E 20577 F
101. Band Heft 3
ausgegeben am 24.8.1999

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, daß die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 168,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH Stuttgart und Leipzig, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax (0711) 78901-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 101, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

E. Novak: Numerische Verfahren für Hochdimensionale Probleme und der Fluch der Dimension

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen
email: krieg@rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund
email: gather@omega.statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
email: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
email: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße $1^1/_2$, 91054 Erlangen
email: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
email: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig
101 (1999) 97–115
Mathematics Subject Classification: 01 A 60, 22 E 46
Keywords and Phrases: Lie groups, representations, invariant theory

The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl

P. Slodowy, Hamburg

Any historical development takes place inside a complicated network of interactions of the most various kinds. This is especially true of Hermann Weyl's celebrated early work on the representation theory of compact and complex Lie groups [34]. There is already an excellent account on this and later work of Hermann Weyl on representation theory by Armand Borel [2] which deals with almost all the strands that came together in Weyl's papers. Also there is forthcoming work by Thomas Hawkins on Weyl's shift of interest from relativity theory to representation theory [13]. The aim of this note is to pick up one of these strands leading from the works of A. Hurwitz [17] and I. Schur [22] to Weyl's celebrated "character formula". In our presentation we shall adhere to actual mathematical terminology and we have not made any research into sources beyond published mathematical articles. Thus, from the historical side our presentation may well leave open numerous questions.

1 The character formula

Herman Weyl's formula for the character of the irreducible representation $L(\lambda)$ with highest weight λ of a semisimple complex Lie group G reads:

$$\chi_\lambda = \frac{\sum\limits_{w\in W} \det(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum\limits_{w\in W} \det(w) e^{w(\rho)}} .$$

It may be viewed as the culmination point of a series of mathematical developments starting in the last century. Before we are going into details let us explain the meaning of this formula in present-day terminology (as to be found e.g. in the textbooks [1], [3], [4], [5], [23]). To simplify our approach and to link it more to the essential technical developments in the works of A. Hurwitz, I. Schur, and H. Weyl, let us assume that G is a compact Lie group with simply connected semisimple part, for example the unitary group $G = U(n)$.

Let $T \subset G$ be a maximal torus of G. Then $T \cong (S^1)^r$ where $S^1 = U(1)$ is the circle group and r the (reductive) rank of G, e.g. $T =$ subgroup of diagonal matrices in $U(n)$, $T \cong (U(1))^n$. Any element of G may be conjugated into T (e.g. any element in $U(n)$ can be diagonalized by means of a unitary base change). Let $P = \mathrm{Hom}(T, S^1)$

denote the group of characters of T into S^1. Following established tradition we shall identify P (via differentials at e) as a lattice $\mathbb{Z}^r$ inside $\mathbb{R}^r = (\mathrm{Lie}\,T)^*$ the dual $\mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}\,T, \mathbb{R})$ of the Lie algebra of T. Then the global character corresponding to $\mu \in P$ is written in (formal) exponential form

$$e^{\mu} : T \to S^1.$$

Let us illustrate this in the case of $G = U(n)$. We identify Lie T with $\mathbb{R}^n$ by

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,T \\ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2\pi i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\pi i\varphi_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

Then $P = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$, and for

$$\mu = (m_1, \dots, m_n)\ ,\ t = \begin{pmatrix} \exp(2\pi i\varphi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(2\pi i\varphi_n) \end{pmatrix},$$

we have

$$e^{\mu}(t) = \exp\left(2\pi i(m_1\varphi_1 + \dots + m_n\varphi_n)\right).$$

Let $N_G(T)$ denote the normalizer of T in G. Then $W = N_G(T)/T$ is a finite group, the "Weyl group" of (G, T) which acts naturally and faithfully as a euclidean reflection group on $P \subset \mathbb{R}^r$. The reflection hyperplanes ("mirrors") are defined as the orthogonals to the roots of T in G which are defined as the characters $\alpha \in P\backslash\{0\}$ such that the T-eigenspace

$$(\mathrm{Lie}\,G)_\alpha := \{X \in \mathrm{Lie}\,G | Ad(t)X = e^{\alpha}(t)X \quad \text{for all} \quad t \in T\}$$

with respect to the adjoint representation

$$Ad : G \to \mathrm{Aut}\,(\mathrm{Lie}\,G)$$

is non-trivial.

