, daß man $E\widehat{f}_n$ durch einen erwartungstreuen Schätzer ersetzt. Hierzu entnimmt man aus der 2. Variablen $\boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ von $\widehat{f}_n$ die Beobachtung x_j und bildet den Schätzer $\widehat{f}_{n-1}(\cdot;\boldsymbol{x} - \{x_j\})$ an der Stelle x_j („*Kreuz-Validierung*“). Dann gilt nämlich wegen (45) für $j = 1, \dots, n$

$$(55) \qquad E\widehat{f}_{n-1}(X_j;\boldsymbol{x} - \{x_j\}) = E\widehat{f}_n(X;\boldsymbol{x}) = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{f}_{n-1}(X_i;\boldsymbol{x} - \{x_i\}).$$

An Stelle von $R(\widehat{f}_n) - 2E\widehat{f}_n$ wird also $R(\widehat{f}_n) - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{f}_{n-1}(x_i;\boldsymbol{x} - \{x_i\})$ minimiert. Zwar läßt sich diese Vorgehensweise theoretisch rechtfertigen [HaMP92]; es hat sich jedoch gezeigt, daß dieses Verfahren bei der praktischen Durchführung äußerst langsam ist. Dies liegt daran, daß das optimale h in zu starkem Maße von den Fluktuationen der Stichprobe abhängt. In der Literatur, vgl. [Sim96], sind deshalb verschiedene andere Vorgehensweisen vorgeschlagen worden, teilweise unter Beibehaltung der Kreuz-Validierung bei Verzicht auf eine strenge Einhaltung der Erwartungstreue, teilweise durch vorhergehendes Glätten. Eine andere Möglichkeit besteht darin, $R(f_n'')$ in (50) zu schätzen, etwa durch $R(\widehat{f}_n'')$, wobei $\widehat{f}_n$ gemäß (45), aber mit einer anderen Bandbreite bestimmt wird, oder etwa durch Einsetzen einer Normalverteilungsdichte mit geschätztem σ.

Wavelet-Shrinkage-Schätzer Es seien $x_1, \dots, x_n$ Realisierungen st.u. ZG $X_1, \dots, X_n$ mit derselben Dichte $f \in \mathbb{L}_2(\lambda\!\!\!\backslash)$ und $q_j, j \in \mathbb{N}$, eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{L}_2(\lambda\!\!\!\backslash)$. Dann läßt sich f als Orthogonalreihe darstellen

$$(56) \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j q_j(x) \quad \text{mit} \quad \beta_j = \int q_j(x)f(x)dx = Eq_j(X_1), \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Somit kann jedes β_j erwartungstreu geschätzt werden durch

$$(57) \qquad \widehat{\beta}_{nj}(\mathbf{x}) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} q_j(x_i), \qquad \text{so daß} \qquad \widehat{f}_n(x;\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_n}\widehat{\beta}_{nj}(\mathbf{x})q_j(x)$$

mit geeignetem $N_n, N_n \to \infty$ für $n \to \infty$, als Schätzer von $f(x)$ und N_n als Glättungsparameter aufgefaßt werden kann. Bei der Beschränkung auf die ersten N_n Summanden in (57) wird unterstellt, daß die Information über $f(x)$ im wesentlichen in den niedrig-indizierten Summanden steckt. Da dieses häufig nicht der Fall ist, berücksich-

[37] Zu einer von $f \in \mathbb{L}_1$ unabhängigen Wahl von h vgl. [DevL97].

tigt man vielfach genau die Summanden, deren Koeffizienten einen gewissen Schwellenwert $\delta = \delta_n > 0$ übersteigen, also

$$(58)\qquad \widehat{f}_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\beta}_{nj}(\mathbf{x})\mathbf{1}\Big(|\widehat{\beta}_{nj}(\mathbf{x})| > \delta\Big)q_j(x).$$

Als ONB des $\mathbb{L}_2(\lambda\!\!\setminus)$ haben sich *wavelets* bewährt. Bei diesen wird ein geeignetes *„father wavelet"* $\phi(\cdot) \in \mathbb{L}_2(\lambda\!\!\setminus)$ ausgewählt, für das die $\phi(\cdot - \ell)$ $\ell \in \mathbb{N}$, orthonormal sind und welches mit hierdurch erklärten Koeffizienten c_ℓ der Beziehung $\phi(x) = \sum_\ell c_\ell \phi(2x - \ell)$, $x \in \mathbb{R}$, genügt. Dann definieren die c_ℓ ein *„mother wavelet"* gemäß $\psi(x) = \sum_\ell (-1)^\ell c_{1-\ell}\phi(2x - \ell)$, $x \in \mathbb{R}$, und mit geeignetem Glättungsparameter $p > 0$ sowie Zahlen $p_k := p2^k$, $k \in \mathbb{N}$, wird durch

$$\phi_\ell(x) := p^{1/2}\phi(px - \ell), \quad \psi_{k\ell}(x) := p_k^{1/2}\psi(p_k x - \ell), \quad \ell \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0,$$

eine ONB des $\mathbb{L}_2(\lambda\!\!\setminus)$ erklärt [FaGi96]. Für $f \in \mathbb{L}_2(\lambda\!\!\setminus)$ gilt also

$$f(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \beta_\ell \phi_\ell(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \beta_{k\ell}\psi_{k\ell}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit den gemäß (56) erklärten und analog (57) schätzbaren β_ℓ und $\beta_{k\ell}$.

Der Vorteil beim Verwenden dieser aus der Signaltheorie stammenden ONB und des nichtlinearen *Shrinkage-Schätzers* (58) besteht darin, daß vielfach auch Unstetigkeiten oder andere Singularitäten von f besser erfaßt werden können. So ist etwa zur Erzielung der Fehlerrate (51) nur die stückweise – und nicht wie bei Kernschätzern die uneingeschränkte – zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Dichte f erforderlich [HaPa95]. Nichtlineare Wavelet-Methoden wurden zur Erzielung einer Adaption bei guter Konvergenzrate über große Funktionenklassen von D.L. Donoho und I.M. Johnstone in das Gebiet der Kurvenschätzung eingeführt. Einen Überblick über Zielsetzung und Resultate, etwa über simultane asymptotische Minimaxaussagen, findet man in [DJKP95].

Regressionsschätzer bei festem Design Die (zumeist verwendete) Grundidee bei der Schätzung ist die gleiche wie bei derjenigen einer Dichte, nämlich die lokale Mittelbildung. Man bestimmt also – etwa den Histogrammen entsprechend – auf intuitiver Basis zunächst einen Vorschätzer, den man dann durch Glätten, z.B. vermöge eines Kerns, zu verbessern sucht. Da die Regressionsfunktion m an den Design-Punkten x_i bis auf zufällige Fehler ε_i mit den beobachteten Werten y_i übereinstimmt, lassen sich Vorschätzer m_0 etwa als Treppenfunktion oder Polygonzug mit $m_0(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, leicht bestimmen. Die hieraus gemäß

$$(59)\qquad \widehat{m}_n(x) = \frac{1}{h}\int k\Big(\frac{x-z}{h}\Big)m_0(z)dz$$

gewonnenen Schätzer nehmen an den Stellen x_i die Werte y_i zwar nur noch näherungsweise an, sind dafür aber glatter. Ein Beispiel ist der durch

$$(60)\qquad \widehat{m}_n(x) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\int_{s_{i-1}}^{s_i} k\Big(\frac{x-z}{h}\Big)dz\; y_i, \qquad s_i := \frac{1}{2}(x_{n\uparrow i} + x_{n\uparrow i+1}),$$

$x_{n\uparrow 0} := -\infty, x_{n\uparrow n+1} := \infty$ definierte *Gasser-Müller*-(GM-)*Schätzer*. Dieser ist offenbar linear in den y_i und unter naheliegenden Voraussetzungen konsistent.

Spline-Schätzer Eine Kurve $x \mapsto m(x)$, die an den Stellen x_i die beobachteten Werte y_i möglichst gut approximiert, die zugleich aber nicht zu viele Schwankungen hat, kann man auch durch Minimierung von $\sum(y_i - m(x_i))^2$ unter Berücksichtigung des „Strafterms" $\int(m''(x))^2 dx$ mit einer Gewichtung $\lambda > 0$ gewinnen, d.h. als Lösung $\widehat{m}_\lambda$ der Extremalaufgabe[38]

$$(61) \qquad S(\widehat{m}_\lambda) = \min_{m \in C^2} S(m), \qquad S(m) := \sum_{i=1}^{n}(y_i - m(x_i))^2 + \lambda \int (m''(x))^2 dx.$$

Die Lösung ist ein *kubischer Spline* mit $m''_\lambda(x) = 0$ für $x \in \{\min x_i, \max x_i\}$. $\widehat{m}_\lambda$ ist in y linear, also $\widehat{m}_\lambda(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\lambda i}(x) y_i$, wobei $W_{\lambda i}(x)$ für jedes feste $i = 1, \ldots, n$, der kubische Spline der Daten $(x_j, n\delta_{ij}), j = 1, \ldots, n$, ist. Für große n und kleine λ sowie Designpunkte x_i, die nicht zu nahe bei $\min x_i$ oder $\max x_i$ liegen, gilt mit der lokalen Bandbreite $h(x_i) = \lambda^{1/4} n^{-1/4} f(x_i)^{-1/4}$

$$W_{\lambda i}(x) \approx \frac{1}{f(x_i)h(x_i)} k_s\left(\frac{x - x_i}{h(x_i)}\right), \qquad k_s(u) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{|u|}{\sqrt{2}}\right) \min\left(\frac{|u|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Dabei ist f eine Dichte, bzgl. der die x_i „regulär" verteilt sind [Sil84].

Regressionsschätzer bei zufälligem Design Es seien (X, Y), $(X_1, Y_1), \ldots,$ (X_n, Y_n) st.u. ZG mit derselben zweidimensionalen Verteilung P und $EY^2 < \infty$. Gesucht ist eine *Vorhersage* von Y aufgrund von X, d.h. eine Funktion $m(\cdot)$ derart, daß $m(X)$ „nahe" bei Y liegt. Wird „nahe" durch[39] $E(Y - m(X))^2 = \min$ präzisiert, so ist $m(\cdot)$ die *Regression von Y über X*, d.h. $m(\cdot) = E(Y|X = \cdot)$. Liegt wie beim Histogramm eine äquidistante, von n abhängige Einteilung von $\mathbb{R}$ in disjunkte Intervalle I_{nj} der Länge h zugrunde, so ergibt sich hieraus in Analogie zu (44) der *Regressogramm*- oder *Partitionenschätzer*

$$(62) \qquad \widehat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) Y_i, \quad W_{ni}(x) := \frac{\mathbf{1}_{I_{nj}}(X_i)}{\sum_{\ell=1}^n \mathbf{1}_{I_{nj}}(X_\ell)}, \quad x \in I_{nj}.$$

Kernschätzer Besitzt P eine zweidimensionale Dichte $f(x, y)$, gilt also

$$(63) \qquad m(x) = \int y f(x,y) dy \Big/ \int f(x,y) dy, \quad \text{falls} \int f(x,y) dy > 0,$$

so läßt sich ein Schätzer von $m(\cdot)$ dadurch gewinnen, daß man $f(x, y)$ analog (45) schätzt und diesen Schätzer $\widetilde{f}_n(x, y)$ in (63) einsetzt. Hierzu sei $\widetilde{k}$ ein zweidimensionaler Kern, genauer eine Funktion $\widetilde{k} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ mit $\int\int \widetilde{k}(u, v) du\, dv = 1$ und $\int v\widetilde{k}(u, v) dv = 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$. Dann wird durch $k(u) := \int \widetilde{k}(u, v) dv, u \in \mathbb{R}$, ein (ein-

[38] Vielfach minimiert man $\sum_{i=1}^n (y_i - m(x_i))^2$ stattdessen unter Einschränkung von m auf eine geeignete Funktionenklasse.

[39] Während für Dichteschätzer eigentlich eine $\mathbb{L}_1$-Theorie adäquat ist, vgl. [DevG85], ist für Regressionsschätzer wegen der rechnerischen Einfachheit eine $\mathbb{L}_2$-Theorie allgemein üblich.

dimensionaler) Kern definiert. Setzt man den analog (45) gebildeten Schätzer

$$\tilde{f}_n(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_n}\frac{1}{h'_n}\tilde{k}\left(\frac{x-X_i}{h_n},\frac{y-Y_i}{h'_n}\right)$$

in (63) ein, so ergibt sich der *Nadaraya-Watson-Schätzer* (NW-Schätzer)

$$(64) \qquad \widehat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)Y_i, \quad W_{ni}(x) := k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\Big/\sum_{\ell=1}^{n}k\left(\frac{x-X_\ell}{h_n}\right).$$

Dieser ist ein linearer Schätzer mit den nicht-negativen Gewichten $W_{ni}(x)$, $\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) = 1$, der von der Bandbreite h'_n unabhängig ist und für den man nur den eindimensionalen Kern k, nicht aber den zweidimensionalen Kern $\tilde{k}$ und die Existenz einer zweidimensionalen Dichte f benötigt. Er läßt sich deshalb auch zur Schätzung in Modellen mit festem Design verwenden.

Lokal lineare Regressionsschätzer Der NW-Schätzer läßt sich auffassen als ein gewichteter Kleinste-Quadrate-Schätzer $\widehat{m}_{n,0}(x)$; mit $\beta_0 \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$(65) \qquad \widehat{m}_{n,0}(x) = \underset{\beta_0}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)(Y_i - \beta_0)^2.$$

Interpretiert man β_0 als lokale Approximation der Regressionskurve $m(\cdot)$ in der Umgebung der Stelle x, so läßt sich $\widehat{m}_{n,0}(x)$ dadurch verbessern, daß man $m(z)$ für $z \approx x$ durch ein Polynom $m_p(z) = \sum_{j=0}^{p}\beta_j(z-x)^j$ approximiert. So ergibt sich der *lokal polynomiale Regressionsschätzer* (LP-Schätzer) der Ordnung p

$$(66) \qquad \widehat{m}_{n,p}(x) = \underset{\beta_0}{\operatorname{argmin}}\left\{\min_{\beta_1,\dots,\beta_p}\sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\left[Y_i - \sum_{j=0}^{p}\beta_j(X_i-x)^j\right]^2\right\}.$$

Speziell für $p = 1$ folgt der (in x) *lokal lineare Regressionsschätzer* (LL-Schätzer). Für diesen gilt mit $S_{n,j}(x) := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_n}k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)(X_i-x)^j, j = 1,2,$

$$\widehat{m}_{n,1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(x)Y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i(x)}, \quad w_i(x) = \frac{1}{h_n}k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\left\{S_{n,2}(x) + \frac{x-X_i}{h_n}S_{n,1}(x)\right\}.$$

$\widehat{m}_{n,1}(x)$ist eine Verbesserung des NW- und GM-Schätzers, da er asymptotisch die jeweils kleinere der beiden Verzerrungen und Varianzen besitzt.

Im Gegensatz zum Übergang von $\widehat{m}_{n,0}(x)$ zu $\widehat{m}_{n,1}(x)$ bringt derjenige von $\widehat{m}_{n,1}(x)$ zu $\widehat{m}_{n,2}(x)$ asymptotisch keine weitere Verkleinerung von[40] MSE(x|**X**). Beschränkt man sich nämlich auf die Klasse $\mathfrak{C}_2$ der zweidimensionalen Dichten f, deren zugehörige Regressionsfunktionen m durch $C > 0$ beschränkte 2. Ableitungen m'' besitzen und deren Design-Dichten f_1 sowie deren bedingte Varianzen an der Stelle x stetig und positiv sind, so wird das *lineare Minimax-Risiko*

$$(67) \qquad R_L(n,x,\mathfrak{C}_2) := \inf_{\widehat{m}\text{ linear}}\ \sup_{f\in\mathfrak{C}_2} E\big((\widehat{m}(x)-m(x))^2|\mathbf{X}\big)$$

---

[40] LL-Schätzer sind auch bei deterministischem Design, insbesondere mit $x_i = F^{-1}(i/n), i = 1,\dots,n$, anwendbar. Um die asymptotischen Güteeigenschaften vergleichbar zu haben, werden bei zufälligem Design bedingte EW bei gegebenem $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)$ betrachtet.

asymptotisch angenommen durch den mit dem Epanechnikov-Kern (53) und der Bandbreite $h_n(x) = (15\sigma^2(x)/f_1(x)C^2n)^{1/5}$ gebildeten LL-Schätzer $\widehat{m}^*_{n,1}(x)$ und zwar mit der nach [Sto80], [Sto82] optimalen Konvergenzrate $O(n^{-4/5})$.

Bezeichnet man als *lineare Minimax-Effizienz* von $\widehat{m}_L(x)$ den Ausdruck

$$e_L(\widehat{m}_L(x)) = \Big(R_L(n,x,\mathfrak{C}_2)/\sup_{f\in\mathfrak{C}_2} E\big((\widehat{m}_L(x)-m(x))^2|\mathbf{X}\big)\Big)^{5/4},$$

so gilt also $e_L(\widehat{m}^*_{n,1}(x)) \to 1$ nach WS, dagegen bei Verwendung des Gauß-Kerns $e_L(\widehat{m}_{n,1}(x)) \to 0{,}951$ nach WS und bei dem mit dem Epanechnikov-Kern gebildeten GM-Schätzer nur $e_L(\widehat{m}_{n,0}(x)) \to 0{,}667$ nach WS (Fan, 1992). $\widehat{m}_{n,1}(x)$ hat auch bzgl. der Klasse aller Schätzer $\widehat{m}(x)$ eine hohe Minimax-Effizienz.

Variable Bandbreite Abgesehen von (67) wurde bisher eine von der betrachteten Stelle x unabhängige Bandbreite gewählt. Bei einer nicht-konstanten Design-Dichte f_1 liegt es jedoch nahe, diese dort kleiner zu wählen, wo mehr Design-Punkte sind, d.h. wo $f_1(x)$ größer ist[41]. Dies zeigt auch die (50) entsprechende Wahl der Bandbreite aufgrund einer Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers. Bei Zugrundelegen des LL-Schätzers ergibt sich etwa [Sim96]

$$\mathrm{MSE}(x|\mathbf{X}) = \left[\frac{h^2m''(x)\sigma_k^2}{2}\right]^2 + \frac{R(x)\sigma^2(x)}{nhf_1(x)} + o_p(h^4+(nh)^{-1})$$

und damit durch Minimierung des asymptotisch relevanten Anteils

$$(68)\qquad h = h_n(x) = \left[\frac{R(k)\sigma^2(x)}{n\sigma_k^4(m''(x))^2 f_1(x)}\right]^{1/5}$$

mit $\inf_{h>0}\mathrm{AMSE}(x|\mathbf{X}) = O(n^{-4/5})$. Eine einfache Antwort auf den eingangs erläuterten Sachverhalt bilden auch die k_n-*Nächste-Nachbarn-*(NN-)*Schätzer* $\widetilde{m}_n(x)$, bei denen die lokale Mittelbildung durch das arithmetische Mittel über eine nur von n abhängige Anzahl k_n von Werten Y_i erfolgt, nämlich über diejenigen, für die die zugehörigen x_i die zur Stelle x k_n-nächst benachbarten Design-Punkte sind. Erwähnt sei, daß sich die asymptotische Normalität für eine leichte Modifikation $m_n(x)$ von $\widetilde{m}_n(x)$ unter sehr schwachen Voraussetzungen beweisen läßt, insbesondere ohne die Existenz von $f_1(x)$ vorauszusetzen [Stu84].

Fehlerschranken Diese lassen sich in Form von *Konfidenzintervallen* (bei festem x) bzw. *Konfidenzbändern* (simultan für alle x) angeben, welche die gesuchten Größen $m(x)$ bzw. $m(\cdot)$ asymptotisch mit einer vorgegebenen Mindest-WS $1-\alpha$ überdecken. Die Konstruktion der Konfidenzintervalle beruht darauf, daß die zuvor betrachteten Schätzer zumeist auch asymptotisch normalverteilt sind, d.h. daß es für jedes x aus dem (kompakten) Design-Bereich D Zahlen $B(x)$ und $\tau(x) > 0$ gibt derart, daß mit der Folge (h_n) der globalen Bandbreiten gilt

$$\mathfrak{L}\Big(\sqrt{nh_n}(\widehat{m}_n(x)-m(x))\Big) \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{N}\big(B(x),\tau^2(x)\big).$$

[41] Entsprechendes gilt bei großen Werten von $|m''(x)|$ bzw. kleinen Werten von $\sigma^2(x)$.