Let us consider the example $U(n)$. Let $\varepsilon_i \in P$ denote the i-th standard basis vector of $\mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, n$. Then $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i$, and the set of roots is

$$\Sigma = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j | i \neq j\} \subset P.$$

The Weyl group W is isomorphic to the symmetric group S_n acting by permutation of the n coordinates on P.

In general, the set Σ of all roots can be partitioned, in many ways,

$$\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$$

into "positive" and "negative" roots, $\Sigma^- = -\Sigma^+$ $\left(\text{e.g. } \Sigma^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j | i < j\} \text{ in case } U(n)\right)$, and, correspondingly, a fundamental domain P_+ for the action of W on P can be specified. The set P_+ is called the set of dominant weights and may be described as follows:

$$P_+ = \left\{ \mu \in P | \frac{2(\alpha, \mu)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad \text{for all} \quad \alpha \in \Sigma^+ \right\}$$

where $(\quad,\quad)$ denotes a W-invariant scalar product on $\mathbb{R}^r = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Let $\rho \in P$ be an element of the form

$$\rho = \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha \right) + \omega$$

where ω is an arbitrary element in P^W, i.e. fixed by W, or such that $(\alpha, \omega) = 0$ for all $\alpha \in \Sigma$. For all $\lambda \in P$ one has

$$\lambda \in P_+ \Longleftrightarrow \lambda + \rho \in P_{++}$$

where $P_{++} = \left\{ \mu \in P | \frac{2(\alpha,\mu)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{N}_{>0} \text{ for all } \alpha \in \Sigma^+ \right\}$ is the "interior" of the fundamental domain P_+.

In case $G = U(n)$, we have with respect to the choices made and the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$

$$P_+ = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \varepsilon_i | m_i \geq m_{i+1} \right\}, \quad P_{++} = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \varepsilon_i | m_i > m_{i+1} \right\}.$$

A convenient choice is

$$\rho = (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}.$$

Let now $L(\lambda)$ be the irreducible $\mathbb{C} - G$-module with highest weight $\lambda \in P^+$. Then $L(\lambda)$ decomposes with respect to T into a direct sum of eigenspaces

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \bigoplus_{\mu \in P} L(\lambda)_\mu, \\ L(\lambda)_\mu &= \{ v \in L(\lambda) | t.v = e^\mu(t) v \ \text{ for all } t \in T \}. \end{aligned}$$

The character value $\chi_\lambda(t) = \operatorname{trace}(t, L(\lambda))$ of t on $L(\lambda)$ may be written

$$\chi_\lambda(t) = \sum_{\mu \in P} \dim L(\lambda)_\mu e^\mu(t)$$

and Weyl's formula states

$$\sum_{\mu \in P} \dim L(\lambda)_\mu e^\mu = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)}}$$

as functions on T. Here we still have to add that $\det(w)$ is the determinant of w as a transformation on P $(\det(w) = \pm 1)$.

Let us come back to our example $G = U(n)$. For any $\mu = \sum_{i=1} m_i \varepsilon_i \in P$ and

$$t = \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & x_n \end{pmatrix} \in T$$

we have

$$e^{\mu}(t) = x_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n}.$$

Let $w = \sigma$ be an element of $W = S_n$. Then

$$e^{w(\mu)}(t) = x_{\sigma(1)}^{m_1} \cdot \cdots \cdot x_{\sigma(n)}^{m_n}$$

and

$$\left(\sum_{w \in W} \det(w) e^{w}(\mu)\right)(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{m_1} \cdot \cdots \cdot x_{\sigma(n)}^{m_n}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & \cdots & x_n^{m_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{m_n} & \cdots & x_n^{m_n} \end{vmatrix}.$$