Damit ist $\{m(x) : |\sqrt{nh_n}(\widehat{m}_n(x) - m(x)) - B(x)| \leq \tau(x)u_{\alpha/2}\}$ ein derartiges Intervall. Häufig ist sogar der Prozeß $\sqrt{nh_n}(\widehat{m}_n(\cdot) - m(\cdot)) - B(\cdot)$ gegen einen zentrierten Gauß-Prozeß $G(\cdot)$ verteilungskonvergent. Dann läßt sich analog aufgrund der Verteilung von $\sup_{x\in D}|G(x)|$ bzw. ihres $(1-\alpha)$-Fraktils G_α ein Konfidenzband angeben. Unter Verwendung des entsprechenden Resultats für (Kern-)Dichteschätzer von Bickel-Rosenblatt (1973) wurde dies für den NW-Schätzer in [Li82] gezeigt[42]. Dabei wird in beiden Arbeiten die Bandbreite h_n derart gewählt, daß sie für $n \to \infty$ rascher gegen 0 strebt als $n^{-1/5}$. Bei einer derartigen *Unterglättung* kann die Verzerrung $E\widehat{m}_n(\cdot) - m(\cdot)$ gegenüber dem stochastischen Anteil $\widehat{m}_n(\cdot) - E\widehat{m}_n(\cdot)$ vernachlässigt werden. Dieser läßt sich durch einen Gauß-Prozeß und damit die Verteilung des Supremums durch eine Extremwertverteilung approximieren. Die Konvergenzrate hierbei ist jedoch nur $(\log n)^{-1}$ [KonP84]. Im Fall von Dichteschätzern wurde diese durch eine Bootstrap-Approximation im Anschluß an eine Edgeworth-Entwicklung zu $(nh_n)^{-1/2}(\log n)^2$ verbessert [Ha93]; im Fall der nichtparametrischen Regression wurde diese Rate durch Heranziehen einer „starken Approximation" zur Rechtfertigung der Bootstrap-Approximation sowie zusätzlicher Überlegungen[43] erzielt [NePo98].

Universelle Konsistenz; Anpassung Bisher wurden Güteaussagen vornehmlich unter Voraussetzungen erwähnt, die zwar vergleichsweise einfache Beweise gestatten, die aber in der Praxis nicht überprüfbar sind, da sie sich z.B. auf die unbekannte Regressionsfunktion beziehen. Dem stehen Aussagen gegenüber, deren Voraussetzungen bei allen zweidimensionalen Verteilungen, insbesondere also bei der zugrundeliegenden, erfüllt sind. Benötigt wird hierzu der Begriff der universellen Konsistenz. Zunächst heißt ein Schätzer $\widehat{m}_n$ *schwach* bzw. *stark konsistent* für m, falls für die betrachtete Verteilung $P = \mathfrak{L}(X, Y)$ gilt:

$$(69) \qquad \int |\widehat{m}_n(x) - m(x)|^2 dP^X(x) \to 0 \quad \text{in } \mathbb{L}_1 \text{ bzw. f.s.}$$

Ein Schätzer $\widehat{m}_n$ heißt *schwach* bzw. *stark universell konsistent* für m, falls (69) für alle P mit $EY^2 < \infty$ gilt. Die schwache universelle Konsistenz wurde für NN-Schätzer in [Sto77] gezeigt und für Kernschätzer von Spiegelmann-Sacks (1980) bzw. von Devroye-Wagner (1980). Die starke universelle Konsistenz wurde für NN-Schätzer in [DGKL94], für Kern- und Regressogrammschätzer in [Wa97] hergeleitet[44]. Es gibt also Schätzer, für die der Ausdruck

$$(70) \qquad E\int |\widehat{m}_n(x) - m(x)|^2 dP^X(x)$$

für jede Verteilung P mit $EY^2 < \infty$ gegen 0 konvergiert. In [Dev82] wurde jedoch gezeigt, daß es keinen Schätzer $\widehat{m}_n$ gibt, für den (70) simultan für alle P mit $EY^2 < \infty$ schneller als irgendeine beliebig vorgegebene Nullfolge gegen 0 konvergiert. Um von

[42] Zu diesbzgl. Bootstrap-Methoden vgl. [HdMa91] oder [Hd90].

[43] U.a. die Verwendung eines lokal polynomialen Schätzers bei einem Modell mit festem Design und nicht äquidistanten Design-Punkten sowie nicht konstanten Varianzen, was die Anwendung des in [HdMm93] entwickelten „wild bootstrap" erforderlich macht.

[44] Es existiert kein Regressions- und kein Dichteschätzer mit einer entsprechenden Konsistenzeigenschaft für beliebige stationäre ergodische Folgen; vgl. [AdNo98].

diesen, hauptsächlich für Mathematiker interessanten Ergebnissen zu in der Praxis relevanten Aussagen zu kommen, sind also Zusatzvoraussetzungen erforderlich.

Eine automatische Anpassung der Schätzer an die dem Statistiker unbekannte Glattheit von m ist durch Anwendung des *Prinzips der strukturellen Risikominimierung* [Va82] (*Komplexitätsregulierung*) möglich. Dies ist unter Regularitätsannahmen an die zugrundeliegende Verteilung u.a. in [BBM95] gezeigt worden; vgl. auch die dort zitierte Literatur. Unter alleiniger Beschränkung auf Verteilungen mit beschränktem Träger und der erwähnten Lipschitz-Bedingung wurde dies in [Ko98] untersucht. Dort wurden mit einem Kleinste-Quadrate-Ansatz Spline-Schätzer konstruiert, welche die Konvergenzrate $(n/\log n)^{-k/(2k+1)}$, $k := r + \beta$ (mit r und β wie vorne), erreichen. Dabei läßt sich sogar die optimale Rate (ohne den logarithmischen Faktor) erzielen [Ko97].

Neben der optimalen Rate interessiert natürlich auch der bestmögliche Vorfaktor. Diese Problemstellung wird in den meisten Arbeiten, die sich um die Bestimmung der bestmöglichen Rate bemühen, nicht aufgegriffen; eine Ausnahme bilden Nussbaum (1985) und [GoNu90].

Einige Kollegen waren so freundlich, den Entwurf durchzusehen. Hierfür wie für nützliche Hinweise sei ihnen auch an dieser Stelle gedankt.

Literatur

[Aa78] Aalen, O.: Nonparametric inference for a family of counting processes, Ann. Stat. **6**, 701–726 (1978)

[AdNo98] Adams, T.M.; Nobel, A.B.: On density estimation from ergodic processes, Ann. Prob. **26**, 794–804 (1998)

[ABvZ76] Albers, W., Bickel, P.J., van Zwet, W.R.: Asymptotic expansions for the power of distribution free tests in the one-sample problem, Ann. Stat. **4**, 108–156 (1976)

[ABGK93] Andersen, P.K.; Borgan, Ø.; Gill, R.D.; Keiding, N.: Statistical Models Based on Counting Processes, Springer (1993)

[Ba60] Bahadur, R.R.: Stochastic comparison of tests, Ann. Math. Stat. **31**, 276–295 (1960)

[Ba71] Bahadur, R.R.: Some Limit Theorems in Statistics, SIAM (1971)

[BBM95] Barron, A.R.; Birgé, L.; Massart, P.: Risk bounds for model selection via penalization, Techn. Report No. 95–54, Université Paris Sud (1995)

[Be71] Behnen, K.: Asymptotic optimality and ARE of certain rank-order tests under contiguity, Ann. Math. Stat. **42**, 325–329 (1971)

[Be76] Behnen, K.: Asymptotic comparison of rank tests for the regression problem when ties are present, Ann. Stat. **4**, 157–174 (1976)

[BeN89] Behnen, K.; Neuhaus, G.: Rank Tests with Estimated Scores and Their Application, Teubner (1989)

[BGvZ97] Bentkus, V.; Götze, F.; van Zwet, W.R.: An Edgeworth expansion for symmetric statistics, Ann. Stat. **25**, 851–896 (1997)

[Bi74] Bickel, P.J.: Edgeworth expansions in nonparametric statistics, Ann. Stat. **2**, 1–20 (1974)

[BKRW93] Bickel, P.J.; Klaassen, C.A.; Ritov, Y.; Wellner, J.A.: Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models, Johns Hopkins U.P. (1993)

[BvZ78] Bickel, P.J.; van Zwet, W.R.: Asymptotic expansions for the power of distribution free tests in the two-sample problem, Ann. Stat. **6**, 937–1004 (1978)

[Bil68] Billingsley, P.: Convergence of Probability Measures, Wiley (1968)

[Bo96] Bosq, D.: Nonparametric Statistics for Stochastic Processes, Lect. Notes in Stat. 110 (1996)

[BMFW92] Burger, H.U.; Müller-Funk, U.; Witting, H.: On locally optimal nonparametric tests, Methods and Models of Operat. Research **36**, 163–184 (1992)

[Bur93] Burger, H.U.: Nonparametric tests for two-sample dispersion problems: problems with known dispersion centers, J. Nonparam. Stat. **2**, 249–269 (1993)

[ChS58] Chernoff, H.; Savage, I.R.: Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics, Ann. Math. Stat. **29**, 972–994 (1958)

[Dev82] Devroye, L.: Any discrimination rule can have an arbitrarily bad probability of error for finite sample size, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. **4**, 154–157 (1982)

[DevG85] Devroye, L.; Györfi, L.: Nonparametric Density Estimation, The L_1 View, Wiley (1985)

[DevL97] Devroye, L.; Lugosi, G.: Nonasymptotic universal smoothing factors, kernel complexity and Yatracos classes, Ann. Stat. **25**, 2626–2637 (1997)

[DGKL94] Devroye, L.; Györfi, L.; Krzyżak, A.; Lugosi, G.: On the strong universal consistency of nearest neighbor regression function estimates, Ann. Stat. **22**, 1371–1385 (1994)

[DJKP95] Donoho, D.L.; Johnstone, I.M.; Kerkyacharian, G.; Picard, D.: Wavelet shrinkage: Asymptopia (with discussion),Journ. R. Statist. Soc. B. **57**, 301–369 (1995)

[FaGi96] Fan, J.; Gijbels, I.: Local Polynomial Modelling and Its Applications, Chapman & Hall (1996)

[Gi80] Gill, R.D.: Censoring and Stochastic Integrals,Math. Centr. Tracts **124** (1980)

[GoNu90] Gobulev, G.K.; Nussbaum, M.: A risk bound in Sobolev class regression, Ann. Stat. **18**, 758–778 (1990)

[Hd90] Härdle, W.: Applied Nonparametric Regression, Cambridge U.P. (1990)

[HdMa91] Härdle, W.; Marron, J.S.:Bootstrap simultaneous error bars for nonparametric regression, Ann. Stat. **19**, 778–796 (1991)

[HdMm93] Härdle, W.; Mammen, E.:Comparing nonparametric regression fits, Ann. Stat. **21**, 1926–1947 (1993)

[Haj62] Hájek, J.: Asymptotically most powerful rank-order tests,Ann. Math. Stat. **33**, 1124–1147 (1962)

[Haj70] Hájek, J. : A characterization of limiting distributions of regular estimates, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **14**, 323–330 (1970)

[HajS67] Hájek, J.; Šidák, Z.:Theory of Rank Tests, Academia (1967)

[Ha88] Hall, P.: Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals, Ann. Stat. **16**, 927–953 (1988)

[Ha93] Hall, P.: On Edgeworth expansion and bootstrap confidence bands in nonparametric curve estimation, J. R. Statist. Soc., Ser. B **55**, 291–304 (1993)

[HaMP92] Hall, P.; Marron, J.S.; Park, B.U.:Smoothed cross-validation, Prob. Th. Rel. Fields **92**, 1–20 (1992)

[HaPa95] Hall, P.; Patil, P.: Formulae for mean integrated squared error of nonlinear wavelet-based density estimators,Ann. Stat. **23**, 905–928 (1995)

[HL56] Hodges, J.L.; Lehmann, E.L.: The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test, Ann. Math. Stat. **27**, 324–335 (1956)

[HL70] Hodges, J.L.; Lehmann, E.L.: Deficiency, Ann. Math. Stat. **41**, 783–801 (1970)

[IH81] Ibragimov, I.A.; Has'minskii, R.Z.: Statistical Estimation: Asymptotic Theory, Springer (1981)

[Ja95] Janssen, A.: Principal component decomposition of nonparametric tests, Prob. Th. Rel. Fields **101**, 193–209 (1995)

[Ko97] Kohler, M.: On optimal global rates of convergence for nonparametric regression with random design, Preprint 97–11, Mathem. Inst. A, Univ. Stuttgart (1997)

[Ko98] Kohler, M.: Nonparametric regression function estimation using interaction least squares splines and complexity regularization, Metrika **47**, 147–163 (1998)

[KonP84] Konakov, V.D.; Piterbarg, V.I.: On the convergence rate of maximal deviation distribution for kernel regression estimates, J. Multiv. Anal. **15**, 279–294 (1984)

[KJ91] Kotz, S.; Johnson, N.L. (eds): Breakthroughs in Statistics, Vol. I, Springer (1991)

[KJ92] Kotz, S.; Johnson, N.L. (eds): dto., Vol. **II**, Springer (1992)

[KJ97] Kotz, S.; Johnson, N.L. (eds): dto., Vol. **III**, Springer (1997)

[LC60] Le Cam, L.:Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. Calif. Publ. Statist. **3**, 37–98 (1960)
[LC72] Le Cam, L.: Limits of experiments, Proc. of the 6th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., Vol. 1, Univ. Calif. Press, 245–261 (1972)
[Le59] Lehmann, E.L.: Testing Statistical Hypotheses, Wiley (1959), (1986)
[Lev78] Levit, B.Ya.: Infinite-dimensional informational lower bounds, Theory Prob. Appl. **23**, 371–377 (1978)
[Li82] Liero, H.: On the maximal deviation of the kernel regression function estimate, Statistics **13**, 171–182 (1982)
[LugZ95] Lugosi, G.; Zeger, K.: Nonparametric estimation via empirical risk minimization, IEEE Trans. Inf. Th. **41**, 677–687 (1995)
[Mm92] Mammen, E.: When Does Bootstrap Work, Lect. Notes in Stat. **77** (1992)
[Mi85] Millar, P.W.: Non-parametric applications of an infinite dimensional convolution theorem, Z. Wahrsch. verw. Geb. **68.** 545–556 (1985)
[MiSt90] Milbrodt, H.; Strasser, H.: On the asymptotic power of the two-sided Kolmogorov-Smirnov test, J. Stat. Plann. Inference **26**, 1–23 (1990)
[MF83] Müller-Funk, U.: A quantitative SLLN for linear rank statistics, Statistics & Decisions **1**, 371–378 (1983)
[Neu76] Neuhaus, G.: Asymptotic power properties of the Cramér-von Mises test under contiguous alternatives, J. Multiv. Anal. **6**, 95–110 (1976)
[Neu93] Neuhaus, G.: Conditional rank tests for the two-sample problem under random censorship, Ann. Stat. **21**, 1760–1779 (1993)
[NePo98] Neumann, M.H.; Polzehl, J.: Simultaneous bootstrap confidence bands in nonparametric regression; J. Nonparam. Statist., (1998)
[Nik95] Nikitin, Y.: Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests, Cambridge U.P. (1995)
[Par62] Parzen, E.: On estimation of a probability density function and mode, Ann. Math. Stat. **33**, 1065–1076 (1962)
[Pf79] Pfanzagl, J.: First order efficiency implies second order efficiency, in: Contributions to Statistics, Academia (1979)
[Pit49] Pitman, E.J.G.: Lecture Notes on Nonparametric Statistical Inference, (Columbia University, unpublished) (1949)
[Pol84] Pollard, D.: Convergence of Stochastic Processes, Springer (1984)
[Ros56] Rosenblatt, M.:Remarks on some nonparametric estimates of a density function, Ann. Math. Stat. **27**, 832–837 (1956)
[Rü88] Rüschendorf, L.: Asymptotische Statistik, Teubner (1988)
[Sch59] Schmetterer, L.: Über nichtparametrische Methoden in der Mathematischen Statistik, Jahresbericht der DMV **61**, 104–126 (1959)
[ShW86] Shorack, G.R.; Wellner, J.A.: Empirical Processes with Applications to Statistics, Wiley (1986)
[Sil84] Silverman, B.W.: Spline smoothing: The equivalent variable kernel method, Ann. Stat. **12**, 898–916 (1984)
[Sim96] Simonoff, J.S.: Smoothing Methods in Statistics, Springer (1996)
[Sto77] Stone, Ch.J.: Consistent nonparametric regression, Ann. Stat. **5**, 595–645 (1977)
[Sto80] Stone, Ch.J.: Optimal rates of convergence for nonparametric estimates, Ann. Stat. **8**, 1348–1360 (1980)
[Sto82] Stone, Ch.J.: Optimal global rates of convergence for nonparametric regression, Ann. Stat. **10**, 1040–1053 (1982)
[Stu84] Stute, W.: Asymptotic normality of nearest neighbour regression function estimates, Ann. Stat. **12**, 917–926 (1984)
[vdVW96] van der Vaart, A.W.; Wellner, J.A.: Weak Convergence and Empirical Processes, With Applications to Statistics, Springer (1996)
[Va82] Vapnik, V.: Estimation of Dependencies Based on Empirical Data, Springer (1982)
[Wa97] Walk, H.: Strong universal consistency of kernel and partitioning regesssion estimates, Preprint 97–1, Mathem. Inst. A, Univ. Stuttgart (1997)

[WMF95] Witting, H.; Müller-Funk, U.: Mathematische Statistik II, Asymptotische Statistik: Parametrische Modelle und nichtparametrische Funktionale, Teubner (1995)
[vZ84] van Zwet, W.R.:A Berry-Esseen bound for symmetric statistics, Z. Wahrsch. verw. Geb. **66**, 425–440 (1984)

Hermann Witting
Institut für Mathematische Stochastik
Universität Freiburg
Eckerstr. 1
D-79104 Freiburg
email: witting@markov.mathematik.uni-freiburg.de

(*Eingegangen 13. 5. 1998*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
100 (1998) 238–252
Mathematics Subject Classification: 35 J 50, 58 E 20, 49 Q 20
Keywords and Phrases: nonlinear elliptic system, regularity, calculus of variations, harmonic maps.

Nonlinear elliptic systems

M. Giaquinta, Pisa

This is a survey article on nonlinear elliptic systems arising from multidimensional calculus of variations. It has been written on request of the Editorial Board of Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung on the occasion of the publication of their 100th volume. I should like to thank the colleagues of Jahresberichte and the German Mathematical Society for the great honour that has fallen to me with this invitation.

The paper does not aim at completeness but only at discussing a few selected topics mainly about the regularity theory for nonlinear elliptic systems following the paper by E. Hölder [52] in Jahresbericht of 1959. The choice of the topics obviously depends on the taste of the author, on his limited knowledge and on the intention of keeping the paper in reasonable size: I shall therefore apologize for the many relevant omissions.

1 Elliptic systems

We shall deal with systems of PDE of the type

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha A_i^\alpha(x, u(x), Du(x)) = B_i(x, u(x), Du(x)) \qquad i = 1, \dots, N$$

where x is a point in a domain Ω in $\mathbf{R}^n$, $u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$ is a map from Ω into $\mathbf{R}^N$ and Du stands for the Jacobian matrix $Du = (D_\alpha u^i)$. They naturally arise as Euler-Lagrange equations of general energies

$$(2) \qquad \mathcal{F}(u; \Omega) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))dx$$

with

$$(3) \qquad A_i^\alpha = F_{p_\alpha^i} \quad \text{and} \quad B_i = F_{u^i} \quad .$$

For the sake of simplicity we shall assume in this paper that F be a smooth function satisfying

$$(4) \qquad \begin{array}{l} |p|^2 \le F(x, u, p) \le \Lambda |p|^2 + \mu, \quad |F_p(x, u, p)| \le c|p| + \mu \\ |F_{pp}(x, u, p)| \le \mu, \quad |F_u(x, u, p)| \le a|p|^2 + b \end{array}$$

and similar inequalities for A and B, which were defined in (3). Conditions (4) are usually referred to as to *natural growth conditions.*

Three special cases of (1) turn out to be especially relevant and give us the opportunity to illustrate the different notions of *ellipticity.*

Linear systems. Considering homogeneous systems with no lower order terms, they have the form[1]

(5) $$D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(x)D_\beta u^j) = 0 \ .$$

In this case ellipticity amounts to the requirement that (5) be *strongly elliptic*, i.e.

(6) $$A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\ \xi_\alpha\xi_\beta\ \eta^i\eta^j \geq |\xi|^2|\eta|^2 \qquad \forall\xi\in\mathbf{R}^n\ \ \forall\eta\in\mathbf{R}^N \ .$$

If the coefficients $A_{ij}^{\alpha\beta}$ are constant, (6) yields via Fourier transform the basic local (and under Dirichlet boundary conditions even global) coercivity estimate for solutions of (5)

(7) $$\int_{B_{R/2}} |Du|^2 dx \leq \frac{c}{R^2}\int_{B_R} |u-\lambda|^2 dx \ .$$

where λ is any constant. Korn's perturbation argument allows us to infer (7) even in case of continuous coefficients, provided R is small in dependence of the modulus of continuity of the $A_{ij}^{\alpha\beta}$'s. This is nothing else than the local version of the classical *Gårding inequality* [8].

Quasilinear systems. Consider the simple variational integral

$$\mathcal{F}(v;\Omega) = \int_\Omega F(Dv)dx$$

If v is a local minimizer, i.e.,

(8) $$\mathcal{F}(v;\Lambda) \leq \mathcal{F}(w;\Lambda) \qquad \forall\Lambda\subset\subset\Omega\ \ \forall w \text{ with } spt(v-w)\subset\Lambda$$

then v solves

$$D_\gamma\ F_{p_\gamma^h}(Dv) = 0$$

and differentiating in the s-direction

$$D_\gamma(F_{p_\gamma^h p_\sigma^k}(Dv)D_\sigma(D_s v^k)) = 0 \ .$$

We thus see that Dv solves a quasilinear system of the form

(9) $$D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(u(x))D_\beta u^j) = 0 \ .$$

For solutions of such systems estimate (7) is not anymore valid under the sole strong ellipticity condition [27], but of course it still holds if we assume *super ellipticity*, i.e.

(10) $$A_{ij}^{\alpha\beta}(u)\ \xi_i^\alpha\xi_j^\beta \geq |\xi|^2 \qquad \forall\xi\in\mathbf{R}^{nN} \ .$$

---

[1] From now on we will understand summation over repeated indices.

In terms of the Lagrangian F this amounts to saying that F is *convex*. The growth condition in (4) and the convexity of F ensures sequential lower semicontinuity of the energy $\mathcal{F}(u;\Omega)$ with respect to the weak convergence in the Sobolev class $W^{1,2}(\Omega,\mathbf{R}^N)$ by classical results of L. Tonelli and C.B. Morrey, see e.g. [56], and consequently existence (under various boundary conditions) of $W^{1,2}$-minimizers of the energy $\mathcal{F}(v;\Omega)$. Actually all previous arguments apply to $W^{1,2}$-minimizers and lead to $W^{1,2}$-solutions of (9).

Quasilinear systems with quadratic lower order terms. Except for existence, the previous arguments do not work for Lagrangians F's depending explicitly by u. Already for the simple integral

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(u(x))D_\alpha u^i D_\beta u^j dx$$

it is easily seen that we cannot take variations in the directions of general $W_0^{1,2}$ vectors but only of $W_0^{1,2}\cap L^\infty$-vectors; we still arrive in the sense of distributions at Euler-Lagrange equations

$$(11)\qquad D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(u(x))D_\beta u^j(x)) = A_{hk,u^i}^{\alpha\beta}(u(x))D_\alpha u^h(x)D_\beta u^k(x)\quad ,$$

which however have right hand side only in L^1, but examples show, compare e.g. [16], that $W^{1,2}$-solutions of (11) do not have square integrable second derivatives.

Returning to the general case, in the early fifties C.B. Morrey [54] pointed out that a necessary condition for the lower semicontinuity (for instance with respect to uniform convergence of sequences with equibounded Lipschitz constants) is *quasi-convexity* which can be stated: for all x_0 and u_0 fixed and constant and for all constant vectors p

$$(12)\qquad \int_\Omega F(x_0,u_0,p)dx \le \int_\Omega F(x_0,u_0,p+D\varphi)dx \qquad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbf{R}^N)$$

or, in words, affine mappings are minimizers (with respect to their own boundary values) of the frozen functional

$$\mathcal{F}_0(v;\Omega) := \int_\Omega F(x_0,u_0,Dv)dx\quad .$$

Morrey showed also that quasiconvexity implies semicontinuity with respect to sequences $\{v_k\}$ weakly converging in $W^{1,2}$, provided the Dirichlet integrals of the v_k's be equi-absolutely continuous. On the basis of a theorem by F.C. Liu [50], which states that $W^{1,2}$-maps are Lipschitz except on small sets whose measure is well estimated by the Dirichlet integral, E. Acerbi and N. Fusco [1] were able to eliminate this last condition, so that we can conclude that, under the growth condition (4), quasiconvexity is equivalent to the sequential lower semicontinuity with respect to the weak convergence in $W^{1,2}$ of the integral (2). In particular together with (4) it provides existence of $W^{1,2}$-minimizers (with various boundary conditions).

Unfortunately quasiconvexity is a rather complicated condition, in particular it is not a pointwise condition on F (or its derivatives). It is strictly weaker than convexity or superellipticity, but stronger than Legendre-Hadamard condition or strong ellipticity. In terms of the A's in (1), uniform quasiconvexity can be stated as

$$\int A_i^\alpha(x_0, u_0, p + D\varphi)\, D_\alpha \varphi^i\, dx \geq \int |D\varphi|^2 dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbf{R}^N) \ .$$

Typical examples of quasiconvex integrands are convex functions of the determinants of the minors of the Jacobian matrix Du; other interesting examples are given by V. Šverák [70], [71]. For further discussion of quasiconvexity we refer to B. Dacorogna [7] and M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček [31].

Variational problems play a relevant role in geometry (e.g. harmonic forms, harmonic mappings, minimal immersions), in mathematical physics (e.g. mechanics, gauge theory, classical σ-models), continuum mechanics (e.g. linear and nonlinear elasticity, liquid crystals) or in modelling (as for instance microstructures of macroscopic continuum bodies). And specific problems are in some sense the essence of calculus of variations. However a general approach which does not lose contact with specific questions is important and useful in order to better understand similarities and differences and range and limits of various approaches.

Until the late sixties two general principles, which correspond to the well known Hilbert's 20th and 19th problems, have been the main motivation to the study of nonlinear elliptic systems. According to Hilbert's 20th problem it is conceivable that every reasonable variational problem has a solution provided the notion of solution be suitably extended. As we have rapidly seen above, in a simple situation, it is really so, but in principle we are able to provide only *weak solutions*, say for instance in a Sobolev space. This motivates the question stated in Hilbert's 19th problem, which has sometimes been interpreted as the principle that solutions of reasonable variational problems are *regular*. Starting from the late sixties it has been realized that even very reasonable problems may have singular minimizers and their singularities might be of mathematical and physical interest. Therefore a basic question, the *regularity problem*, is regarded nowadays as the qualitative study of minimzers or critical points including their singularities. We shall be concerned in this article with some issues of this question in the limited setting of weak solutions of nonlinear elliptic systems we have described above.

2 Linear systems

Linear strongly elliptic systems with smooth coefficients are quite well understood as a result of researches which span over half a century and include contributions of many mathematicians. We shall not repeat the story here, but only state a few results, and, as consequence of those results we state the following theorem of C.B. Morrey concerning nonlinear elliptic systems.

Theorem 2.1 *Suppose that A_i^α and B_i be smooth functions and*

$$(13) \qquad \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial p_\beta^j}(x, u, p)\ \xi_\alpha \xi_\beta\ \eta^i \eta^j \geq |\xi|^2 |\eta|^2 \qquad \forall \xi, \eta \ .$$

Then every C^1-solution of the system

$$D_\alpha A_i^\alpha(x, u(x),\ Du(x)) = B_i(x, u(x),\ Du(x))$$

is as smooth as the data allow (C^∞ or analytic, if A and B are C^∞ or analytic). In particular C^1-minimizers of variational integrals whose integrands satisfy Legendre-Hadamard conditions are as smooth as the integrands allow.

Linear systems with constant coefficients. The basic estimate

$$\sup_{B_{1/2}} |u|^2 \leq c \int_{B_1} |u|^2 dx$$

which holds for any solution of a strongly elliptic system with constant coefficients

$$(14) \qquad D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta} D_\beta u^j) = 0$$

yields the following two estimates known as Morrey-Campanato estimates.

Theorem 2.2 *Let u be a solution of (14) in some open set Ω and suppose that (13) holds. Then for all x_0 and all $0 < \varrho < R < dist(x_0, \partial\Omega)$ we have*

$$\begin{aligned} \int_{B_\varrho(x_0)} |u|^2 dx &\leq c\Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^n \int_{B_R(x_0)} |u|^2 dx \\ \int_{B_\varrho(x_0)} |u - u_{x_0,\varrho}|^2 dx &\leq c\Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |u - u_{x_0,R}| \end{aligned}$$

where

$$u_{x_0,R} := \fint_{B(x_0,R)} u \, dx = \frac{1}{\text{meas } B_r} \int_{B_R(x_0)} u \, dx \quad .$$

Linear systems with smooth coefficients. Using the classical Korn's device, i.e., writing

$$(15) \qquad D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^j) = D_\alpha f_i^\alpha$$

as

$$D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) D_\beta u^j) = D_\alpha f_i^\alpha + D_\alpha[(A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x)) D_\beta u^j] \quad ,$$

Schauder and L^p-estimates now follow using Theorem 2, see e.g. [16], [20] for details and references. In particular, *if u is a solution of the strongly elliptic system* (15), *we have*

(i) *if $A_{ij}^{\alpha\beta}$ and f_i^α are Hölder-continuous, then $D_\alpha u^i$ are Hölder-continuous*

(ii) *if $A_{ij}^{\alpha\beta}$ are continuous and f_i^α are in BMO, then $D_\alpha u^i$ are in BMO.*

By interpolation one also infers

(iii) *if $A_{ij}^{\alpha\beta}$ are continuous and f_i^α are in L^p, $1 < p < \infty$, then $D_\alpha u^i$ are in L^p.*

A beautiful application of those results is the classical decomposition theorem for differential forms, see [55], discussed by Hölder in [52], which may be referred to as *Hodge-Kodaira-Morrey theorem*, compare [56], [66], [31]: *every L^2 form in a compact oriented and boundaryless Riemannian manifold decomposes as*

$$\omega = h + \delta\alpha + d\beta$$

where h is harmonic and the derivatives of α and β are in L^2, L^p or $C^{0,\alpha}$ according to the L^2, L^p or $C^{0,\alpha}$ regularity of ω.

To illustrate some of the ideas mentioned above let us outline the proof of a well known result which however seems not so easy to find in the literature.

Proposition 2.1 *Let u be a Hölder-continuous solution of*

$$\Delta u = f(x,u,Du)$$

where

$$|f(x,u,p)| \leq c(1+|p|^2) \quad .$$

Then u has Hölder-continuous first derivatives, hence u is as regular as f allows.
For any fixed $B_R(x_0)$, denoting by H the harmonic function which agrees with u on $\partial B_R(x_0)$, we infer from Theorem 2 for $\rho < R$

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \quad &\leq \quad c\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x_1)} |Du|^2 dx \\ &\quad + c\int_{B_R(x_0)} |u-H||f(x,u,Du)|dx \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 dx \quad &\leq \quad c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |Du-(Du)_{x_1,R}|^2 dx \\ &\quad + c\int_{B_R(x_0)} |u-H||f(x,u,Du)dx \end{aligned} \tag{17}$$

As

$$\int_{B_R(x_0)} |u-H||f(x,u,Du)|dx < cR^{n+\alpha} + cR^\alpha \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 dx \quad ,$$

by iterating (16) one infers for some positive ε

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leq c\rho^{n-\varepsilon} \quad ,$$

and inserting in (17), and again iterating,

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 dx \leq c\rho^{n+\beta}$$

for some positive β. Being this true for all x_0 in an open set and for all ρ less than some ρ_0, a well known theorem by S. Campanato [6] yields Hölder continuity of the derivatives of u.

3 Elliptic equations with bounded coefficients

Among nonlinear elliptic systems scalar equations hold a special place. This is due to the celebrated result [9] of E. De Giorgi in 1957 which solves completely Hilbert's regularity question for variational integrals

$$(18) \quad \int F(Du)dx$$

with growth condition (4), provided u be *scalar*. A similar result for parabolic equations was independently obtained in 1958 by J. Nash [69]. Those results are nowadays referred to as

Theorem 3.1 (De Giorgi-Nash) *Let u be a solution of*

$$(19) \quad D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta u) = 0$$

where $A^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ and $A^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq |\xi|^2$. Then u is Hölder-continuous.
This of course implies regularity for the derivatives of minimizers of (18) as they are solutions of the equation in variation (9). Theorem 3.1 was proved again with a completely different method, now known as *Moser's iteration technique,* by J. Moser [58] who also proved in [59] the validity of an interior Harnack inequality.

Theorem 3.2 (Moser) *Under the asumptions of the previous theorem, if moreover u is a positive solution in B_{2R}, then*

$$\sup_{B_R} u \leq c \inf_{B_R} u \quad ,$$

c being an absolute constant.
More recently it has been realized that Harnack inequality follows also from an oscillation lemma of De Giorgi [9], which we state because of its own interest, and a covering lemma due to N.V. Krylov and M.V. Safanov of the type of A.P. Calderon and A. Zygmund decomposition argument.

Theorem 3.3 (De Giorgi oscillation lemma) *Let v be a solution of (19) in B_1 with*

$$v \leq 1 \quad \text{and} \quad meas\{x \in B_1\} \mid v \leq 0\} =: \mu > 0 \quad .$$

Then

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq \lambda(\mu) < 1 \quad .$$

Following De Giorgi-Moser-Nash results the theory of regularity for equations with measurable coefficients and nonlinear equations developed quickly with many contributions among others by C.B. Morrey, G. Stampacchia, O. Ladyzhenskaya, N. Uraltseva, J. Serrin. This is not the occasion to repeat this path, the interested reader is referred to the monographs of C.B. Morrey [56], O. Ladyzhenskaya and N. Uraltseva [49] and D. Gilbarg and N. Trudinger [32]. We would like to point out only two facts. While minimizers, equivalently critical points, of integrals of the type $\int F(x, Du)dx$ are smooth, only minimizers of general integrals $\int F(x, u, Du)dx$, (4), $N = 1$, are smooth, see e.g. [49], while critical points or solutions of (1), $N = 1$, are smooth provided they are bounded. Examples of unbounded critical points are shown in [14]. The theory, in the opinion of the author, clarifies and assumes a unified character via the notion of *quasi-minima* introduced in [21], [24]. For such a presentation, which results as a direct approach to regularity we refer to [16], [18], [20], [34]. Its main issue is that regularity depends on a minimality (or better quasiminimality) condition, and C^1-regularity does not need differentiability of the variational integral. We state from [22]

Theorem 3.4 *Assume that*

$$|p|^2 \le F(x,u,p) \le |p|^2, \quad |F_{pp}(x,u,p)| \le , \quad F_{p_\alpha p_\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \ge |\xi|^2$$

and moreover that $(1+|p|^2)^{-1}F(x,u,p)$ *is Hölder-continuous in* (x,u) *uniformly with respect to* p. *Then* $W^{1,2}$*-minimizers of* $\int_\Omega F(x,u,Du)dx$ *have Hölder-continuous first derivatives in* Ω.

4 Systems: partial regularity

Despite some hopes to extend De Giorgi's result to systems, in 1968 De Giorgi [10] showed that his result for equations cannot be extended to systems. Integrals such as

$$(20) \qquad \int A_{ij}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^j dx \ \text{ with } \ A_{ij}^{\alpha\beta} \in L^\infty, \ \ A_{ij}^{\alpha\beta}\ \xi_\alpha^i\xi_\beta{}^j \ \ge |\xi|^2 \ \ \forall\xi$$

may have unbounded minimizers. Later J. Souček [62] showed that minimizers may even have a dense set of discontinuity. Singular minimizers of superelliptic energies like

$$(21) \qquad \int A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u(x))\ D_\alpha u^i(x)\ D_\beta u^j(x)\ dx$$

or singular solutions of quasilinear elliptic systems of the type

$$(22) \qquad D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j) = 0$$

were shown by E. Giusti and M. Miranda, V. Mazya. M. Giaquinta showed that singularities occur at the boundary even in presence of regular Dirichlet data, and J. Nečas, O. John and J. Stara gave examples of Lipschitz but non differentiable minimizers of convex integrals of the type

$$\int F(Du)dx \ .$$

All examples are in dimension at least three, in fact full regularity in dimension $n = 2$ has been well known since the work of C.B. Morrey in 1948.

For dimension $n \ge 3$, at least in general, there is only hope for *partial regularity*, i.e. regularity except possibly on a closed singular set. Partial regularity was in fact proved by C.B. Morrey [57] and E. Giusti, M. Miranda [35] for solutions to quasilinear superelliptic systems like (46) which arise as systems in variation for integrals of the type

$$\int F(x,Du)dx$$

compare Section 1. The proof relies on an indirect argument of blow-up which originates in geometric measure theory and particularly from the work of E. De Giorgi and F. Almgren in the theory of regularity of codimension one minimal surfaces. Here one should also mention, in connection with partial regularity for general systems, V. Scheffer's thesis [61] of which people working on the subject have been unaware for long time.

Of course the question of finding special structures which allow full regularity naturally arises from those results. Apart from systems with diagonal principal part, to which we shall return later, the only known result up to now is the beautiful theorem by K. Uhlenbeck [73], compare also [30], [15], which essentiallay states that *minimizers of energy with Lagrangians of the type* $F(Du) = G(|Du|^2)$, *G convex, have Hölder-continuous first derivatives.*

The interest in the (partial) regularity of solutions to nonlinear elliptic systems, though never faded, renewed itself in the late seventies. In the opinion of the author the main motivation for that stems from two reasons: the interest in the stored energy functionals in nonlinear elasticity, which involve determinants of the minors of the Jacobian of a deformation and therefore quasiconvex integrals, following the work by J. Ball [2]; and the works of S. Hildebrandt, H. Kaul and K.O. Widman, which we shall discuss below, on harmonic maps into Riemannian manifolds with positive sectional curvature, which involve integrals of the type

$$\int h^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(u) D_\alpha u^i D_\beta u^j \sqrt{\det(h_{\alpha\beta})}\, dx \tag{23}$$

and diagonal systems.

In the late seventies a new direct approach to partial regularity was developed by M. Giaquinta, E. Giusti and E. Modica, based on Cacciopoli's inequality and higher integrability of the gradient of solutions. Higher integrability follows from a reverse Hölder inequality via an extension of a result by F.W. Gehring due to M. Giaquinta and G. Modica [29]. Also the indirect approach was improved by L.C. Evans, R.F. Gariepy, N. Fusco, E. Acerbi, J. Hutchinson. Here we are not going to dwell anymore on this, as various surveys and reports are now available, e.g. [16], [17], [19], [34], [13], [18], and we just state one theorem.

Theorem 4.1 *Assume that*

(i) $|p|^2 \le F(x,u,p) \le \Lambda(1+|p|^2)$

(ii) F is of class C^2 *and* $(1+|p|^2)^{-1}F(x,u,p)$ *is Hölder-continuous uniformly with respect to p.*

(iii) F is strictly quasiconvex, $\forall x_0, u_0, p_0$, $\forall \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbf{R}^N)$

$$\int [F(x_0,u_0,p_0 + D\varphi) - F(x_0,u_0,p_0)]\, dx \ge \nu \int |D\varphi|^2 dx, \qquad \nu > 0\,.$$

Then any minimizer $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^N)$ *of* $\int_\Omega F(x,u,Du)dx$ *has Hölder-continuous first derivatives except possibly on a singular closed set of measure zero.*

5 Regularity for harmonic maps

Harmonic maps are the natural generalization of harmonic functions and geodesics; they are critical points of the Dirichlet energy. If u is a map between two Riemannian manifolds $(\mathcal{X}, h)$ and $(\mathcal{Y}, g)$, the Dirichlet integral is

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}} |du|^2 d\,\mathrm{vol}_{\mathcal{X}} \quad ,$$

and in local coordinates has the form (23). In dimension two harmonic maps are closely related to minimal immersions. Invoking the Nash embedding theorem, the vanishing of the first variation in several situations is expressed in terms of a diagonal system with quadratic lower term. For instance, if $\mathcal{Y}$ is the standard sphere S^2, we find

$$-\Delta u = u|Du|^2 \qquad u = (u^1, u^2, u^3) \quad .$$

For dimension of $\mathcal{X}$ two the regularity of energy minimizing maps was established by C.B. Morrey [53] in 1948, for conformal maps by M. Grüter [36] in 1981, for stationary maps, that is for critical points which are stationary with respect to reparametrizations, i.e. with vanishing inner variation in the terminology of [26], by R. Schoen [63] in 1983, and finally for general weakly harmonic maps by F. Hélein [39] in 1991.

In dimension larger than or equal to three the regularity problem is more difficult. In fact in contrast to the two-dimensional case T. Rivière [60] in 1995 has given examples of everywhere discontinuous $W^{1,2}$ critical points of the Dirichlet integral for maps u from B^3 into S^2.

The first positive result in dimension $n \geq 3$ is contained in the foundational paper by J. Eells and J. Sampson [11] in 1964. By considering the heat flow associated to the Dirichlet energy they show, in the case of boundaryless compact manifolds *existence of smooth harmonic maps* $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *provided* $\mathcal{Y}$ *has non positive sectional curvature;* a variational proof was provided by K. Uhlenbeck [72] in 1970.

Till the late seventies the regularity question for targets with positive sectional curvature remained open. A turn occurred at that time, in the opinion of the author, due to the work of S. Hildebrandt, H. Kaul and K.O. Widman and to the stimulating atmosphere which established itself in Bonn especially under the influence of Stefan Hildebrandt. Such a turn involved not only the problem of harmonic maps, but also the regularity question for general integrals we have discussed above.

S. Hildebrandt, H. Kaul and K.O. Widman pointed out that the equator map $(x/|x|, 0)$ from B^n into $S^n \subset R^{n+1}$ is a weakly harmonic map. W. Jäger and H. Kaul [44] proved that in fact it is a $W^{1,2}$ minimizer of the energy for $n \geq 6$ and R. Schoen and K. Uhlenbeck [64] and M. Giaquinta and J. Souček [28] proved that energy minimizing maps from B^n into the closed hemisphere S^n_+ are regular provided $n \leq 7$.