In particular, for $\rho = (n-1)\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$ we obtain the discriminant (Vandermonde)

$$\left(\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)}\right)(t) = \Delta(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Thus, for a dominant weight $\lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i$, we have the following form of Weyl's character formula

$$\chi_\lambda(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{c_1+(n-1)} & \cdots & x_n^{c_1+(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{c_n} & \cdots & x_n^{c_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{0} & \cdots & x_n^{0} \end{vmatrix}},$$

a formula which had already been found by I. Schur in his dissertation (Berlin, 1901, cf. [19] §23, formula (44)) where he had determined the irreducible polynomial representations of $GL_n(\mathbb{C})$ as well as their characters (the above formula is just a rewriting of "Schur's character formula" involving the characters of $GL_n(\mathbb{C})$ on the symmetric powers $S^d(\mathbb{C}^n)$ by means of the Jacobi-Trudy-formula in the theory of symmetric functions).

2 Adolf Hurwitz: The invariant integral on Lie groups and the construction of invariants

The main objects of invariant theory in the last century were polynomial invariants and covariants. In present-day-terminology these relate to actions of a group G on finite-dimensional complex vector spaces V and W or to linear representations

$$\rho : G \to GL(V) \quad \text{and} \quad \mu : G \to GL(W).$$

An *invariant* $f : V \to \mathbb{C}$ is a polynomial function $f \in \mathbb{C}[V]$ satisfying

$$f(gv) = f(v) \quad \text{for all} \quad v \in V \quad \text{and all} \quad g \in G.$$

A *covariant* $\phi : V \to W$ is a G-invariant polynomial map $\phi \in \mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} W$, i.e. ϕ satisfies

$$\phi(gv) = g\phi(v) \quad \text{for all} \quad v \in V \quad \text{and all} \quad g \in G.$$

In particular, any covariant ϕ may also be viewed as an invariant in the G-module $\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} W$,

$$\phi \in (\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} W)^G.$$ [1]

[1] In most classical situations, the spaces V and W are themselves spaces of (homogeneous) polynomials on some vector spaces U with G-action,

$$V = \mathbb{C}[U]_m, \quad W = \mathbb{C}[U]_n.$$

A covariant φ attaches thus to any form $F \in \mathbb{C}[U]_m$ a form $\varphi(F) \in \mathbb{C}[U]_n$ in a polynomial and "covariant" way. If $x_1, \ldots, x_N$ are coordinates on U and $a_1, \ldots, a_M$ are coordinates on V (=coefficients of the forms of degree m in the x_i) then $\varphi(F)$ can be expressed as a polynomial in the a_j and x_i satisfying the appropriate invariance condition. Since the geometry of the zero-set of F and $\varphi(F)$ is untouched by a scalar factor, invariance is also often defined up to a character of G, i.e. a power of the determinant in case $G = GL(U)$. We shall neglect this modification without any harm.

For a finite group G, the most obvious way to construct G-invariants from arbitrary elements (in a G-Module M) is given by averaging over the group:

$$I(P) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g.P)$$

for any $P \in M$.

For certain infinite discrete groups an analogous summation procedure had occurred in the works of Eisenstein, Weierstraß and Poincaré (elliptic and modular functions, Poincaré series for automorphic functions and forms).

Adolf Hurwitz (1859–1919) had been familiar with this construction, as a student of Felix Klein as well as a temporary student at Berlin. In particular, in his thesis [15] he had made essential use of it in the foundations of the theory of elliptic modular functions. If not through his immediate mathematical interests, at least through his long-term friendship with David Hilbert (1862–1943), dating back to common years at Königsberg, Hurwitz may have been attracted to the field of invariant theory proper. After a first clarifying article on the basic setting of invariant theory ([16]) containing, among others, a clear presentation of the representations of linear groups on symmetric and alternating tensors as well as a generalization of Hermite's reciprocity law he submits a note to the "Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen" with the title "Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration" ([17]). In it he proposes to replace the summation in the averaging process for finite, or suitable infinite groups by an integration procedure in the case of "continuous" groups. His main concern is the classical situation, i.e. the study of polynomial invariants under $SL_n(\mathbb{C})$ on the various spaces "of algebraic forms in n variables", i.e. on the symmetric powers $S^d(\mathbb{C}^n)$ of the dual of $\mathbb{C}^n$. However, by his approach he is naturally led to the consideration of "closed" subgroups of $SL_n(\mathbb{C})$.