In a series of papers S. Hildebrandt and K.O. Widman studied diagonal systems (one should also mention contributions in this respect by J. Frehse and M. Wiegner). Here we only mention one such result and refer to the surveys by S. Hildebrandt [43], [40], [41], [42] for details and the precise bibliography.

Theorem 5.1 *Let u be a weak solution of*

$$-D_\beta(A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u^i) = f^i(x,u,Du)$$

with

$$\begin{aligned} |A^{\alpha\beta}| &\leq \mu, & A^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta &\geq \lambda|\xi|^2 \qquad \forall\xi \\ |f(x,u,p)| &\leq aA^{\alpha\beta}(x,u)p^i_\alpha p^i_\beta + b \\ u\cdot f(x,u,p) &\leq a^*A^{\alpha\beta}(x,u)p^i_\alpha p^i_\beta + b^* \end{aligned}$$

Then the conditions $|u| \leq M$ *and* $aM + a^* < 2$ *(and in particular* $aM < 1$*) imply Hölder continuity of u.*

The study of diagonal systems led S. Hildebrandt, H. Kaul and K.O. Widman [45] to the following optimal theorems which play a fundamental role in several instances of the theory of harmonic maps, compare the monographs by J. Jost [46], [47], [48].

Theorem 5.2 *Let* $\phi : \partial\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *be a prescribed boundary map of class* C^1 *such that* $\phi(\partial\mathcal{X})$ *is strictly contained in a regular ball* $\mathcal{B}(Q,M)$ *of* $\mathcal{Y}$*, i.e. in a geodesic ball around Q with radius M with*

(i) $\sqrt{\kappa}M < \frac{\pi}{2}$ $\quad \kappa := \max(0, \sup_{\mathcal{B}(Q,M)} \kappa_{\max})$, $\kappa_{\max}(x)$ *being an upper bound for the sectional curvature at x*

(ii) $C(Q) \cap \mathcal{B}(Q,M)$ *is empty,* $C(Q)$ *being the cut locus of the center Q.*

Then the Dirichlet integral has a minimizer in the class $\{u \in W^{1,2}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \mid u = \phi$ *on* $\partial\mathcal{X}, u(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}(Q,M)\}$*. Moreover u is weakly harmonic.*

Theorem 5.3 *Suppose* $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *is a weakly harmonic map with range* $u(\mathcal{X})$ *contained in a regular ball* $\mathcal{B}(Q,M)$*. Then u is a regular harmonic map.*

For an alternative proof of Theorem 5.3 we also refer to [25], [31].

In 1981 the author, who was visiting the University of Bonn, together with E. Giusti [21], [23] proved

Theorem 5.4 *Let u be a local* $W^{1,2}$*-minimizer of the integral*

$$\int_\Omega A^{\alpha\beta}_{ij}(x,u)D_\alpha u^i D_\beta u^j dx$$

where the $A^{\alpha\beta}_{ij}$ *are smooth and superelliptic.*

(i) Then there exists an open set Ω_0 *such that* $u \in C^{0,\gamma}(\Omega,\mathbf{R}^N)$ *and* $\mathcal{H}^{n-q}(\Omega\setminus\Omega_0) = 0$ *for some* $q > 2$

(ii) If moreover $A^{\alpha\beta}_{ij} = h^{\alpha\beta}(x)g_{ij}(u)$ *and u is bounded, then the singular set* $\Omega\setminus\Omega_0$ *is discrete in* $\mathcal{X}$ *if* $\dim\mathcal{X} = 3$ *and has Hausdorff dimension* $\leq \dim\mathcal{X} - 3$ *in case* $\dim\mathcal{X} \geq 4$.

Theorem 5.4 applies of course to harmonic maps in case the image of u lies in a coordinate neighbourhood of $\mathcal{Y}$. The general partial regularity theorem for harmonic maps was proved independently by R. Schoen and K. Uhlenbeck [65].

Theorem 5.5 *An energy minimizing map $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ is smooth away from a closed subset of $\mathcal{X}$ which is discrete if* $\dim \mathcal{X} = 3$ *and has Hausdorff dimension* $\dim \mathcal{X} - 3$ *if* $n \geq 4$.

Following F. Hélein, L.C. Evans [12] in case of mappings into spheres and F. Bethuel [3] in general proved that *any stationary harmonic map is smooth on $\mathcal{X} \setminus \Sigma_u$ where Σ_u is closed and* $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_u) = 0$. Theorem 5.5 is optimal, in fact F.H. Liu [51] has proved that the map $x/|x|$ is energy minimizing from B^3 into S^2.

A natural question associated to any partial regularity theorem is that of the structure of the singular set. In this respect we mention the works of L. Simon, compare [67], [68], and in particular the following

Theorem 5.6 *If $u \in W^{1,2}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ is energy minimizing and $\mathcal{Y}$ is real analytic, then, for each closed ball B, the singular set of u in B is the union of a finite pairwise disjoint collection of* $(n-3)$*-rectifiable locally compact subsets.*

Somewhat more is known in the case of energy minimizing maps u from a n-ball into S^2. If $n = 3$ H. Brezis, J.M. Coron and H. Lieb [5] proved that *u has degree ± 1 around each singular point,* and, if $n = 4$, R. Hardt and F.H. Lin [37] proved that *the singular set consists of a finite set and finitely many Hölder continuous closed curves with only finitely many crossings.*

6 Graphs

The $W^{1,2}$-approach to harmonic maps trivially may cause the appearance of singularities in harmonic maps. In fact this occurs for instance whenever the Dirichlet boundary φ admits a finite energy extension but no continuous extension, e.g. $\varphi :=$ id from $\partial B^3 \simeq S^2$ into S^2. However singularities may also occur in presence of no topological obstruction, simply because they allow for less energy. This was shown by R. Hardt and F.H. Lin [38] who gave an example of a smooth degree zero map $\varphi : \partial B^3 \to S^2$ such that

$$
\begin{aligned}
&\inf\left\{\frac{1}{2}\int |Du|^2 dx \mid u \in W^{1,2}(B^3, S^2),\ u = \varphi \text{ on } \partial B^3\right\} \\
&< \inf\left\{\frac{1}{2}\int |Du|^2 dx \mid u \in W^{1,2} \cap C^0(\overline{B^3}, S^2),\ u = \varphi \text{ on } \partial B^5\right\}
\end{aligned} \tag{24}
$$

By considering a smooth minimizing sequence there is, in this case, lost in energy (by taking weak limits in $W^{1,2}$) presumably (and in fact) due to the cost for creating the singularities. This is the *sphere bubbling* off or *separation phenomenon* already pointed out by J. Sacks and K. Uhlenbeck, and in the work of H. Wente.

According to F. Bethuel, H. Brezis and J.M. Coron [4] the right hand side of (24) can be written as

$$\frac{1}{2}\int |Du|^2\, dx + 4\pi\, L(u) \ ;$$

and the question now becomes that of understanding the term $L(u)$ and studying the regularity of minimizers. This has been done in terms of the notion of *Cartesian* *currents,* roughly currents carried by graphs. But this would force us to deviate from our main topic. Therefore we simply refer the interested reader to the recent monograph [31] by M. Giaquinta, G. Modica and J. Souček.

References

[1] *E. Acerbi and N. Fusco:* Semicontinuity problems in the calculus of variations. Arch. Rat. Mech. Anal. **86** (1986), 125–145.

[2] *J.M. Ball:* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. **63** (1977), 337–403.

[3] *F. Bethuel:* On the singular set of stationary harmonic maps. manuscripta math. **78** (1993), 417–443.

[4] *F. Bethuel, H. Brezis, J.M. Coron:* Relaxed energies for harmonic maps. In: Variational methods, Ed. H. Berestycki, J. Coron and J. Ekeland, Birkhäuser, Basel 1990.

[5] *H. Brezis, J.M. Coron, E.H. Lieb:* Harmonic maps with defects. Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649–705.

[6] *S. Campanato:* Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni. Ann. S.N.S. Pisa **17** (1963), 175–188.

[7] *B. Dacorogna:* Direct methods in the claculus of variations. Springer-Verlag, Berlin 1989.

[8] *L. Gårding:* Dirichlet problem for linear partial differential equations. Math. Scand. **1** (1953), 55–72.

[9] *E. De Giorgi:* Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino **3** (1957), 25–43.

[10] *E. De Giorgi:* Un esempio discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico. Boll. UMI **4** (1968), 135–137

[11] *J. Eells and J. Sampson:* Harmonic mappings of Riemannian manifolds. American J. Math. **86** (1964), 109–160.

[12] *L.C. Evans:* Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres. Arch. Rat. Mech. Anal. **116** (1991), 101–113.

[13] *L.C. Evans, R.F. Gariepy:* Blow-up, compactness and partial regularity in the calculus of variations. Indiana U. Math. J. **36** (1987), 361–371.

[14] *J. Frehse:* A note on the Hölder continuity of solutions of variational problems. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **43** (1975), 59–63.

[15] *N. Fusco, J. Hutchinson:* Partial regularity of minimizers of certain functionals having non quadratic growth. Ann. Math. Pure Appl. **155** (1989), 1–24.

[16] *M. Giaquinta:* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Ann. of Math. Studies **105.** Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.

[17] *M. Giaquinta:* The regularity problem of extremals of variational integrals. In: Systems of Nonlinear PDE, Ed. J. Ball, D. Reidel Publ. Co. 1983.

[18] *M. Giaquinta:* The problem of the regularity of minimizers. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians vol. II, Ed. Andrew. M. Gleason, Amer. Math. Soc. (1986), 1072–1083.

[19] *M. Giaquinta:* Quasiconvexity, growth conditions and partial regularity. In: Partial Differential Equations and Calculus of Variations, Ed. S. Hildebrandt and R. Leis, Springer Lecture Notes in Math. **1357** (1988).

[20] *M. Giaquinta:* Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems. Lectures in Math., ETH Zürich. Birkhäuser, Basel, 1993.

[21] *M. Giaquinta, E. Giusti:* On the regularity of the minima of variational integrals. Acta Math. **148** (1982), 31–46.

[22] *M. Giaquinta, E. Giusti:* Differentiability of minima of nondifferentiable functionals. Invent. Math. **72** (1983), 285–298.

[23] *M. Giaquinta, E. Giusti:* The singular set of the minima of quadratic functionals. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **11** (1984), 45–55.

[24] *M. Giaquinta, E. Giusti:* Quasi-minima. Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire **1** (1984), 79–104.

[25] *M. Giaquinta, S. Hildebrandt:* A priori estimates for harmonic mappings. J. Reine Angew. Math. **336** (1982), 124–164.

[26] *M. Giaquinta, S. Hildebrandt:* Calculus of Variations, 2 vols. Grundlehren math. Wiss. **310, 311**, Springer, Berlin 1996.

[27] *M. Giaquinta, J. Souček:* Cacciopoli's inequality and Legendre-Hadamard condition. Math. Ann. **270** (1985), 105–107.

[28] *M. Giaquinta, J. Souček:* Harmonic maps into a hemisphere. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **12** (1985), 81–90.

[29] *M. Giaquinta, G. Modica:* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems, J. f. reine u. angew. Math. **311/312** (1979), 145–169.

[30] *M. Giaquinta, G. Modica:* Remarks on the regularity of minimizers of certain degenerate functionals. manuscripta math. **57** (1986), 55–99.

[31] *M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček:* Cartesian Currents in the Calculus of Variations, 2 vols, Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgebiete, no. **37, 38**, Springer, Berlin, 1998

[32] *D. Gilbarg and N. Trudinger:* Elliptic partial differential equations of second order. Grundlehren math. Wiss. Springer, Berlin 1977. Second edition 1994.

[33] *E. Giusti:* Some aspects of the regularity theory for nonlinear elliptic systems. In: Systems of Nonlinear PDE, Ed. J. Ball, D. Reidel Publ. Co. 1983.

[34] *E. Giusti:* Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni. Unione Matematica Italiana, Bologna 1994.

[35] *E. Giusti, M. Miranda:* Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari. Arch. Rat. Mech. Anal. **31** (1968), 173–184.

[36] *M. Grüter:* Regularity of weak H-surfaces. J. reine angew. Math. **329** (1981), 1–15.

[37] *R. Hardt, F.H. Lin:* The singular set of an energy minimizing map from B^4 to S^2. manuscripta math. **69** (1990), 275–289.

[38] *R. Hardt, F.H. Lin* A remark on H^1 mappings. manuscripta math. **56** (1986), 1–10.

[39] *F. Hélein:* Regularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **312** (1991), 591–596.

[40] *S. Hildebrandt:* Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings. In: Proc. 1980 Bejing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Equ. **vol. 1**, Ed. S.S. Chern, Science Press, Bejing, China (1982), 481–615.

[41] *S. Hildebrandt:* Liouville theorems for harmonic mappings and an approach to Bernstein theorems. In: Sem. Diff. Geometry, Annals of Math. Studies, Ed. S.T. Yau, Princeton Univ. Press (1982).

[42] *S. Hildebrandt:* Quasilinear elliptic systems in diagonal form. In: Systems of Nonlinear PDE, Ed. J. Ball, D. Reidel Publ. Co. 1983.

[43] *S. Hildebrandt:* Harmonic mappings of Riemannian manifolds. In: Harmonic mappings and minimal immersions, Lecture Notes in Math. **1161**, Ed. E.Giusti, Springer, Berlin – New York (1985), 1–117.

[44] *W. Jäger, H. Kaul:* Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields. manuscripta math. **28** (1979), 269–291.

[45] *S. Hildebrandt, H. Kaul, K.O. Widman:* An existence theorem for harmonic mappings of Riemannina manifolds. Acta Math. **138** (1977), 1–16.

[46] *J. Jost:* Harmonic mappings between Riemannian manifolds. Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra 1984.

[47] *J. Jost:* Harmonic maps between surfaces. Springer-Verlag, Berlin-New York 1984.

[48] *J. Jost:* Two dimensional geometric variational problems. Wiley-Interscience, Chichester 1991.

[49] *O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uralt'seva:* Linear and quasilinear elliptic equations. Nauka, Moscow 1964. (Engl. translation: Academic Press, New York 1968; Second Russian edition: Nauka 1973).

[50] *F.C. Liu:* A Lusin type property of Sobolev functions. Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 645–651.

[51] *F.H. Lin:* A remark on the map $x/|x|$. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math **305** (1987), 529–531.
[52] *E. Hölder:* Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung, Jahresbericht d. DMV **62** (1959), 34–52.
[53] *C.B. Morrey:* The problem of Plateau on a Riemannian manifold. Ann. of Math. **49** (1948), 807–851.
[54] *C.B. Morrey:* Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. Pacific J. Math. **2** (1952), 25–53.
[55] *C.B. Morrey:* A variational method in the theory of harmonic integrals. Amer. J. Math. **78** (1956), 137–170.
[56] *C.B. Morrey:* Multiple integrals in the calculus of variations. Grundlehren math. Wissenschaften 130. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[57] *C.B. Morrey:* Partial regularity results for nonlinear elliptic systems. Jour. Math. and Mech. **17** (1968), 649–670.
[58] *J. Moser:* A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 457–468.
[59] *J. Moser:* On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 577–591.
[60] *T. Rivière:* Everywhere discontinuous maps into spheres. Acta Math. **175** (1995), 197–226.
[61] *V. Scheffer:* Regularity and irregularity of solutions to nonlinear second order elliptic systems of partial differential equations and inequalities. PhD thesis, Princeton 1974.
[62] *J. Souček:* Singular solutions to linear elliptic systems. Comment. Math. Univ. Carolinae **23** (1984), 273–281.
[63] *R. Schoen:* Analytic aspects of the harmonic map problem. In: Seminar on nonlinear partial differential equations, Ed. S.S. Chern, Math. Sci. Res. Publ. **2**, Springer, New York – Berlin (1984), 321–358.
[64] *R. Schoen, K. Uhlenbeck:* Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere. Invent. Math. **78** (1984), 89–100.
[65] *R. Schoen, K. Uhlenbeck:* A regularity theory for harmonic maps, J. Diff. Geom. **17** (1982), 307–335.
[66] *G. Schwarz:* Hodge decomposition. A method for solving boundary value problems. Springer Lecture Notes in Math. **1607.** Berlin 1995.
[67] *L. Simon:* Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps. ETH Lectures on Mathematics, Birkhäuser, Basel 1995.
[68] *L. Simon:* Proof of the basic regularity theorem for harmonic maps. In: Nonlinear Partial Differential Equations in Differential Geometry, Ed. R. Hardt and M. Wolf, Amer. Math. Soc., Providence 1996, 225–256.
[69] *J. Nash:* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. **8** (1958), 931–954.
[70] *V. Šverák:* Quasiconvex functions with subquadratic growth. Proc. Roy. Soc. London Ser. A **433** (1991), 723–725.
[71] *V. Šverák:* New examples of quasiconvex functions. Arch. Rat. Mech. Anal. **119** (1992), 293–300.
[72] *K. Uhlenbeck:* Harmonic maps: a direct method in the calculus of variations. Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 1082–1087.
[73] *K. Uhlenbeck:* Regularity for a class of nonlinear elliptic systems. Acta Math. **138** (1977), 219–240.

M. Giaquinta
Dipartimento di Matematica
Universitá di Pisa
Via F. Buonarroti, 2
I-56127 Pisa
giaquinta@dm.unipi.it

(*Eingegangen 15. 6. 1998*)

Buchbesprechungen

Taylor, M. E., Partial Differential Equations, I, II, III (Applied Mathematical Sciences, vols. 115, 116, 117), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1996, 563 + xxii, 528 + xxii, 610 + xxii Seiten, pro Band DM 98,–. Band I liegt auch als Studienausgabe zum Preis von DM 58,– vor.

Michael Taylor legt ein dreibändiges Werk über partielle Differentialgleichungen vor, eine vom Inhalt und Umfang erstaunliche Leistung. Ziel seiner Darstellung ist es, Studenten aber auch Hochschullehrern viele Aspekte dieser zentralen mathematischen Disziplin für das Studium bzw. für Vorlesungen zugänglich zu machen. Er teilt sein Werk wie folgt ein:

Band I „Basic Theory" mit den Kapiteln 1. Basic Theory of ODE and Vector Fields, 2. The Laplace Equation and Wave Equation, 3. Fourier Analysis, Distributions, and Constant-Coefficient Linear PDE, 4. Sobolev Spaces, 5. Linear Elliptic Equations, 6. Linear Evolution Equations, und den beiden Anhängen A. Outline of Functional Analysis, B. Manifolds, Vector Bundles, and Lie Groups;
Band II „Qualitative Studies of Linear Equations" mit den Kapiteln 7. Pseudodifferential Operators, 8. Spectral Theory, 9. Scattering by Obstacles, 10. Dirac Operators and Index Theory, 11. Brownian Motion and Potential Theory, 12. The $\bar{\partial}$-Neumann Problem sowie dem Anhang C. Connections and Curvature;
Band III „Nonlinear Equations" mit den Kapiteln 13. Function Space and Operator Theory for Nonlinear Analysis, 14. Nonlinear Elliptic Equations, 15. Nonlinear Parabolic Equations, 16. Nonlinear Hyperbolic Equations, 17. Euler and Navier-Stokes Equations for Incompressible Fluids, 18. Einstein's Equations.

Sehr wichtig an dieser Darstellung ist m. E., daß der Autor aufzeigt, wie die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, wie sie in den fünfziger bis siebziger Jahren entwickelt wurde, man vergleiche hierzu vor allem das vierbändige Werk von L. Hörmander „The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV", welches leider nie im Jahresbericht gewürdigt wurde (!), heute bei vielen Fragen der modernen linearen wie auch der nicht-linearen Theorie ein unverzichtbares Hilfsmittel ist. Dies wird zum Beispiel deutlich bei der Spektraltheorie von Differentialoperatoren und der Behandlung des $\bar{\partial}$-Neumann-Problems (ohne Pseudodifferentialoperatoren geht es dort nicht), um zwei Probleme aus der linearen Theorie zu nennen, aber auch bei der Diskussion von Paradifferentialoperatoren, dem Ausbreiten von Singularitäten von Lösungen nicht-linearer hyperbolischer Gleichungen (wer sich nicht vorweg, wie im Buch geschehen, Grundkenntnisse der mirolokalen Analysis angeeignet hat, kommt hier nicht weiter), oder bei einigen Fragen aus der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen, um einige Beispiele aus der nicht-linearen Theorie anzuführen. Außerdem wird deutlich aufgezeigt, daß viele Fragen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen nur beantwortet werden können, wenn man sich einen vernünftigen differentialgeometrischen Apparat aneignet. Es wird aber auch gezeigt, wie einige Gebiete der Geometrie durch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen bereichert werden, etwa im Rahmen der Index-Theorie.

Kurz, von der Auswahl des Stoffes und der Art und Weise, wie die Dinge miteinander verknüpft werden, handelt es sich um ein wunderschönes Werk (dem man noch ein Kapitel über „Harmonic Analysis" im Sinne der Calderon-Zygmund-Stein-Tradition hinzufügen sollte).