As a start, he restricts to the real field and the special orthogonal group $G = SO_n(\mathbb{R})$ acting on $\mathbb{R}^n$ and the various symmetric powers. He views G as a compact submanifold ("Gebilde") of the euclidean space $\mathbb{R}^{n^2} = M_n(\mathbb{R})$ which thus inherits an induced Riemannian metric and associated volume form. Since, by right multiplication, G acts orthogonally on $M_n(\mathbb{R})$, preserving the submanifold G, the metric and volume form on G are also preserved. Thus he obtains, in actual terminology, a right-invariant volume form dg on G:

$$\int_G f(gh)dg = \int_G f(g)dg \quad \text{for all} \quad h \in G, f \in C^0(G, \mathbb{R}),$$

$$\int_G dg = M > 0.$$

If $F : S \to \mathbb{R}$ is an arbitrary polynomial function on $S = S^d(\mathbb{R}^n)$, then the function $I(F) = J : S \to \mathbb{R}$ defined by

$$J(a) = \int_G F(ga)dg$$

is a G-invariant function on S.[2]

Of course, the volume dg is easily normalized (by dividing by M), and then any invariant F is reproduced

$$I(F) = F \quad \text{for all} \quad F \in \mathbb{R}[S]^G.$$

Using Hilbert's procedure [14], V, in his proof for the finite generation of polynomial $SL_n(\mathbb{C})$-invariants and replacing his differential Cayley operator Ω by I this gives a generalization of his proof to the situation at hand as well as to all situations where a form dg with the above properties exists.

Before Hurwitz goes on to these other situations he first gives a completely explicit formula for dg in terms of Euler-angles:

For $\nu = 1, \ldots, n-1$ and $\varphi \in \mathbb{R}$ (or $\varphi \in [0, 2\pi]$) let $E_\nu(\varphi)$ denote the orthogonal transformation of $\mathbb{R}^n$ fixing all coordinates $x_i, i \neq \nu, \nu+1$, and rotating the $(\nu, \nu+1)$-plane by the angle φ. Then, with respect to some ordering of the $\frac{n(n-1)}{2}$ pairs $i < j, i,j \in \{1, \ldots, n\}$, there is a function $\nu : \{(i,j) | i < j\} \to \{1, \ldots, n-1\}$ such that

$$\begin{array}{rcl} E : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} & \longrightarrow & G \\ (\varphi_{ij}) & \longmapsto & \prod\limits_{i<j} E_{\nu(i,j)}(\varphi_{ij}) \end{array}$$

gives a parametrization of G (injective in a suitable subset of $[0, 2\pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}$).

Neglecting a constant factor, Hurwitz obtains the following form for the pull back of the volume form

$$E^*(dg) = \prod_{i<j} \sin(\varphi_{ij})^{i-1} d\varphi_{ij}\,,$$

in particular, for $n = 2$ we get

$$E^*(dg) = d\varphi_{12}$$

and for $n = 3$

$$E^*(dg) = \sin(\varphi_{23})\, d\varphi_{12}\, d\varphi_{23}\, d\varphi_{13}.$$

The evaluation of an integral

$$I(F), \quad \text{for} \quad F \in S^d(\mathbb{R}^n)$$

is thus reduced to elementary trigonometric integrals.

Hurwitz now turns to the case of main interest, polynomial $SL_n(\mathbb{C})$-invariants on $S^d(\mathbb{C}^n)$. He observes that, due to the non-compactness of $SL_n(\mathbb{C})$, the averaging procedure

$$\int F(ga)dg$$

---

[2] Unfortunately, Hurwitz gives only a verbal proof of this result. It seems to us that his set-up would require a left-invariant volume. Anyhow, the dg constructed is left-invariant, too, and also transposition (or inversion) on G are trivially metric and volume preserving.

(for a suitable invariant volume dg) will diverge, in the general situation. However, looking at $\mathbb{C}^n$ with its standard hermitian form as euclidean $\mathbb{R}^{2n}$ Hurwitz concentrates on that subgroup G of $SL_n(\mathbb{C})$ which acts orthogonally on $\mathbb{R}^{2n}$, i.e. the special unitary group $SU_n(\mathbb{C})$ which is of real dimension $n^2 - 1$. As a closed subgroup of $SO_{2n}(\mathbb{R})$ it admits a (right-) invariant metric and volume. Moreover, there is an analogue of the Euler-parametrization for G

$$E : \mathbb{R}^{n^2-1} \to G$$

which extends to a complex-analytic parametrization

$$E_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{n^2-1} \to SL_n(\mathbb{C}).$$

Thus, there is an explicit invariant integral

$$I(F)(a) := \int_G F(ga)dg$$

for $G = SU_n(\mathbb{C})$, and any G-invariant polynomial on $S = S^d(\mathbb{C}^n)$ is automatically $SL_n(\mathbb{C})$-invariant (by analytic continuation; note that the matrix coefficients of $g \in SL_n(\mathbb{C})$ on S are polynomials in those of g).

As in the case of the orthogonal group, Hurwitz determines the concrete form of $E^*(dg)$ reducing the evaluation of $I(F)$ to the computation of elementary integrals and, in the case of the action of $SL_2(\mathbb{C})$ on binary forms, he derives formulas for $I(F)$ in terms of the coefficients of the form F.

In the final section the construction of an invariant integral[3] is extended to arbitrary Lie groups. From our present understanding this is done by right or left translation of a volume form on the Lie algebra of G. Due to the conceptual limitations of his day Hurwitz has to restrict to Lie groups diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$ or, alternatively, to "local" Lie groups. However, his arguments could well be extended to arbitrary group manifolds. Of course, for non-compact groups the effectiveness of the integral procedure

$$\int_G F(ga)dg$$

to produce invariants depends on the convergence of that integral which may fail, in most cases.

3 Issai Schur: Characters and the enumeration of invariants

Representation theory of finite groups as we understand it today originated mainly in the work of G. Frobenius (1849–1917) at the end of last century (cf. [10], [11]). In his efforts he was soon joined by his student, Issai Schur (1875–1941), who, in the first decade of his mathematical career (1901–1911), contributed a

[3] Hurwitz' development may consistently be read as dealing either with right- or with left-invariant volumes. Employing present-day conventions (on the composition order of maps) one should consider right-invariant volumes.

series of fundamental investigations to the new field. In his dissertation at Berlin University (1901) Schur determined the irreducible polynomial representations of GL_n (more or less explicitly over the base field $\mathbb{C}$ of complex numbers but essentially valid over an arbitrary field of characteristic zero). In particular, he developed a formula for their characters (cf. our first section) and a relation to the representation theory of the symmetric groups. Other papers, partly in collaboration with Frobenius, deal with basic questions on projective, real, or integral representations, and special attention is given to comprehensive explicit results in case of the symmetric, alternating, and 2×2-linear groups over finite fields. Whereas in the period (1911–1923) his mathematical interests spread out into various directions of analytic, algebraic or arithmetic nature Schur's entrance into the Prussian Academy of Sciences (since 1922 as a "successor" to his teacher, G. Frobenius, cf. [21]) may have brought him back to his origins[4] so that in 1924 he was able to submit to the academy three extensive reports on a "new application of integral calculus to problems in invariant theory" ([22]).