Um all die schönen Dinge zu behandeln (auf immerhin 1701 Seiten) muß aber ein Preis, m. E. ein sehr hoher Preis, entrichtet werden. Nicht bei Springer, die Bücher sind sicherlich nicht zu teuer, zumal Band I als preiswerte Studienausgabe vorliegt, sondern beim Arbeiten mit dem Text. Viele Beweise sind nur Skizzen, enthalten nicht-triviale Passagen als „exercise left to the reader", oder der Autor hat das Vermögen Dinge „easily" zu sehen, die anderen Leuten sicherlich Kopfzerbrechen bereiten werden. Meistens ist es aber möglich mit der angegebenen Literatur, viel Papier und einigem Zeitaufwand diese Lücken zu schließen.

Wer Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen hält, sollte diese Bücher sicherlich zur Hand nehmen, aber auch der, der sich über moderne Entwicklungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (auch außerhalb Deutschlands) informieren möchte. Studenten dürften sich zunächst schwer tun mit dem Stil des Autors, aber auch ihnen können die Bücher zum weiteren Studium nach einem einführenden Kurs in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen sehr empfohlen werden.

Erlangen N. Jacob

Kawauchi, A., A Survey of Knot Theory, Basel u. a.: Birkhäuser 1996, 440 S., DM 128,–

The aim of this book is, according to the author, to inform advanced undergraduate and graduate students in mathematics as well as researchers in related disciplines about knot theory and how to study it. This problem is nontrivial and of current interest: knot theory is undergoing rapid progress. Moreover, it is used in many areas of modern mathematics. The discovery of a number of new invariants of knots and links (Jones, Homfly and Kauffman polynomials) in the mid-eighties was followed by an extension of these invariants by using quantum groups and methods of statistical mechanics. On the other hand Edward Witten's introduction of methods of quantum fields theory into the subject and the discovery of new invariants of 3-manifolds are related directly to the new knot invariants. Finally the use of Seiberg-Witten's industry leads to a new collection of interesting results and productive conjectures.

To solve this problem the author uses his first version of "Knot Theory" which was published originally in Japanese by Springer-Verlag Tokyo in 1990. The new English version surveys the entire scope of knot theory which was developed before 1995. There is a list of contributors who wrote down selected subjects on basic materials and contributed to the English translation. Because of this the book is not homogeneous but the author bears sole responsibility for the accuracy of the contents.

After a preliminary chapter the author begins in Chapter 1 with the presentations of knots. Chapter 2 deals with standard examples and Chapter 3 with compositions and decompositions of links.

Chapters 4 and 5 are on Seifert surfaces: topological and algebraic approaches. The next chapter contains information on the fundamental group.

At last in Chapter 6 Alexander polynomials appear. Here there are very important supplementary notes which illuminate the history of the subject.

Chapters 7 and 8 are on Jones type polynomials: topological and algebraic approaches again. The next chapter contains all kinds of symmetries which appeared in the long knot theory history.

Chapter 11 deals with local transformations and Chapter 12 with cobordisms: the knot cobordism group and the matrix cobordism group.

Chapters 13 and 14 contain the two-knots theory: topological and algebraic approaches. The next chapter contains applications of knot theory to the topology of molecules that is knot theory of special graphs.

The last Chapter 16 deals with the modern invariants: Vassiliev-Gusarov invariants and Kontsevich's iterated integral invariant.

The author hopes that some parts of this book can be read by less advanced undergraduates. So the book is completed by six appendices illuminating the "classical" constructions. The last appendix contains full tables of experimental data of knot theory.

Thus the book is a reasonably self-contained prequantum topological version of knot theory. Furthermore there is a very thorough bibliography and an indication of where to go to pursue any of the more specialized subjects.

The book has several interesting features, however it is not a suitable textbook for (under)graduate students. Instead it is a comprehensive book of reference for research workers using knot theory in their investigations.

Moscow A. N. Tyurin

Leibniz, G. W., Sämtliche Schriften und Briefe. Dritte Reihe: Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briefwechsel. Unter Aufsicht der Akademie der Wissenschaften in Göttingen herausgegeben vom Leibniz-Archiv der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. 3. Band: 1680–Juni 1683, Berlin: Akademie Verlag 1991. LX + 896 S., 140 Abb., geb., DM 490,–. – 4. Band: Juli 1683–1690, Berlin: Akademie Verlag 1995. LXVI + 748 S., 80 Abb., geb. (mit Beilage: Korrespondentenverzeichnis 1663–1690), DM 490,–

Leibniz, G. W., Sämtliche Schriften und Briefe. Siebente Reihe: Mathematische Schriften. Herausgegeben vom Leibniz-Archiv der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. 2. Band: 1672–1676, Algebra (2. Teil). Berlin: Akademie Verlag 1996. XXXIII + 887 S., 53 Abb., geb., DM 490,–

Ergänzend zur Besprechung der Bände III,2 und VII,1 im Jber. d. Dt. Math.-Verein. **94** (1992) 2. Abt., 25–27 sind hier drei weitere Bände mathematisch-naturwissenschaftlichen Inhaltes der „Akademie-Ausgabe" der Werke von Leibniz anzuzeigen. Zunächst die beiden Briefbände: Bd. III,3 umfaßt (abgesehen von einigen Nachträgen vom Ende des Jahres 1679) seine Korrespondenz der Zeit von 1680 bis zum Juni 1683, Bd. III,4 die Folgezeit bis zum Jahresende 1690. Mit 485 bzw. 295 Stücken werden in diesen Bänden also fast 800 als mathematisch-naturwissenschaftlich-technisch klassifizierte Briefe ediert. Allerdings sind die beiden Angaben über die Briefanzahl nicht vergleichbar, da in Bd. 4 nicht aufgefundene, aber nachweislich zu den Korrespondenzen gehörende Briefe leider nicht mehr ausdrücklich aufgeführt werden, während Band 3 explizit 140 erschlossene Briefe verzeichnet. (Hinweise auf solche sind in Bd. 4 in den Anmerkungen versteckt – warum diese Änderung?). Die Zahl der von Leibniz selbst geschriebenen Briefe beträgt 77 bzw. 72, die übrigen waren an ihn gerichtet oder als Beilage zu seiner Kenntnis bestimmt. Von den in Bd. 3 abgedruckten 344 Stücken waren 291 bisher ganz oder teilweise unveröffentlicht, bei Bd. 4 beträgt diese Relation 298 zu 247.

Neben Leibniz' Gesprächs- und Briefpartner Ehrenfried Walther von Tschirnhaus und anderen wichtigen Korrespondenten kommen in den beiden Bänden die Mathematiker Jacob Bernoulli, Johann Jakob Ferguson, Christian Huygens und Erhard Weigel sowie der französische Physiker Edme Mariotte vor. Den thematisch gegliederten Einleitungen der Bearbeiter (Bd. 3: Herbert Breger, teilweise gestützt auf Vorarbeiten von H.-J. Heß; Bd. 4: Heinz-Jürgen Heß und James O'Hara) lassen sich die Schwerpunkte der Korrespondenz in den genannten Jahren entnehmen. In Bd. 3 sind sie überschrieben: Physik; Mathematik; Tätigkeiten im Harz; weitere Unternehmungen für den herzöglichen Hof und persönliche Pläne; Wissenschaftsorganisation; ökonomisch-technische Projekte; Chemie und Alchemie; Medizin; Philosophie; in Bd. 4 lauten sie: Infinitesimalrechnung und andere Mathematica; Himmelsmechanik und andere Physica; biographische Weichenstellungen; Wirtschaft und Administration; Bergbautechnik und andere Technica; Chemie, Alchemie und Medizin; Metaphysik und Erkenntnistheorie. Dabei wird deutlich, daß jetzt mathematische Themen, die in den auf die Pariser Zeit (1672–1676) folgenden Jahren bis etwa 1680 sehr im Vordergrund standen, an Bedeutung verlieren. Das ist hinsichtlich Englands erklärlich durch Henry Oldenburgs Tod im Jahr 1677, in Bezug auf Huygens und Tschirnhaus jedoch dürfte Leibniz' zunehmende Beschäftigung mit anderen Gebieten und Aufgaben für den Rückgang verantwortlich sein.

Aus der Fülle der in den beiden Briefbänden angesprochenen Themen kann hier in erster Linie nur eine kleine, vorwiegend auf mathematisch-physikalische Gegenstände bezogene Auswahl erwähnt werden. Leibniz versucht, die Mechanik (in der er die Größe mv^2 als Maß für die Kraft ansieht) auf die Geometrie zu reduzieren. Wie Newton sieht er die Gleichheit von Ursache und Wirkung als ein Grundprinzip der Mechanik an. Der Briefwechsel mit Schelhammer und Mariotte belegt erstmals, daß Leibniz' Beschäftigung mit der Akustik – entgegen der bisher verbreiteten Ansicht – nicht erst nach der Lektüre von Newtons Principia einsetzte. Leibniz' Vorstellungen über die Ausbreitung des Schalls gründeten ebenso in seiner Theorie der Elastizität wie die in der Korrespondenz mit Mariotte entwickelte Theorie der Bruchfestigkeit, die über diejenige Galileis hinausging. In der Optik setzte sich Leibniz mit den Theorien von Huygens und Newton auseinander.

Newtons *Principia* erhielt Leibniz auf der großen Reise über Wien nach Italien. Sogleich beeilte er sich, seine eigene Theorie der Dynamik auszuarbeiten: ein Aufsatz *Tentamen de motuum coelestium causis* erschien im Februar 1689 in der Zeitschrift „Acta eruditorum", die in Vorbereitung befindliche Schrift *Dynamica* wird verschiedentlich in der Korrespondenz angesprochen und von Bodenhausen bereits für den Druck vorbereitet, blieb aber schließlich doch unveröffentlicht, weil Leibniz die Zeit für den Abschluß fehlte. Seine Planetentheorie, eine Kombination von Descartesschen Wirbeln mit einer zentral wirkenden Kraft, erlaubte ihm eine physikalische Begründung der drei Keplerschen Gesetze. Auffällig bleibt dabei, an wie wenigen Stellen Leibniz direkt auf Newtons *Principia* eingeht. (Hierzu eine kritische Zwischenbemerkung: wohl um den Umfang der Ausgabe zu beschränken, wird kaum auf Sekundärliteratur hingewiesen. Dabei wäre an dieser Stelle eine Erwähnung der von E. A. Fellmann besorgten Publikation der Leibnizschen Randnoten zu Newtons Hauptwerk (Paris 1973) und des Buches „Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz" von D. Bertoloni Meli (Oxford 1993) durchaus angebracht.) Rückfragen nach in Paris durchgeführten Experimenten verdeutlichen, wie bitter Leibniz in Hannover die provinzielle Enge und das Fehlen naturwissenschaftlich interessierter Gelehrter empfunden haben muß. Mit seinen Vorschlägen zur systematischen Messung der zeitlichen Variabilität der magnetischen Deklination an verschiedenen Orten war er seiner Zeit weit voraus: erst Alexander von Humboldt realisierte in internationaler Kooperation im Magnetischen Verein ein solches Programm!

Leibniz betrachtete mathematische Einsichten nie isoliert – große Hoffnungen setzte er auf die „characteristica universalis" als eine universelle, mathematischen Regeln gehorchende Zeichensprache. Fragen der Wissenschaftstheorie und Methodologie wurden ebenfalls erörtert. In der ab 1690 wieder intensivierten Korrespondenz mit Huygens begegnen dem Leser Beispiele von Kurvenstudien und Lösungen von Differentialgleichungen, die den Briefpartner von der Kraft des Leibnizschen Infinitesimalkalküls überzeugen sollen. Doch auch Anwendungen auf physikalische Probleme werden diskutiert.

Als den Briefbänden entnommenes Beispiel sei die sich von 1680 bis 1684 erstreckende Korrespondenz mit dem niederländischen Mathematiker Johann Jakob Ferguson († 1691?) herausgegriffen. Er hatte sich im Frühjahr 1680 einige Monate lang in Hannover aufgehalten. Mit 17 Stücken, die während dieser Zeit entstanden, begann der Gedankenaustausch; gut zwei Dutzend Briefe wechselten die beiden Gesprächspartner in den folgenden vier Jahren. In den Gesprächsaufzeichnungen (sie enthalten oft zugleich Aufzeichnungen und Notizen beider Partner) erklärt Leibniz seine arithmetische Kreisquadratur (d. h. seine Herleitung der sog. Leibnizschen Reihe), geht es um lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten und Leibnizens Ansätze zur Determinantentheorie, wird das Alhazensche Problem besprochen, werden die Binomialkoeffizienten verallgemeinert oder die Lösung kubischer Gleichungen diskutiert. Der Briefwechsel dehnt letzteres Problem auf höhere algebraische Gleichungen aus, behandelt die Reduktion kombinierter Wurzelausdrücke, enthält sowohl spezielle Probleme (Beispiel: ermittle drei natürliche Zahlen in geometrischer Proportion, deren Summe und Kubensumme gegeben sei) wie allgemeine, etwa die Berechnung von Leibrenten bei vorgegebenen Bedingungen. Ferguson verhandelt in den Niederlanden in Leibniz' Auftrag mit Druckern, die an einer Publikation der arithmetischen Kreisquadratur (als Beispiel seiner Methode der Erfindungskunst, der „ars inveniendi") interessiert sein könnten – doch wie so oft kommt Leibniz nicht dazu, ein Manuskript abzuschließen! Nebenbei tauschen beide Informationen und Ideen über Bergwerke und Windmühlen aus.

Anlaß dazu gaben die Leibnizschen Bemühungen um die Verbesserung des Silber- und Erzbergbaus im Harz – die sich darauf beziehenden Briefe mit den Handwerkern und Bergbeamten machen einen beträchtlichen Anteil der gesamten Korrespondenz aus. Jahrelange kostspielige Versuche, die Wasserhaltung und die Ausbeute der Erzgruben des Herzogs durch Einsatz von (horizontalen oder vertikalen) Windmühlen und andere Maßnahmen zu verbessern, mußten schließlich ergebnislos abgebrochen werden. Chemische und hüttentechnische Verfahren wurden mit Fachleuten diskutiert oder auch in langwierigen Verhandlungen mit Erfindern zur Nutzung erworben. Auch pharmazeutische, therapeutische und medizinische Themen werden immer wieder aufgegriffen. – Nach der Einstellung der Arbeiten im Harz wurde Leibniz 1685 der Auftrag erteilt, die Geschichte des Welfenhauses zu schreiben – eine Unternehmung, die für den Rest seines Lebens seine Zeit und Kraft in hohem Maße beanspruchte, zumal er in der *Protogaea* mit der Erdgeschichte der Welfenlande – seine im Harz gemachten Beobachtungen auswertend – einsetzte! Die bereits erwähnte Italienreise diente der Beschaffung sicherer historischer Quellen über die familiäre Abstammung der Welfen.

Nun zum Abhandlungsband VII,2. Im Gegensatz zu Bd. VII,1, der neben algebraischen auch geometrische und zahlentheoretische Studien umfaßte, enthält er nur algebraische Aufzeichnungen. Von vier Nachträgen aus den Jahren 1672–1674 abgesehen, sind darin 76 Studien aus den Jahren 1675–1676, also ebenfalls noch aus der mathematisch entscheidenden Pariser Zeit, abgedruckt. Die Bearbeiter Eberhard Knobloch und Walter Contro, die schon Bd. VII,1 edierten, wurden diesmal von Nora Gädeke unterstützt. Mit Ausnahme jener Stücke, in denen vorwiegend geometrische Hilfsmittel eingesetzt wurden, sind damit alle algebraischen Texte der Pariser Zeit im Druck zugänglich – die weitaus meisten zum ersten Mal seit ihrer Entstehung! Einige, insbesondere die kubische und biquadratische Gleichung betreffend, wurden während Unterhaltungen mit Tschirnhaus aufgezeichnet; einige andere enthalten im Zusammenhang mit der Lektüre mathematischer Texte entstandene Aufzeichnungen. Die wichtigsten von Leibniz studierten Quellen waren die lateinische *Geometria*-Ausgabe Descartes' (die „Bibel" der damaligen Mathematiker, die bedeutsame erläuternde Schriften von Debeaune, Hudde und Schooten enthielt) sowie Schriften von Bombelli, Cardano, Dulaurens, Girard, Prestet, Sluse, Viète und anderen Zeitgenossen. (Auffällig ist, daß Leibniz an einer Stelle die Branckersche Faktortafel erwähnt, aber nirgends auf J. H. Rahns *An Introduction to Algebra* (1668) eingeht, in die sie eingebunden war.) Oft versuchte Leibniz, seine allgemeinen Ideen anhand von Einzelgleichungen zu entwickeln. Musterbeispiele sind die kubische und die biquadratische Gleichung, denen viele Studien gewidmet sind – es finden sich hier fast 30 Versuche, die Cardanische Formel für den irreduziblen Fall der kubischen Gleichung passend umzugestalten! Große Hoffnungen setzte er – wie viele seiner Zeitgenossen – auf die angestrebte Elimination aller mittleren Terme einer algebraischen Gleichung, um so die allgemeine Gleichung n-ten Grades durch Radikale zu lösen. Bei der Cardanischen Formel erkannte Leibniz schließlich die Unvermeidbarkeit des Durchgangs durch das Imaginäre. Neben den vier elementaren Operationen und dem Wurzelziehen führte er daher als sechste Operation die „reductio expressionum imaginarium ad reales" ein: die Umwandlung der beiden komplexen Wurzeln in der Cardanischen Formel mit dem Ergebnis, daß sich die Imaginärteile wegheben. Auch bemühte er sich um Verallgemeinerung des Ansatzes zwecks Anwendung auf höhere Gleichungen. Viele Stücke besitzen deutlich fragmentarischen Charakter oder blieben Konzept, sind oft durch Rechenfehler verunstaltet oder enden in komplizierten, häufiger eine ganze Seite füllenden Formeln, die nicht weiterführen. So ist die Lektüre streckenweise sehr mühsam und unergiebig. Doch hin und wieder gibt es zusammenfassende Stücke, in denen Leibniz seine eigenen Erkenntnisse einordnet in die von ihm studierten Quellen oder grundsätzliche Überlegungen anstellt, z. B. über das methodische Verhältnis von Algebra und Geometrie, die für die Mühe entschädigen. (An die Zeitgenossen gab Leibniz natürlich die besten Ausarbeitungen weiter; für diese muß man daher auch den Briefband III,1 heranziehen.) Überrascht entdeckt man in den Notizen, die Ende 1675 während Unterredungen mit Tschirnhaus von beiden gemacht wurden, mehrfach ein von diesem gezeichnetes Diagramm: die reelle (horizontal liegende) Zahlengerade, links mit $-x$, rechts mit $+x$ bezeichnet, mit einer von der Mitte aus nach oben gerichteten Senkrechten, die die Bezeichnung $-xx$ trägt. Offensichtlich soll hier das Imaginäre symbolisiert werden. Jedoch wird die Senkrechte nicht als zweite Achse einer Ebene gedeutet, wie das erst über hundert Jahre später geschah, sondern nur als etwas qualitativ anderes als die reelle Zahlengerade. Ein eindrucksvolles Beispiel dafür, wie mühsam Einsichten oft errungen werden müssen, die den Späteren selbstverständlich erscheinen!

Im Lauf seiner Untersuchungen zur Gleichungslehre bemühte sich Leibniz auch, die in der Descartesschen *Geometria* verwendete algebraische Terminologie weiterzuentwickeln und zu verfeinern – in der Einleitung der Herausgeber sind die neugeprägten Fachwörter erläutert. Dort sind auch Leibniz' Hauptmethoden beim Studium von Gleichungen, seine Notationen und Besonderheiten seiner Rechentechnik übersichtlich zusammengestellt. Jedem Stück ist eine Begründung für die Datierung vorangestellt, die manchmal detektivischen Scharfsinn erforderte (s. etwa Nr. 51). – Der Band enthält wie schon Bd. VII,1 Verzeichnisse der erwähnten Personen, Schriften (neben Titeln der Leibnizzeit sind leider nur zwölf Einträge aus dem 20. Jh., d. h. Hinweise auf Sekundärliteratur zu finden), Sachen (sehr detailliert – allein 6 Spalten zu Gleichungen!), Handschriften, Siglen, Abkürzungen und Zeichen. Entsprechend ausführliche (jeweils über 50 Seiten!), sorgfältig gearbeitete Register enthalten, wie gewohnt, auch die beiden Briefbände – doch fehlt leider ein Handschriftenverzeichnis. Wie bereits in der früheren Rezension erwähnt, erfordert die Benutzung der Register einen gewissen Spürsinn, sucht man nach Nachweisen für eine bestimmte Schrift oder Sache. – Erst beim genaueren Hinsehen bemerkt man die leichten Veränderungen im Druckbild, verursacht durch die Umstellungen der Drucktechnik und den Wechsel der Druckerei (Bd. III,4 und VII,2). Es ist erfreulich, aber keineswegs selbstverständlich, daß trotz aller mit der Wiedervereinigung Deutschlands verbundenen Schwierigkeiten nicht nur die Weiterführung der Leibniz-Edition gesichert, sondern auch ihr äußeres Gesicht fast unverändert bewahrt werden konnte. Dafür gebührt den verantwortlichen Akademien wie den Bearbeitern der einzelnen Bände Dank.