Schur begins his first paper (1. Mitteilung) with some improvements on Hurwitz' treatment of "projective invariants", i.e. polynomial invariants of $SL_n(\mathbb{C})$ (a more explicit proof of the "Zariski-denseness" of $SU_n(\mathbb{C})$ in $SL_n(\mathbb{C})$, a simplification of Hurwitz' integral construction of $SU_n(\mathbb{C})$-invariants, and an identification of that procedure with Hilbert's original differential Ω-process), and then turns to the representation theory and the counting problem ("Abzählungsproblem") of the special orthogonal group $SO_n(\mathbb{R})$. He recalls Hurwitz' construction of the right-invariant integral on $SO_n(\mathbb{R})$ by means of the Euler parametrization, and in analogy to the development for finite groups, he uses it to establish the basic properties of continuous complex representations $\rho : SO_n(\mathbb{R}) \to GL(V)$ and their associated characters $\chi : SO_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \chi(g) = \operatorname{trace} \rho(g)$, as there are:

- any such ρ is unitary with respect to a suitable hermitian scalar product on V,
- as a consequence, any such ρ is completely reducible, and
- up to "similarity" (conjugation in $GL(V)$) ρ is completely determined by its character χ,
- with respect to the hermitian product

$$\langle f, h\rangle := \int_G f(g)\bar{h}(g)dg$$
$$\int_G dg = 1, \qquad G = SO_n(\mathbb{C}),$$

on the space $C^0(G, \mathbb{C})$ of continuous functions we have the orthonormality relations for irreducible ("einfache") characters χ and χ':

$$\langle \chi, \chi'\rangle = \delta_{\chi\chi'} \quad \text{(Kronecker-Delta)} .$$

[4] It is very hard to get any information directly out of Schur's papers about his motivations. Besides his relation to Frobenius also the book by E. Study on invariant theory [26] containing some polemic against his contemporaries may have had an effect on Schur (Study and Schur had been colleagues at Bonn University for a short time, 1913–1916). At least in the case of Hermann Weyl the rôle of Study's book is acknowledged (cf. Borel [2], Hawkins [13]). See however Hawkins [12] for the history of the counting problem and Schur's position.

Quite generally, the last point gives a way to calculate the dimension of the space V^G of fixed vectors in a representation $\rho : G \to GL(V)$ with character χ, i.e.

$$\dim V^G = \langle \chi, 1 \rangle = \int_G \chi(g) dg.$$

In particular, if one wants to "count" the linearly independent G-invariant homogeneous polynomials of degree k on V one has to compute

$$\int_G \chi^{(k)}(g) dg$$

where $\chi^{(k)}$ is the character of the induced action of G on the k-th symmetric power of V^* (or V since G acts orthogonally). Using Molien's generating series (in the formal variable z)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi^{(k)}(g) z^k = \frac{1}{\det(1 - z\rho(g))}$$

Schur gives some reformulations of that integral and finally some explicit computations for $G = SO_3(\mathbb{R})$ and multihomogeneous invariants of m-tuples of bilinear forms on $\mathbb{R}^3$, an example studied before by Study [24], [26]. Before closing his article Schur extends Hurwitz' right-invariant integral to the full orthogonal groups and remarks that the general results of his paper apply to all cases of groups where Hurwitz' construction of the integral works. He underlines that the orthogonal groups are not only quite relevant for applications but that the "Abzählungsproblem" admits of a "praktisch wirklich brauchbare" solution by means of his integral calculus.

More than an application of integral calculus to problems in invariant theory, Schur's second paper ("II: Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen") is an application of invariant theory to integral calculus. In it he succeeds in determining the (continuous) irreducible representations of all orthogonal groups, $O_n(\mathbb{R})$ and $SO_n(\mathbb{R})$,their degrees and, apart form the "two-sided" ("zweiseitige") representations of $SO_{2\nu}(\mathbb{R})$, their characters.

The basic result from invariant theory used is the later so called "First Fundamental Theorem" (cf. Weyl [36]) for the orthogonal group going back to Study [25] but reproved by Schur:

Let $V = \mathbb{R}^n$ denote the natural representation space of the orthogonal group $O_n(\mathbb{R})$ with invariant scalar product

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (v, w) & \longmapsto & v \cdot w. \end{array}$$

Then the first fundamental theorem describes the $O_n(\mathbb{R})$-invariant polynomials of a set of r vectors $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$, $v_i \in V$, or, in today's terminology, the multi-graded ring