Hamburg C. J. Scriba

Adams, D. R., Hedberg, L. I., Function Spaces and Potential Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 314), Berlin u. a.: Springer 1996, XI, 366 S., DM 148,–

Seit über 100 Jahren ist Potentialtheorie eine der herausragenden Theorien der Analysis. Sie hat ihre Ursprünge in der Physik. Einige der besten Mathematiker unseres Jahrhunderts haben zu ihrer Entwicklung beigetragen. In unserer Zeit wurde es klar, wie eng dieses Gebiet mit der Funktionalanalysis, der Theorie der Distributionen und der fraktalen Geometrie zusammenhängt. Die Untersuchungen von nichtlinearen Gleichungen führten zur Schaffung einer neuen, nichtlinearen Potentialtheorie. In den letzten Jahren haben die beiden Autoren wesentliche Beiträge zu dieser neuen Theorie geliefert. Ihr Buch beschäftigt sich mit „the interplay of potential theory and function spaces, with the purpose of studying the properties of functions belonging to Sobolev spaces, or to some of their natural extensions, such as Bessel potential spaces, Besov spaces, and Lizorkin-Triebel spaces". Abgesehen von Grundlagen gibt es kaum substantielle Überschneidungen mit anderen Büchern über Funktionenräume. Die beiden Autoren sind anerkannte Spezialisten auf dem Gebiet der nichtlinearen Potentialtheorie und der Theorie der Funktionenräume. Das Buch ist sehr gut geschrieben und wird zweifellos die gebührende Aufmerksamkeit finden.

Das Buch hat 11 Kapitel. 1. Preliminaries (Grundwissen zur Funktionalanalysis und der Theorie der klassischen Räume). 2. L^p-capacities and nonlinear potentials (verschiedene Typen von Kapazitäten). 3. Estimates for Bessel and Riesz potentials. 4. Besov spaces and Lizorkin-Triebel spaces. 5. Metric properties of capacities. 6. Continuity properties (Lebesgue-Punkte, „thin sets", usw.). 7. Traces and imbedding theorems (in Verbindung mit Kapazitäten). 8. Poincaré type inequalities. 9. An approximation theorem. 10. Two theorems of Netrusov. 11. Rational and harmonic approximation.

Jena H. Triebel

Thiel, Chr., Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik, Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1995, 364 S., DM 58,–

Seit gut zwei Jahrzehnten hat eine These Konjunktur, welche besagt, die Philosophie der Mathematik befinde sich in einer Krise. 1979 schrieb Hersh: „The present impasse in mathematical philosophy is the aftermath of the great period of foundationist controversies from Frege and Russell through Brouwer, Hilbert and Gödel. What is needed now is a new beginning, not a continuation of the various „schools" of logicism, formalism or intuitionism." [1] Wenige Jahre später pflichtete ihm Feferman bei: „What is the nature of the conceptual content of mathematics? I agree with the critics of the traditional positions of logicism, formalism, platonism and constructivism, that each of these has failed to give us a satisfactory, convincing answer to that." [2] Mac Lane gab darüberhinaus einen Hinweis, auf welchem Weg die Krise überwunden werden könne: „To develop a fresh view of the philosophy of mathematics, we begin by looking at the actual state of mathematics." [3] Dies ist eine naheliegende Strategie, aber sie hat denn doch ihre Tükken. Es gibt nämlich sehr viele Mathematiker und diese realisieren sowohl in ihrer mathematischen Arbeit als auch in ihrer Auffassung von Mathematik ein recht breites Spektrum an Möglichkeiten. Dennoch: Jede zeitgemäße Philosophie der Mathematik muß sowohl Gehalt und Gestalt von Mathematik als auch alternative philosophische Betrachtungsweisen thematisieren. Denn nach wie vor ist Weyls Mahnung zu beherzigen, prinzipiell müsse „daran festgehalten werden, daß die Beschäftigung mit der Philosophie der Wissenschaften die Kenntnis der Wissenschaften selber voraussetzt." [4] Diesem Diktum Weyls fühlt sich der Autor des vorliegenden Buchs voll und ganz verpflichtet. Um die Wechselwirkungen von Mathematik und Philosophie zu erhellen, vermittelt er dem Leser sowohl handfeste (teilweise höchst anspruchsvolle!) Mathematik als auch verschiedene philosophische Konzeptionen – in beiden Disziplinen orientiert er sich dabei jedoch stets am übergeordneten Ziel der Interdisziplinarität. Allerdings erscheint uns die vom Autor in der Einleitung formulierte „ausdrückliche Absicht, ein kritisches Eindringen in die heutigen Wechselwirkungen zwischen Philosophie und Mathematik auch dem philosophisch interessierten, aber nicht mathematisch ausgebildeten Leser zu ermöglichen“, wohl doch etwas zu optimistisch.

Die einzelnen Kapitel tragen folgende Überschriften: 1. Der „Gegenstand“ der Mathematik, 2. Mathematik und Wirklichkeit: Das Anwendungsproblem, 3. Die mathematische Denkweise, 4. Mathematik, Logik, Metamathematik, 5. Zähler und Zahlbegriff, 6. Konstruktion und Abstraktion, 7. Aussagen über unendliche Bereiche, 8. Diagonalverfahren, Kontinuum, transfinite Zahlen, 9. Axiomatisierung und Formalisierung, 10. Grenzen der axiomatischen Methode, 11. „Finite“ und „konstruktive“ Verfahren, 12. Der Strukturbegriff in der Mathematik, 13. Geometrie als Theorie der Formen, 14. Gibt es eine Fundamentaldisziplin der Mathematik? 15. Antinomien und Paradoxien, 16. Grundlagenkrise und Grundlagenstreit.

Im ersten Kapitel werden zunächst acht verschiedene wissenschaftstheoretische Auffassungen von Mathematik geschildert; daran schließt sich eine Skizze der philosophischen Deutungen von Mathematik durch Platon, Aristoteles und Kant an. Der Autor läßt uns bereits hier wissen, daß er in den späteren Kapiteln eine in der Tradition des Aristoteles gegründete konstruktivistische Philosophie der Mathematik entfalten wird.

Das Anwendungsproblem wird im zweiten Kapitel hauptsächlich durch Rückgriff auf eine den logischen Empirismus fortschreibende Arbeit von Victor Kraft aus dem Jahr 1947 erörtert. Im dritten Kapitel beginnt dann eine Bereitstellung und Ausformung konkreter Mathematik, die mit einer Präsentation des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes im 10. Kapitel ihren Kulminationspunkt erreicht. Man kann dem Autor nur uneingeschränkt zustimmen, wenn er zum Abschluß dieser zentralen Passage seines Buchs meint, „daß die skizzierten Methoden der Gödelschen Untersuchungen ... als eine Einsicht von zentraler Bedeutung für jede Philosophie der Mathematik gelten dürfen.“

Wagen wir gleich einen Sprung in das letzte Kapitel, welches eine Art Resumé der gesamten Bemühungen leistet. Mit scharfsinniger Argumentation wird hier insbesondere herausgearbeitet, daß bei allen weiteren Untersuchungen zum Begründungszusammenhang von Mathematik und Philosophie eine zumindest dreifache Differenzierung unerläßlich ist, indem nämlich zwischen mathematischen Grundlagen, methodologisch-wissenschaftstheoretischen Grundlagen und philosophisch-erkenntnistheoretischen Grundlagen – jeweils der Mathematik – sorgsam zu unterscheiden ist.

Der Autor hat sein Buch Paul Lorenzen nicht nur gewidmet, er ist ihm darüberhinaus in vielerlei Hinsicht verpflichtet. Die konsequente Vermeidung des intuitiven Mengenbegriffs zugunsten eines stringent konstruktivistischen Aufbaus insbesondere der Arithmetik erfolgt in diesem Buch ebenso konsequent im Geiste Lorenzens wie die – leider etwas knappe – Darstellung der Geometrie (an dieser Stelle vermissen wir einen Hinweis auf jenen instruktiven Beitrag von Lorenzen über „Protogeometrische Sprachspiele und geometrische Theorie“, welcher in den Proceedings des 7. Wittgenstein-Symposiums erschienen ist). Diese Anbindung an die „Erlanger Schule“ ist ohne Frage legitim, doch wäre an geeigneter Stelle ein deutlicher Hinweis angebracht, daß es auch andere Auffassungen von Arithmetik und Geometrie gibt.

Einige Ungenauigkeiten fielen uns bei der Lektüre auf, die in späteren Auflagen leicht getilgt werden können. Auf Seite 160 leistet der vorgeführte Beweis nicht direkt den Nachweis für die Behauptung von Seite 159, daß es zu jeder Primzahl eine größere gibt (z. B. $2 \cdot 7 + 1 = 3 \cdot 5$). Auf Seite 190 muß der Häufungspunkt in bezug auf eine Teilmenge des topologischen Raums eingeführt werden: Ist M Teilmenge des topologischen Raums T, so heißt ein Punkt p von T (nicht: von M) Häufungspunkt von M, wenn in jeder Umgebung von p ein weiterer Punkt von M liegt. Auf Seite 248 ergibt sich nicht $\psi(2,1) = 2$, sondern $\psi(2,1) = 5$.

Und eine dringende Bitte sei schon für die zweite Auflage vorgetragen. Der Sachindex ist in der vorliegenden Fassung ein Torso, ein Fragment. Gerade weil es sich um ein Buch handelt, welches man in der Regel nicht linear lesen wird, wäre ein detailliertes Sachverzeichnis eine höchst wünschenswerte Lese- und Verständnishilfe.

Nun haben wir schon mehrfach weitere Auflagen dieser „Philosophie und Mathematik" angesprochen; man wünscht und hofft, daß sie nicht nur gedruckt, sondern auch gelesen werden, allerdings mit einer recht speziellen Lesementalität. Ein ebenso altes wie treffendes Sprichwort nämlich besagt, daß in der Philosophie die Fragen wichtiger seien als die Antworten. Dies trifft insbesondere auch für jede Philosophie der Mathematik zu. Deshalb darf dieses Buch nicht konsumiert werden, es ist ausschließlich für kritische und kreative Leser geeignet. Wer diese intellektuelle Anstrengung nicht scheut, wird durch ein Studium von „Philosophie und Mathematik" auf eine besondere Weise belohnt: nicht durch Aussagen, die er zur Kenntnis nehmen kann, sondern durch Impulse, welche ihn zum Weiterdenken und zu individuellen Fragen anregen.

[1] Hersh, R.: Some proposals for reviving the philosophy of mathematics; Advances in Mathematics Bd. 31 (1979), S. 31

[2] Feferman, S.: Working Foundations; Synthese Bd. 62 (1985), S. 249

[3] Mac Lane, S.: Mathematical Models: a Sketch for the Philosophy of Mathematics; American Mathematical Monthly Bd. 88 (1984), S. 463

[4] Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften; 5. Auflage, München 1982, S. 15

Kaiserslautern K. Radbruch

Ransford, T., Potential theory in the complex plane (London Mathematical Society Student Texts, 28), Cambridge University Press 1995, x + 232 S., hardcover \$ 49.95, paperbound \$ 19.95

Die Themen der Potentialtheorie, beispielsweise harmonische, subharmonische Funktionen, Potentiale, Dirichletsches Problem, Greensche Funktion oder Kapazität können unter klassischen, axiomatischen oder wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten betrachtet werden. Gleichwohl lassen sich fast alle wesentlichen Begriffsbildungen schon im Rahmen einer Potentialtheorie in der Ebene herausarbeiten. In diesem Fall hat man ein breites Repertoire an Methoden und Resultaten der Funktionentheorie zur Verfügung, dank ihrer äußerst engen Verbindung zur Potentialtheorie in der komplexen Ebene.

Dem Autor, Thomas Ransford, geht es gerade um diese Verbindung. Er benutzt einerseits Hilfsmittel aus der Funktionentheorie, z. B. konforme Abbildungen, um mit erstaunlicher Schnelligkeit zu den wesentlichen Begriffen und gewichtigen Sätzen der Potentialtheorie vorzudringen. Andererseits dienen ihm umgekehrt auch die einmal gewonnenen potentialtheoretischen Ergebnisse zur Herleitung vieler namhafter Resultate der Funktionentheorie. An mehreren Stellen des Textes finden sich bemerkenswerte Beispiele hierfür: der Satz von Rado-Stout über holomorphe Fortsetzbarkeit, der Satz von Lindelöf über asymptotische Werte, der Riemannsche Abbildungssatz mit Stetigkeit bis zum Rand und das Koebesche $\frac{1}{4}$-Theorem. Besonders hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang aber der neue und schöne Beweis des kleinen Picardschen Satzes (über ganze Funktionen) von John L. Lewis, der auf einer brillanten Anwendung der Harnackschen Ungleichung basiert. Ein durchaus erweiterbarer Überblick über die Vielfalt der behandelten Themen kann als weiterer Beleg dienen sowohl für Ransfords gekonnte Ausnutzung dieser fruchtbaren Wechselbeziehung als auch für die Stringenz seiner Darstellung. Innerhalb der Kapitel 1–5 werden behandelt: harmonische Funktionen und Poissonsche Integraldarstellung, Harnack-Ungleichung und Harnacksche (Pseudo-)Metrik, subharmonische Funktionen mit Maximum-Prinzip und Konvexitätseigenschaften, Glättung, logarithmische Potentiale und polare Mengen, Gleichgewichtsmaße und der Satz von Frostman, hebbare Singularitäten, verallgemeinerte Laplace-Operatoren, der Rieszsche Zerlegungssatz, dünne Mengen, die Methode von Perron-Wiener-Brelot für das Dirichlet-Problem, Regularität, harmonisches Maß, Greensche Funktion, die Poisson-Jensensche Formel, Berechnung und Abschätzung von Kapazitäten, Wiener-Kriterium, transfiniter Durchmesser.

Mit den Anwendungen potentialtheoretischer Methoden auf verschiedenste Bereiche der Analysis wartet das 6. und letzte Kapitel auf. Es ist vom Schwierigkeitsgrad etwas höher angesiedelt als die vorherigen. Themen sind etwa der Satz von Riesz-Thorin in Zusammenhang mit der Interpolation von L^p-Räumen, homogene Polynome auf $\mathbb{C}^n$, die Sätze von Bernstein-Walsh und Keldysh über gleichmäßige Approximation, Spektraltheorie in Banachalgebren und im Bereich Dynamischer Systeme die Hausdorff-Dimension von Julia-Mengen.

Die zahlreichen Übungsaufgaben vertiefen und ergänzen gut den behandelten Stoff und sind bei weitgefächertem Schwierigkeitsspektrum zum Teil sehr anspruchsvoll. Die einzelnen Abschnitte werden geschickt durch einführende und motivierende Bemerkungen vorbereitet und am Ende eines jeden Kapitels findet der Leser Hinweise auf weiterführende Themen und Untersuchungen.

Die Lektüre des Buches erfordert fundierte Grundkenntnisse in Funktionentheorie und Topologie. Kenntnisse in Lebesguescher Integrationstheorie sind wünschenswert, doch die benötigten Grundlagen über Borel-Maße und der Rieszsche Darstellungssatz werden in einem Anhang ausführlich behandelt.

Es stellt für Experten und Studenten im Hauptstudium einen großen und profitablen Fundus an potentialtheoretischem Wissen bereit. Aber auch Nicht-Experten, die sich für einen Zugang zur Potentialtheorie interessieren, können es mit Gewinn lesen. Ihnen allen kann dieses gelungene Buch empfohlen werden.

Erlangen B. Burgeth

Mikhlin, S. G., Morozov, N. F., Paukshto, M. V., The Integral Equations of the Theory of Elasticity (Teubner-Texte zur Mathematik 135), Stuttgart u. a.: Teubner 1995, 375 S., kartoniert, DM 64,–

Randintegralmethoden haben in den letzten Jahrzehnten eine stürmische Entwicklung genommen. Daher ist es gerechtfertigt, daß dieser Gegenstand von verschiedenen Seiten und von verschiedenen Schulen beleuchtet wird. Der vorliegende Teubner-Text weckt somit bestimmte Erwartungen, da bekanntlich die Methode der singulären Integrale in der ehemaligen Sowjetunion nicht nur eine lange Tradition aufweist, sondern auch hervorragende Resultate gezeitigt hat. Zu den Klassikern dieser Richtung gehört neben N. I. Muschelishvili vor allem auch S. G. Michlin. Auf letzteren geht beispielsweise der fundamentale Begriff des Symbols für singuläre Integraloperatoren zurück.

Beim Lesen des Textes stellte sich zumindest bei mir ein gewisses Maß an Betroffenheit ein. Es fällt mir schwer, diese Betroffenheit zu artikulieren, da ich in S. G. Michlin immer ein großes Vorbild gesehen habe und ich ihm persönlich sehr verbunden war. Ich äußere die begründete Vermutung, daß dieses Buch zu Lebzeiten von S. G. Michlin in der jetzt vorliegenden Form nicht erschienen wäre. Zunächst fällt auf, daß im Kern nur Teile des klassischen Bestandes abgehandelt werden. Wenn dies auf attraktive und erfrischende Weise geschieht, ist dagegen nichts einzuwenden, da eine solche Darstellung möglicherweise Keime für weitergehende Untersuchungen enthalten könnte. Mir erscheint jedoch der Text zusammengestückelt und unfertig. Ungenaue, bisweilen falsche Aussagen sind keine Seltenheit. Dazu werden Beweise für einfache Tatsachen langatmig geführt, während über substantiell wichtige und delikate Stellen mit wenigen Federstrichen hinweggegangen wird. Leider muß noch hinzugefügt werden, daß die Übersetzung schlichtweg kurios ist. Offenbar wußte der Übersetzer nicht, was er übersetzt. Über Schreibfehler und unbedruckte Seiten in dem mir vorliegenden Exemplar möchte ich mich nicht weiter äußern. Der Text ist weder inhaltlich noch technisch sorgfältig hergestellt. Der Teubner-Verlag sollte dies zur Kenntnis nehmen und seine Schlüsse ziehen. Einem Leser, der sich einen ersten Eindruck von der behandelten Thematik verschaffen möchte, kann man nur raten, außerordentlich kritisch zu lesen und daneben unbedingt Standardwerke zu konsultieren. Ein Kenner der Materie wird möglicherweise die Zusammenstellung der Probleme und die dazu zitierte Literatur wertschätzen.

Inhaltlich gliedert sich das Buch etwa wie folgt. In den Kapiteln 1 bis 3 werden einige Fakten aus der Theorie der ein- und zweidimensionalen singulären Integraloperatoren bereitgestellt. Kapitel 4 beschäftigt sich mit klassischen Ansätzen zur näherungsweisen Lösung singulärer Integralgleichungen. In den Kapiteln 5 bis 7 werden entsprechend Teile der ebenen Elastizitätstheorie, der räumlichen Elastizitätstheorie und Kontaktprobleme behandelt. Im Kapitel 8 wird auf einige Rißprobleme eingegangen. Den Abschluß bilden zwei Anhänge. Im ersten werden die Arbeiten von S. G. Michlin über das Cosserat-Spektrum dargelegt, während im zweiten auf das Konzept der Randreduktion vermöge der Calderon-Seeley-Potentiale eingegangen wird.

Chemnitz B. Silbermann

Wloka, J. T., Rowley, B., Lawruk, B., Boundary Value Problems for Elliptic Systems, Cambridge University Press 1995, 641 S., £ 60.00

Randwertprobleme treten in der Mathematik und den Naturwissenschaften in vielfältiger Form auf. Sie unter den verschiedensten Aspekten und Voraussetzungen zu lösen ist ein zentrales Anliegen der Analysis.

Ein Randwertproblem definiert auf natürliche Weise einen Operator zwischen geeigneten Sobolevräumen. Da man, wie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen üblich, kein Kriterium für eindeutige Lösbarkeit erwarten kann, ist man an einfachen Bedingungen interessiert, unter denen dieser Operator zumindest ein Fredholmoperator ist. Die anschließende Aufgabe besteht darin, den Index eines solchen Operators zu berechnen.

Als einen der einfachsten Fälle betrachte man etwa ein Randwertproblem auf einem beschränkten Gebiet Ω in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand:

$$Pu = f \text{ in } \Omega; \qquad Bu = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

für einen Differentialoperator P in Ω und einen differentiellen Randoperator B. Hierbei sind f und g gegebene Funktionen; u ist gesucht. Seit den Arbeiten von Lopatinskij und Shapiro in den fünfziger Jahren ist bekannt, daß dieses Randwertproblem genau dann einen Fredholmoperator liefert, wenn der Operator P elliptisch und die sogenannte Lopatinskij-Shapiro-Bedingung erfüllt ist: Für jeden Punkt im Kosphärenbündel des Randes muß eine durch P und B definierte eindimensionale Anfangswertaufgabe in $\mathbb{R}_+$ eindeutig lösbar sein. Obwohl operatorwertig und nichttrivial, läßt sich diese Bedingung im skalaren Fall (wenn P kein System von Operatoren ist) auch leicht algebraisch formulieren.

Die Autoren betrachten nun vorrangig den Fall von Systemen. Ihr Ziel ist es, „die Indextheorie mit Hilfe von Pseudodifferentialoperatoren und neuen Methoden in der Theorie der Spektraltheorie der Matrixprobleme zu algebraisieren und zu vereinfachen" (Vorwort).

Die Darstellung beginnt mit einer knapp hundertseitigen Einführung in die Theorie der Matrixpolynome. Es folgt ein Exkurs über Mannigfaltigkeiten und Pseudodifferentialoperatoren von immerhin 240 Seiten. Die folgenden 270 Seiten sind dann der Theorie der Randwertprobleme gewidmet, genauer: den differentiellen Randwertproblemen auf beschränkten Gebieten im $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Zentrale Ergebnisse sind die oben erwähnte Charakterisierung der Fredholmeigenschaft, die Sätze von Agranovich und Dynin zum Vergleich der Indizes zweier Randwertprobleme, die Parametrixkonstruktion nach Hörmanders Arbeit von 1966, sowie die Deformationstechnik von Atiyah und Bott aus dem Jahre 1964, die es erlaubt, das Indexproblem für Mannigfaltigkeiten mit Rand zurückzuführen auf die Berechnung des Index eines elliptischen Operators auf einer Mannigfaltigkeit ohne Rand. Neu ist vor allem die Anwendung der Matrixpolynome, einmal zur Umformulierung der Lopatinskij-Shapiro-Bedingung und zum Beweis der Indexformel für Randwertprobleme in der Ebene.

Insgesamt bietet das Buch also eine Fülle an klassischem Material in gut lesbarer Form mit vielen Übungsaufgaben. Abgesehen von dem Abschnitt zur Indexformel für Randwertprobleme auf einfach zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{R}^2$, wo sich der Index in natürlicher Weise als Windungszahl ausdrücken läßt, wird auf die Indextheorie im üblichen Sinn allerdings nicht weiter eingegangen. Auf den Satz von Atiyah und Singer findet sich zwar ein Hinweis im Text, jedoch weder die Formel selbst noch ein Hinweis auf die Originalarbeiten. Letzteres ist umso bedauerlicher, als ein Teil des Materials über Pseudodifferentialoperatoren (einschließlich der Zeichnung auf Seite 341) aus *„The index of elliptic operators: I"* übernommen wurde. Wesentliche Entwicklungen fallen unter den Tisch. Die Aufgabe, die Theorie der Randwertprobleme mit Hilfe der Pseudodifferentialoperatoren zu algebraisieren – und zwar wirklich auf Mannigfaltigkeiten mit Rand einschließlich einer Indextheorie – wurde nämlich bereits 1971 von L. Boutet de Monvel gelöst (*Boundary problems for pseudo-differential operators,* Acta Math. **126,** 11–51 (1971)) – darauf findet sich jedoch kein Verweis, obwohl die von ihm eingeführte Transmissionseigenschaft auch hier eine wichtige Rolle spielt. Die Standardmonographie zur Indextheorie für Randwertprobleme von Rempel und Schulze (*Index Theory of Elliptic Boundary Problems,* Akademie-Verlag, Berlin 1982) mit einer ausführlichen Darstellung der Ergebnisse von Boutet de Monvel bleibt ebenfalls unerwähnt. Von der Existenz immerhin einer der Arbeiten B. Fedosovs zu Randwertproblemen und ihrem Index erfährt der Leser in einer Nebenbemerkung mit Literaturangabe, auf den Inhalt wird jedoch nicht eingegangen. Die Bibliographie ist nicht immer korrekt: Aus Egorovs Buch *Linear Differential Equations of Principal Type* wird z. B. *Linear Differential Equations of the Main Types,* obgleich „principal type" ein feststehender Begriff ist.

„Boundary Value Problems for Elliptic Systems" bietet eine schöne Zusammenstellung interessanter Resultate. Das Buch ist „self-contained", und man kann sich danach einiges erarbeiten. Allerdings findet man weite Teile des Inhalts, etwa die Theorie der Matrixpolynome, die Aussagen zu Mannigfaltigkeiten und Pseudodifferentialoperatoren oder die wesentlichen Resultate zu Randwertproblemen, bereits in anderen Monographien.

Potsdam E. Schrohe

Pfister, A., Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology (London Math. Soc. Lecture Note Ser. 217), Cambridge University Press 1995, 179 S., kartoniert, £ 22.95

Die *Stufe* $s(A)$ eines kommutativen Ringes A ist definiert als die kleinste Zahl n, so daß -1 in A Summe von n Quadraten ist. (Gibt es kein solches n, so $s(A) := \infty$.) Die *Pythagoraszahl* $p(A)$ von A ist definiert als die kleinste Zahl n, so daß in A jede Quadratsumme schon Summe von n Quadraten ist, wobei wiederum $p(A) = \infty$ gesetzt wird, wenn es kein solches n gibt.

Die Thematik des vorliegenden Buches von Albrecht Pfister kreist um diese beiden Invarianten sowie um die sogenannte *u-Invariante* $u(K)$ eines Körpers K, deren Definition etwas aufwendiger ist (s. unten). Den drei Invarianten entspricht aus der Vogelperspektive eine Dreiteilung des Buches: Kap. 1–3 sind der Stufe zugeordnet, Kapitel 4–7 der Pythagoraszahl und die letzten Kapitel 8–10 der u-Invarianten. Dabei gelingt es dem Autor, in bewundernswerter Weise einen großen Teil der algebraischen Theorie der quadratischen Formen, vornehmlich über Körpern, aus den letzten gut drei Jahrzehnten darzustellen, mit interessanten Querverbindungen zur algebraischen Topologie und Teilen der klassischen algebraischen Geometrie.

Als Initialzündung für alle dargestellten Entwicklungen darf man wohl den Satz von Cassels ansehen, daß in einem rationalen Funktionenkörper $k(x_1, \ldots, x_n)$ über einem Körper k einer Charakteristik $\neq 2$, das Element $1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ nicht Summe von n Quadraten ist. Im Kapitel 1 des Buches werden die von Pfister 1965 gefundenen allgemeineren Sätze über quadratische Formen dargestellt, aus denen das Casselsche Resultat folgt (und die durch dieses angeregt wurden).

Kapitel 2 bringt den Wittschen Kürzungssatz mit Folgerungen (§ 1), sodann Pfisters Theorie der „multiplikativen“ quadratischen Formen (§ 2). Es wird gezeigt, daß die anisotropen multiplikativen Formen Tensorprodukte $\langle 1, a_1\rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, a_n\rangle$ binärer Formen sind, welche die Eins darstellen. Für diese Produkte hat sich in der Literatur seit langem die in dem Buch nicht vorkommende Bezeichnung „Pfisterformen“ durchgesetzt, nach einem Vorschlag aus dem Jahr 1971 ([4] und [7] unabhängig). In § 3 werden dann einige der heute klassischen, von Pfister stammenden Folgerungen für den Wittring $W(K)$ gezogen.

Der Inhalt von Kapitel 2 gehört sicherlich zum unverzichtbaren Bestand einer jeden algebraischen Theorie der quadratischen Formen über Körpern. In Kapitel 3, § 1, werden Pfisters berühmte Folgerungen über die Stufe $s(K)$ eines Körpers gezogen: $s(K)$ ist, wenn endlich, stets eine 2-Potenz, und alle 2-Potenzen kommen vor. Sodann wird gezeigt, daß bei Ringen völlig andere Verhältnisse herrschen: Die „generische“ $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ hat die genaue Stufe n.

Zum Beweis braucht man nur irgend eine $\mathbb{R}$-Algebra A zu finden mit $s(A) = n$. Das geschieht auf topologischem Wege nach einer hier bahnbrechenden Arbeit von Dai und T. Y. Lam [3]: Sei X ein topologischer Raum mit einer Involution i. Die *Stufe* $s(X, i)$ wird definiert als die kleinste Zahl n, so daß es eine äquivariante stetige Abbildung $f: (X, i) \to (S^{n-1}, \alpha)$ gibt, wobei α die Antipodenabbildung der reellen Sphäre S^{n-1} ist. $\{s(X, i) := \infty$ falls kein solches f existiert, insbesondere, falls i Fixpunkte hat.$\}$ Nach Dai und Lam gilt für die $\mathbb{R}$-Algebra $A_{X,i}$ der stetigen äquivarianten Funktionen von (X, i) nach $(\mathbb{C}, z \mapsto \bar{z})$, daß $s(A_{X,i}) = s(X, i)$ ist $\{$algebraische Stufe = topologische Stufe$\}$. Nun sagt der klassische Satz von Borsuk-Ulam, daß (S^{n-1}, α) die Stufe n hat für jedes $n \geq 1$. Damit ist in $A_{(S^{n-1}, \alpha)}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra der Stufe n gefunden.

Im folgenden Kapitel 4, § 2 wird dann ein Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam für polynomiale Abbildungen gegeben in folgender Form: Sind $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ ungerade Polynome, so gibt es einen Punkt $a \in S^n$ mit $q_1(a) = \ldots = q_n(a) = 0$. Daraus folgt mit dem Satz von Stone-Weierstraß sofort der klassische Borsuk-Ulam für stetige Abbildungen. Die Grundlage des in dem Buch gegebenen Beweises des polynomialen Borsuk-Ulam ist ein von Terjanian 1972 [15] stammender Nullstellensatz über einem p-Körper K {p eine Primzahl, jede endliche Erweiterung des Körpers K hat als Grad eine p-Potenz}: Jedes System von n homogenen Polynomen über K in $n+1$ Variablen mit zu p fremden Graden hat eine gemeinsame Nullstelle $a \neq 0$ in K^{n+1}. Für den Borsuk-Ulam wird natürlich nur der Fall $K = \mathbb{R}, p = 2$ benötigt, aber später in dem Buch ist auch ungerades p wichtig.

In § 1 von Kapitel 4 gibt der Autor einen originellen Beweis dieses Nullstellensatzes, der von H. J. Fendrich stammt. Man kommt dort mit einem Minimum an kommutativer Algebra aus und umschifft elegant die algebraische Schnitttheorie, indem man direkt mit auf dem Hilbert-Polynom basierenden Multiplizitäten und „Graden" von graduierten Moduln arbeitet. {Anmerkung: Es scheint mir günstig zu sein, in Kapitel IV, Definition 1.6 nur *homogene* Elemente f zuzulassen. Der Beweis des wichtigen Lemmas 1.9 wird dann einfacher. Man kann als Übungsaufgabe beweisen, daß die neue Definition 1.6 zu der alten gleichwertig ist.}

In dem zentralen Kapitel 5 wird dann eine Theorie der C_i^p-Körper ($i \in \mathbb{N}_0, p$ eine Primzahl) entwickelt, welche die klassische Theorie der C_i-Körper von Tsen und Lang verallgemeinert. Ein Körper K heißt C_i, wenn jedes System $f_1, \ldots, f_r$ von Polynomen über K in $n > d_1^i + \ldots + d_r^i$ Variablen ($d_j := \deg f_j$) eine nicht triviale Nullstelle hat. Er heißt C_i^p, wenn dies unter der zusätzlichen Voraussetzung gilt, daß die Grade d_j fremd zu p sind. Die C_0-Körper sind die algebraisch abgeschlossenen Körper, und die C_0^p-Körper sind die p-Körper, im wesentlichen nach obigem Nullstellensatz. Ein subtiler, aber wichtiger Punkt ist, daß Pfisters Definition der C_i-Körper etwas enger ist als die klassische Definition von Lang, bei der nur eine Gleichung statt eines Systems genommen wird. Alle klassisch bekannten C_i-Körper sind C_i in dem engeren Sinne von Pfister, und mit der engeren Definition läuft die Theorie der C_i^p-Körper besser.

Kapitel 6 bringt zunächst qualitative Resultate über Anordnungen und Summen von Quadraten in Körpern, insbesondere Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems, so wie man dies heutigen Tags in Lehrbüchern über reelle Algebra und reelle algebraische Geometrie findet, vgl. [2] und [8]. Sodann beweist der Autor seinen berühmten Satz aus dem Jahr 1967 [13], daß in einem n-dimensionalen Funktionenkörper K über einem reell abgeschlossenen Körper R (z. B. $R = \mathbb{R}$) jede Summe von Quadraten eine Summe von 2^n Quadraten ist; mit anderen Worten, $p(K) \leq 2^n$.

In Kapitel 7 wird eine gute Übersicht des heutigen Kenntnisstandes der Pythagoraszahlen von Ringen und Körpern gegeben. Grosso modo ist nur wenig bekannt. Auch gibt es Enttäuschungen. Zum Beispiel haben affine Algebren über $\mathbb{R}$ ab Dimension 3 eine unendliche Pythagoraszahl. L. Mahé hat deshalb für einen Ring A „modifizierte" Pythagoraszahlen $p^+(A)$ und $p^\bullet(A)$ eingeführt und dafür bei affinen $\mathbb{R}$-Algebren schöne Resultate erzielt [11]. Das wird am Ende von Kapitel 7 ohne Beweise dargestellt.

Ab Kapitel 8 bis zum Ende des Buches steht dann die u-Variante im Vorder- oder Hintergrund aller Betrachtungen. 1953 wurde von Kaplansky die *u-Invariante* $u(K)$ eines nicht (formal) reellen Körpers K definiert als das Supremum der Dimensionen (= Anzahl der Variablen) der anisotropen quadratischen Formen über K [6]. Über diese Invariante ist bis heute äußerst wenig bekannt, und sie ist immer noch gut für Überraschungen. Zum Beispiel weiß man seit langem, daß $u(K)$ stets $\neq 3, 5, 7$ ist, und Kaplansky hat 1953 die Vermutung gewagt, daß $u(K)$ – wenn endlich – eine 2-Potenz ist [loc. cit]. Jedoch konnte Merkurjev 1989 zeigen, daß jede gerade Zahl als u-Invariante vorkommt, vgl. [12].

Ist der Körper K formal reell, so gibt es anisotrope quadratische Formen über K zu jeder Dimension. Jedoch läßt sich jetzt nach Elman und Lam [5] eine Invariante $u(K)$ sinnvoll definieren als Supremum der Dimensionen $\dim \varphi$ aller anisotropen *Torsionsformen* φ über K, d. h. aller anisotropen Formen φ, deren Klasse $[\varphi]$ im Wittring $W(K)$

ein Torsionselement ist. Man weiß dann nach Pfister, daß die Ordnung von $[\varphi]$ in der additiven Gruppe von K eine 2-Potenz ist. {Ist K nicht reell, so ist jede Form Torsionsform und ihre Klasse hat durch $2s(K)$ teilbare Ordnung.} Somit läßt sich die u-Invariante verfeinern zu einer Folge von Invarianten $(u^i(K)|i \in \mathbb{N})$ wobei $u^i(K)$ das Supremum der Dimensionen aller anisotropen Formen φ mit $2^i[\varphi]=0$ bezeichnet. Besonders wichtig ist $u'(K) := u^1(K)$. Man weiß, daß $u'(K) \leq u(K) \leq 2u'(K) - 1$ ist. Insbesondere ist $u(K)$ genau dann endlich, wenn $u'(K)$ endlich ist. Eine wichtige offene Frage ist, ob stets $u(K) = u'(K)$ ist. Es gibt bisher kein Gegenbeispiel.

Ein weiteres weit offenes Problem ist das Verhalten der u-Invarianten bei Körpererweiterungen. Eines der besten hier bekannten Resultate besagt, daß für eine endliche Körpererweiterung L eines nicht reellen Körpers K vom Grade d gilt: $u(L) \leq \frac{d+1}{2} u(K)$(Leep [10]). Dies wird erst in Kapitel 9 des Buches mit Hilfe der dort entwickelten Theorie der Systeme von quadratischen Formen bewiesen, während in Kapitel 8 eine Reihe von Resultaten dargestellt werden, bei denen man mit – oft trickreichen – Manipulationen von quadratischen Formen zum Ziel kommt. Auch werden viele offene Probleme genannt. Der oben genannte Satz von Merkurjev wird nicht bewiesen, aber es gibt gute Verweise.

Die letzten beiden Kapitel 9 und 10 des Buches über Systeme von quadratischen Formen und damit zusammenhängende algebraische Topologie (die über den Satz von Borsuk-Ulam weit hinausgeht) sind für den Spezialisten die interessantesten und wertvollsten Teile des Buches, und liegen wohl dem jetzigen Interesse des Autors am nächsten, während für den Fachfremden sich hier eine bizarre Welt auftut. Für Systeme von quadratischen Formen hat man eben keine Wittklassen und keine Analoga zu den anderen Wittschen Begriffen, wie hyperbolische Form oder Kernform. Es werden u-Invarianten $u_r(K)$ und $u'_r(K)$ definiert, die von anisotropen Systemen von quadratischen Formen ausgehen, und das Studium dieser Invarianten wird für die gewöhnlichen u-Invarianten $u(K), u'(K)$ nutzbar gemacht. Jedoch sind die Resultate bei aller Tiefe sehr partiell. Bei der zugehörigen algebraischen Topologie geht es vornehmlich um die Stufen der reellen projektiven Räume $\mathbb{R}P^{2m-1}$ mit einer Involution, die von der Koinzidenz $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ herrührt. Es werden auch Abschätzungen angegeben für die Stufe von $\mathbb{C}P^{2m-1}$ zu einer Involution j, die auf der Gleichheit $\mathbb{C}^{2m} = \mathbb{H}^m$ ($\mathbb{H}$ = Hamiltons Quaternionen) beruht.

Abschließend sei angemerkt, daß Körper der Charakteristik 2 aus dem Haupttext des Buches verbannt werden, aber in Anhängen zu mehreren Kapiteln liebevolle Berücksichtigung finden. Die Theorie ist bei Charakteristik 2 begrifflich komplizierter, weil man quadratische und symmetrische bilineare Formen unterscheiden (und beide studieren) muß, aber die erzielten Resultate sind oft vollständiger als bei Charakteristik $\neq 2$. Insbesondere weiß man hier erheblich mehr über die u-Invariante.

Das vorliegende Buch ist kein Lehrbuch und will es auch nicht sein, sondern stellt einen sehr persönlich gefärbten Ausschnitt aus der Algebra und zugehöriger Topologie dar. Es gibt ja schon gute Lehrbücher über die algebraische Theorie der quadratischen Formen, insbesondere die Bücher von T. Y. Lam [9] und W. Scharlau [14]. Aber im vorliegenden Buch sind alle dargestellten Entwicklungen und Resultate mit dem eigenen Erleben und Arbeiten des Autors in den letzten gut 30 Jahren verknüpft. Der Autor hat sich offenbar gut überlegt, was er ausführlich darstellt, was er nur referiert, und was er wegläßt. Diese Auswahl orientiert sich an den benutzten Methoden und keineswegs nur an den wissenschaftlichen Erfolgen des Autors in den letzten 30 Jahren, so daß wichtige Resultate, die von ihm stammen, durchaus fehlen. Zum Beispiel wird der sogenannte Hauptsatz von Arason und Pfister [1], der eine zentrale Rolle in der heutigen Theorie der quadratischen Formen spielt, nur einmal beiläufig und in einer schwachen Form erwähnt (S. 33).

Der Gewinn des recht subjektiven und doch methodischen Vorgehens des Autors ist ein Buch, in dem auf überraschend wenigen Seiten (165) eine große Vielfalt von Resultaten in kohärenter Weise dargestellt wird, zu denen hier auch für Mathematiker mit wenig algebraischen Vorkenntnissen ein schmerzfreier Zugang gebahnt wird. Solche Leser werden reich belohnt: sie erhalten ein zutreffendes Bild von einem nicht unbeträchtlichen Teil der heutigen algebraischen Theorie der quadratischen Formen und damit zusammenhängender Algebra und Topologie. Für die Spezialisten des Gebietes ist die Lektüre des Pfisterschen Buches nicht weniger lohnend. Ihnen werden überaus interessante Einblicke in die geschichtliche Entwicklung dieser immer noch jungen Disziplin und in die Denkweise eines ihrer Protagonisten gegeben.

Wilhelm Raabe hat über seinen Roman „Stopfkuchen" einmal geurteilt: „Mein bestes, mein subjektivstes Buch". Ähnliches läßt sich auch über das Buch von Albrecht Pfister sagen. Aber wir müssen vorsichtig sein, denn Herr Pfister hat nur *ein* Buch geschrieben. Also: Ein subjektives, ein gutes Buch.

[1] Arason, J. K.; Pfister, A.: Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring. Invent. math. **12** (1977) 173–296
[2] Bochnak, J.; Coste, M.; Roy, M. F.: Géométrie algébrique réelle. Springer 1987
[3] Dai, Z. D.; Lam, T. Y.: Levels in algebra and topology. Comment. Math. Helv. **59** (1984) 376–424
[4] Elman, R.; Lam, T. Y.: Pfister forms and *K*-theory of fields. Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971) 971–974
[5] Elman, R.; Lam, T. Y.: Quadratic forms and the *u*-invariant I. Math. Z. **131** (1973) 283–304
[6] Kaplansky, I.: Quadratic forms. J. Math. Soc. Japan **6** (1953) 200–207
[7] Knebusch, M.: Runde Formen über semilokalen Ringen. Math. Ann. **193** (1971) 21–34
[8] Knebusch, M; Scheiderer, C.: Einführung in die reelle Algebra. Vieweg 1989
[9] Lam, T. Y.: The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin 1973
[10] Leep, D. B.: Systems of quadratic forms. J. reine angew. Math. **350** (1984) 109–116
[11] Mahé, L.: Level and pythagoras numbers of some geometric rings. Math. Z. **204** (1990) 615–629
[12] Merkurjev, A. S.: Simple algebras and quadratic forms. Math. USSR Isvestiya **38** (1992) 215–221
[13] Pfister, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summen von Quadraten. Invent. math. **4** (1967) 229–237
[14] Scharlau, W.: Quadratic and hermitian forms. Springer 1985
[15] Terjanian, G.: Dimension arithmétique d'un corps. J. Algebra **22** (1972) 517–545

Regensburg M. Knebusch

Nelson, R., Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory – The Mathematics of Computer Performance Modeling, Berlin u. a.: Springer 1995, xxv + 583 S., DM 88,–

Der Untertitel gibt am besten wieder, worum es in dem vorliegenden Buch geht. Für den Versuch, Rechnerarchitekturen oder Netzwerke von Computern mit Hilfe von Modellen der Warteschlangentheorie zu beschreiben und zu analysieren, hat sich in manchen Kreisen die Bezeichnung „Computer Performance Modeling" eingebürgert. Das Buch führt auf elementarem Niveau und ohne große Abschweifungen in diese Thematik ein. Die Beispiele stammen fast ausnahmslos aus der Warteschlangentheorie. Im 10ten Kapitel wird die wichtige Klasse der Netzwerke von Produktform eingeführt und ihre stationären Verteilungen diskutiert, was in nicht so vielen Texten nachzulesen ist. – So werden wohl am ehesten solche Leser von diesem Buch profitieren können, die bei geringen Vorkenntnissen die grundlegenden Modelle der Warteschlangentheorie ohne große Umwege kennenlernen möchten.

Dieser genau begrenzten Thematik wird die äußere Gestaltung des Buches nicht ganz gerecht. Auf dem Einband ist in fetten Lettern das Wort *Probability* hervorgehoben, beim zweiten Hinschauen nimmt man dann noch *Stochastic Processes, and Qeueing Theory* wahr. Der Untertitel ist dagegen so klein gesetzt, daß man ihn leicht übersieht. Es könnte so der Eindruck entstehen, daß es sich bei diesem Buch um eine weitere Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie handelt. Dieser Eindruck wäre falsch, der Autor beschränkt sich in der Auswahl des Stoffes eng an die genannte Thematik.

So werden im ersten Teil unter der Überschrift *Probability* auf gut 200 Seiten praktisch nur solche Sachverhalte aus der Wahrscheinlichkeitstheorie angesprochen, die für die späteren Kapitel unmittelbar von Bedeutung sind. Die für die Warteschlangentheorie wichtigen Verteilungstypen (binomial, Poisson, geometrisch, exponentiell, negativ binomial, Erlang) werden in aller Ausführlichkeit besprochen. Kein Hinweis findet sich dagegen auf die hypergeometrische Verteilung, und die Normalverteilung kommt (samt zentralem Grenzwertsatz) nur am Rande vor. Für die Laplace-Transformierte ist ein eigener Abschnitt reserviert, die Fourier-Transformation wird dagegen nicht einmal erwähnt. Die Akzente sind in Richtung Warteschlangentheorie gesetzt.

Ähnliches ist für den zweiten Teil *Stochastic Processes* zu konstatieren, der rund 270 Seiten umfaßt. Auf Poissonsche Prozesse, Erneuerungstheorie, Markoffsche Prozesse, Warteschlangen und Netzwerke von Warteschlangen kommt der Autor zu sprechen. Daß man nichts über Martingale und die Brownsche Bewegung erfährt, ist bei einer elementaren Darstellung nicht zu bemängeln (obwohl die Martingaltheorie natürlich auch in der Warteschlangentheorie deutliche Spuren hinterlassen hat). Aber auch die (für die Warteschlangentheorie sicherlich nicht unerheblichen) Irrfahrten bleiben unerwähnt.

Der Inhalt des Buches ist weit weniger umfangreich, als man angesichts der insgesamt fast 600 Seiten meinen könnte. Breiten Raum nehmen Berechnungen von Verteilungen und Erwartungswerten und die Bestimmung von stationären Verteilungen ein. Der Autor gibt sich viel Mühe, die Sachverhalte in aller Ausführlichkeit zu erläutern, und meist kann man der Argumentation leicht folgen – der Preis ist dort und da eine gewisse Langatmigkeit.

Wenn man sich für die mathematische Seite der Warteschlangentheorie interessiert, ist man mit diesem Text allerdings nicht immer gut bedient. Es finden sich Ungenauigkeiten, wie etwa beim Beweis des zentralen Grenzwertsatz, wo (nachdem die Konvergenz der momentenerzeugenden Funktionen verifiziert ist) behauptet wird: Since moment generating functions uniquely determine distributions, we can also say that the distribution ... converges ... (S. 218). Da wird ein Teil des Problems verschwiegen. Irritierender finde ich die Fußnote auf S. 111, wo schlichtweg behauptet wird, eine Verteilungsfunktion müsse rechts-differenzierbar sein, damit sie eine Dichte besitze. Die Überlegungen auf Seite 148, daß kleine Bernoulli-Wahrscheinlichkeiten als „approximativ gleich" gedacht werden könnten, halte ich für irreführend (der Autor will so das „Paradox" auflösen, daß zwar die Summe zweier unabhängiger Poisson-Variablen wieder Poissonsch, dagegen die Summe zweier unabhängiger Binomialvariablen nicht binomial ist, falls verschiedene Erfolgswahrscheinlichkeiten zugrundeliegen). Für die universitäre Lehre schmälern diese und andere Bemerkungen den Nutzen des Textes erheblich.

Frankfurt am Main G. Kersting

Kuznetsov, Y. A., Elements of Applied Bifurcation Theory (Applied Mathematical Series 112), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1995, 515 S., DM 98,–

Nach den Worten des Autors wendet sich das Buch an fortgeschrittene Studenten, die sich in der Forschung betätigen wollen, und an „professionelle Forscher" aller

Fachrichtungen. Ihnen will es die Welt der Orbits und ihrer Absonderlichkeiten nahebringen. Es wird also vom Leser nicht erwartet, daß er schon alles weiß, wie es in manch einem Werk der Fall ist, wo der Autor nur widerwillig in die Mittelmäßigkeit herabsteigt und eher sich selbst ein Denkmal setzen will. Vielmehr geht der Verfasser hier sehr behutsam vor und faßt den Leser zuerst ganz vorsichtig an, um ihn nicht allzusehr zu schrekken. Auch im weiteren Verlauf sind keine schlimmen Steilanstiege zu überwinden, und am Ende hat man doch einen sehr ansehnlichen Überblick über das faszinierende Gebiet gewonnen.

In Kap. I und II werden grundlegende Begriffe wie „dynamisches System", „Poincaré-Abbildung", „topologische Äquivalenz", „Bifurkation", und „Strukturstabilität" eingeführt. Formulierungen wie „The appearance of a topologically nonequivalent phase portrait under variation of parameters is called a bifurcation" oder „A bifurcation diagram of the dynamical system is a stratification of its parameter space induced by the topological equivalence, together with representative phase portraits for each stratum" zeugen vom heroischen Versuch des Verfassers, komplizierte Sachverhalte enzyklopädisch in Definitionen zu destillieren. Fundamentale Ergebnisse über Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität und topologische Äquivalenz von Lösungen werden in diesen beiden Kapiteln ausführlich aber ohne den Anspruch auf Beweisvollständigkeit diskutiert.

In Kap. III (kontinuierliche Zeit) und Kap. IV (diskrete Zeit) werden „Fold"-, Hopf-, „Flip"- und Neimark-Sacker-Bifurkation im $\mathbb{R}^2$ exemplarisch behandelt und ihre Normalformen explizit hergeleitet. Kap. V ist der Zentrumsmannigfaltigkeit bei dynamischen Systemen im $\mathbb{R}^n$ gewidmet. Die Bifurkation homokliner und heterokliner Orbits ist Gegenstand von Kap. VI. Die weise Beschränkung auf den $\mathbb{R}^2$ und später auf den $\mathbb{R}^3$ bei homoklinen Orbits ist hier sehr hilfreich und macht dieses Kapitel zu einem der schönsten des Buches. Aber auch die weiteren Kapitel sind eindrucksvoll: Kap. VII mit nichthyberbolischer homokliner Bifurkation, Bifurkation auf invarianten Tori, der Behandlung von Symmetrien, und der ausführlichen Beschreibung $\mathbb{Z}_2$-symmetrischer Systeme und ihrer Normalformen, Kapitel VIII und IX mit der Darstellung zweiparametriger Bifurkationsprobleme im kontinuierlichen und im diskreten Fall (Bogdanov-Takens-, „Cusp"-, Bautin-, „Fold"-Hopf-, Hopf-Hopf-, Chenciner-Bifurkation). Ein ausführlicher Abschnitt über Resonanzphänomene darf nicht unerwähnt bleiben.

Kap. X schließlich gibt einen Überblick über numerische Verfahren, hauptsächlich zur „detection and location" von Bifurkationspunkten mit Hilfe von erweiterten Systemen (der Autor unterscheidet zwischen Bifurkation bei dynamischen Systemen und Verzweigung bei statischen Systemen). Zur Aufspürung von Hopf-Verzweigungen wird ein Verfahren von Fuller empfohlen, das ein exotisches Matrizenprodukt verwendet. In einem Appendix wird auf die Berechnung homokliner Orbits und ihrer Bifurkation eingegangen.

232 hervorragende Illustrationen sowie eine Fülle von Beispielen – auch für dynamische Systeme in Funktionenräumen – sind ein hervorstechendes Merkmal des Buches und tragen ganz erheblich zu dessen Wert bei. Der Autor sagt uns aber nicht, wie die Zeichnungen entstanden sind (von Hand?), so daß ein eventuelles Nachvollziehen im Rahmen von Übungen schwierig bleibt. Abgesehen von einem MAPLE-Programm auf S. 333 ff. finden wir nur in Kap. X eine kurze Diskussion der verfügbaren Programmpakete.

Das schöne Werk von Y. A. Kuznetsov ist in gutem Stil mit Sorgfalt und mit viel Liebe zur Mathematik geschrieben. Es ist hilfreich für alle, die mit dynamischen Systemen arbeiten wollen oder müssen, kann aber auch als „Freizeitlektüre" empfohlen werden, weil es durchweg lesbar bleibt und auch Quereinstiege erlaubt.

Stuttgart E. Gekeler

Olver, P. J., Equivalence, Invariants, and Symmetry, Cambridge University Press 1995, 525 S., £ 24.95

Der Titel des Buches: Äquivalenz, Invarianten und Symmetrie beschreibt seinen Inhalt in umgekehrter Reihenfolge. Der Autor hat zu Recht einen pädagogischen Standpunkt vorgezogen gegenüber der möglichen Folgerung von Invarianten und Symmetriefragen, lediglich als Spezialisierungen aus dem Äquivalenzproblem. Das Buch behandelt die Methoden zur Lösung von Symmetrie- und Äquivalenzproblemen, zur Klassifikation von Invarianten und zur Bestimmung von Normalformen, wobei algorithmischen Gesichtspunkten eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird. Die Grundlagen dafür sind die Untersuchungen von Marius Sophus Lie und Elie Joseph Cartan, deren Ergebnisse wie die inzwischen eingetretene weitere Entwicklung des von ihnen eingeführten Problemkreises in einer heute dem Mathematiker verständlichen Sprache dargestellt sind. Die jüngste Entwicklung, insbesondere auch der Zusammenhang mit der Nutzung von Computer-Algebra-Systemen, hat diesen 100 Jahre alten grundlegenden Fragen ein neues aktuelles Interesse beschert.

Ganz im Verständnis von Lie wird das Buch auf einem geometrischen Hintergrund entwickelt, wobei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Transformationsgruppen die wichtigsten Stichworte bezeichnen. Auch im Sinne der Vorstellungen von Lie werden „lokale" Symmetrie- und Äquivalenzprobleme behandelt und zwar im „regulären" Fall. Die globalen und singulären Probleme bleiben außen vor. Für die Nutzung von Computer-Algebra-Systemen wird auf MATHEMATIKA und MAPLE verwiesen, wobei in beiden Systemen auftretende technische Schwierigkeiten nicht näher diskutiert werden.

Das Buch beginnt mit drei einführenden Kapiteln zu den geometrischen Grundlagen, den Lie-Gruppen und der Darstellungstheorie, in denen auf relativ komprimierte Weise das später benötigte Material zusammengefaßt und Bezeichnungen und Definition geklärt und vereinbart werden. Wie stets in solchen Fällen ist es sicher notwendig, daß ein Leser, der mit der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten oder der Lie-Gruppen und Lie-Algebren und ihrer Darstellungen nicht besonders vertraut ist, die ausreichend zitierte Literatur speziell zu dem einen oder anderen dieser Gegenstände zur Hand nimmt, um das notwendige Verständnis zu gewinnen. Jedoch sollte auch ein Leser, der mit allen diesen Gegenständen bestens vertraut ist, diese ersten drei Kapitel nicht einfach überschlagen, oder nur unter dem Blickpunkt der Vereinbarung von Definitionen und Bezeichnungen betrachten. Schon hier gelingt es dem Verfasser, immer wieder den Leser durch gut gewählte Beispiele und Aufgaben für die im Folgenden im Mittelpunkt des Interesses stehenden Fragen der Symmetrie, der Invarianten, Normalformen und Äquivalenzprobleme zu sensibilisieren.

Die nächsten vier Kapitel behandeln die Symmetrie-Methoden in der Theorie der Differentialgleichungen. Eine ausführliche Behandlung von Jet-Räumen und Kontakt-Transformationen ermöglicht die Übersetzung von Symmetrien von Differentialgleichungen in Symmetrien geometrischer Objekte.

Deren Invarianten und Differentialinvarianten werden konstruktiv untersucht und klassifiziert. Zwei Kapitel sind den Symmetrien von Differentialgleichungen und Variationsproblemen gewidmet. Dabei finden in dem einen Kapitel die Integration und Klassifikationsfragen für gewöhnliche Differentialgleichungen sowie die Linearisierung partieller Differentialgleichungen, in dem anderen die Invarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen, die Klassifikation von Variationsproblemen und die Untersuchung von invarianten Kontakt-Formen und Evolutionsgleichungen besonderes Interesse.

Hier, wie schon oben, muß auf die Vielzahl von wichtigen Beispielen und Aufgaben hingewiesen werden, die in den Text eingebaut sind, diesen einerseits auflockern, andererseits den Leser zu mitunter durchaus anspruchsvoller Mitarbeit auffordern und in jedem Fall die vielfältigen, oft sehr unterschiedlichen Anwendungen von Symmetriebetrachtungen verdeutlichen. Es muß aber auch festgestellt werden, daß der Autor immer wieder in seinen Kontext gehörende Ergebnisse ohne Beweis zitiert. In den meisten dieser Fälle würde ein Beweis unvertretbar lang sein und der Autor zieht es vor, Zusammenhänge aufzuhellen und den Leser für detaillierte Beweise auf die Literatur zu verweisen. Für einen interessierten Leser entstehen hierdurch eine Fülle interessanter Aufgabenstellungen, da allein die „Übersetzung" klassischer Beweise in die Sprache der Mannigfaltigkeiten, Vektorbündel, Differentialformen, Jet-Räume etc. nicht immer sofort erkennbar und selbstverständlich ist. Andererseits zeigt ein Blick in die Literatur, daß sich die Mühe lohnt, da man fast immer wesentliche Vereinfachungen klassischer Beweise erwarten darf, die sie klarer und durchsichtiger machen, mitunter auch zu erweiterten Ergebnissen führen. Das Buch selbst liefert in diesen wie in den folgenden Kapiteln interessante und wichtige Beispiele für diesen Sachverhalt.

In den Kapiteln 8 bis 12 wird das Äquivalenzproblem im Sinne von Cartan behandelt. Die Grundlage bilden Untersuchungen zur Äquivalenz von Coframes. Das Äquivalenzproblem für Coframes wird auf der Grundlage klassifizierender Mannigfaltigkeiten gelöst, die die klassifizierenden Funktionen als Ausdruck funktionaler Abhängigkeiten zwischen strukturellen Invarianten in leichter handhabbarer Weise ersetzen. In den beiden folgenden Kapiteln wird der Zusammenhang zwischen Äquivalenzproblemen, die in der Sprache der Differentialformen formuliert sind und dem Äquivalenzproblem für Coframes diskutiert und die Cartansche Methode als algorithmischer Zugang zur Normalisierung der Parameter der Strukturgruppe und deren Reduktion beschrieben, die in geeigneten Fällen die Zurückführung auf das Äquivalenzproblem der Coframes leistet. Dabei werden Anwendungen auf die klassische Invariantentheorie einerseits, sowie auf Variationsprobleme zweiter Ordnung andererseits ausführlich erörtert. Die beiden nächsten Kapitel behandeln die Cartansche Methode für den Fall, daß eine vollständige Reduktion der Strukturgruppe nicht möglich ist. Die verschiedenen möglichen Typen von Problemen die beim Versagen der vollständigen Reduktion entstehen, werden beschrieben und einander gegenübergestellt, natürlich auch an Beispielen erläutert.

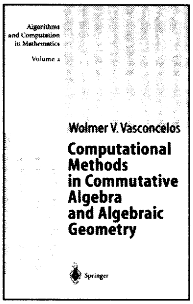
Schließlich geben die letzten drei Kapitel des Buches einen Überblick über die benötigten Existenzaussagen zur Lösung von Systemen von Differentialgleichungen und Differentialformen, die die Grundlage für die Cartansche Methode bilden: der Satz von Frobenius, der die Lösungen involutiver Systeme von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung charakterisiert, und der Satz von Cartan-Kähler als eine Erweiterung des Cauchy-Kowalewskaja-Existenzsatzes für analytische Systeme partieller Differentialgleichungen auf überbestimmte Systeme.

In einem Anhang sind einige Tafeln von Lie-Algebren, Differentialinvarianten und Symmetrieklassen gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung zusammengestellt. Es gibt ein recht umfangreiches Literaturverzeichnis mit 233 Einträgen, einen ausführlichen Symbolindex, einen Autorindex und schließlich einen sehr nützlichen Subjectindex.

Das Buch ist eine anspruchsvolle, vorzüglich motivierte und zu weiteren Untersuchungen motivierende (der Verfasser weist immer wieder auf viele noch offene Fragen hin) zeitgemäße Darstellung der Ideen von Lie und Cartan und ihrer Entwicklung, das viele Leser und Interessenten finden sollte. Schließlich ist die Frage, was die Essenz eines mathematisch formulierten Problems ist und was lediglich formale Beschreibung, eine der Kernfragen mathematischen Verständnisses.

Greifswald H. Boseck

New from Springer



W.V. Vasconcelos

Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry

1998. XI, 394 pp. 11 figs.
(Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 2)
Hardcover DM 118,-
ISBN 3-540-60520-7

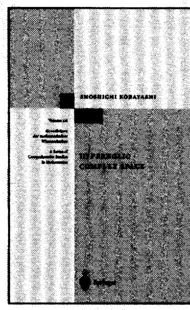
Deals with methods and techniques to tackle problems that can be represented by data structures which are essentially matrices with polynomial entries, mediated by the disciplines of commutative algebra and algebraic geometry. The volume relates discoveries by a growing, interdisciplinary group of researchers in the past decade, highlightening the use of advanced techniques to bring down the cost of computation. Includes concrete algorithms written in MACAULAY.

N. Koblitz

Algebraic Aspects of Cryptography

1998. IX, 206 pp. 7 figs.
(Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 3)
Hardcover DM 98,-
ISBN 3-540-63446-0

The first half is a self-contained informal introduction to areas of algebra, number theory, and computer science that are used in cryptography. Most of the material in the second half - "hidden monomial" systems, combinatorial-algebraic systems, and hyperelliptic systems - has not previously appeared in monograph form. The Appendix by Menezes, Wu, and Zuccherato gives an elementary treatment of hyperelliptic curves.



S. Kobayashi

Hyperbolic Complex Spaces

1998. XIII, 471 pp. 8 figs.
(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 318)
Hardcover DM 168,-
ISBN 3-540-63534-3

A comprehensive and systematic account on the Carathéodory and Kobayashi distances, hyperbolic complex spaces and holomorphic mappings with geometric methods. A very complete list of references should be useful for prospective researchers in this area.

H.L. Resnikoff, R.O.W.Wells, Jr.

Wavelet Analysis

The Scalable Structure of Information

1998. Approx. 540 pp. 119 figs.
Hardcover DM 128,-
ISBN 0-387-98383-X

This text introduces the ideas and methods of wavelet analysis, relates them to previously known methods in mathematics and engineering, and shows how to apply wavelet analysis to digital signal processing.

Please order from
Springer-Verlag Berlin
Fax: + 49 / 30 / 8 27 87- 301
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

Errors and omissions excepted.
Prices subject to change without notice.
In EU countries the local VAT is effective.

Springer