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[V \times \ldots \times V]^G &= (\mathbb{R}[V] \otimes \ldots \otimes \mathbb{R}[V])^G \\ &= \bigoplus_{d_1, \ldots, d_r} (\mathbb{R}[V]_{d_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{R}[V]_{d_r})^G \end{aligned}$$

where $G = O_n(\mathbb{R})$ and $\mathbb{R}[V]_d$ denotes the homogeneous real polynomials of degree d

on V (alternatively, the k-th symmetric power on $V^* \cong V$). The result is that for $r \leq n$ this $\mathbb{R}$-algebra is generated by the $\frac{r(r+1)}{2}$ algebraically independent contractions $J_{\alpha\beta}, 1 \leq \alpha \leq \beta \leq r$,

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta} : V \times \ldots \times V &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ J_{\alpha\beta}(v_1, \ldots, v_r) &= v_\alpha \cdot v_\beta \end{aligned}$$

(scalar product of v_α and v_β). By means of Molien's formula and in terms of generating functions this can be expressed as follows ($f(z,g) = \det(1 - zg)$ will denote the characteristic polynomial of g on V and p_d the character of G on $\mathbb{R}[V]_d$)[5]:

$$(\mathrm{MS}) \int_G \frac{dg}{f(z_1,g)\cdots f(z_r,g)} = \sum_{d_1,\ldots,d_r} \left(\int_G p_{d_1} \cdots p_{d_r} dg \right) z_1^{d_1} \cdots z_r^{d_r} =$$

$$\sum_{d_1,\cdots,d_r} \dim\left(\mathbb{R}[V]_{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}[V]_{d_r}\right)^G z_1^{d_1} \cdots z_r^{d_r} = \prod_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq r} \frac{1}{1 - z_\alpha z_\beta} .$$

This formula, evaluating all the integrals $\int_{O_n(\mathbb{R})} p_{d_1}(g) \cdots p_{d_r}(g) dg,\ d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}_0$, is the cornerstone for Schur's subsequent reasoning.

In his thesis (1901) Schur had expressed the irreducible polynomial characters of $GL_n(\mathbb{C})$ as determinants in selected symmetric powers p_k of the natural representation. Since the restriction of p_k to $O_n(\mathbb{R})$ decomposes, Schur singles out the spherical harmonics

$$q_k = p_k - p_{k-2}$$

(corresponding to the subspace of $S^k(V)$ orthogonal to $q.\ S^{k-2}(V), q$ denoting the invariant symmetric bilinear form) and proposes once more a determinantal form for the irreducible characters of $SO_n(\mathbb{R})$ (we shall assume $n = 2\nu + 1$ odd from now on[6]).

For any set of integers $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_\nu \geq 0$ he puts

$$\chi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu} = \begin{vmatrix} q_{\alpha_1} & q_{\alpha_1+1} + q_{\alpha_1-1} & \cdots & q_{\alpha_1+\nu-1} + q_{\alpha_1-\nu+1} \\ q_{\alpha_2-1} & q_{\alpha_2} + q_{\alpha_2-2} & \cdots & q_{\alpha_2+\nu-2} + q_{\alpha_2-\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{\alpha_\nu-\nu+1} & q_{\alpha_\nu-\nu+2} + q_{\alpha_\nu-\nu} & \cdots & q_{\alpha_\nu} + q_{\alpha_\nu-2\nu+2} \end{vmatrix}$$

(where $q_k = 0$ if $k < 0, q_0 = 1, q_1 = p_1$), and by extremely skillful manipulations with determinants he is able to deduce the orthogonality relations

$$\int_{SO_n(\mathbb{R})} \chi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu} \cdot \chi_{\beta_1,\ldots,\beta_\nu} = \delta_{\alpha_1,\beta_1} \cdots \delta_{\alpha_\nu,\beta_\nu}$$

---

[5] This formula also holds for $SO_n(\mathbb{R})$ as long as $r < n$. For $r = n$ one has to take into account the determinant of n vectors as an additional $SO(\mathbb{R})$-invariant.

[6] Actually, Schur proceeds by a subtle interplay between representations of $O_n(\mathbb{R})$ and $SO_n(\mathbb{R})$ for arbitary n. Whereas this is nontrivial for even n, the direct product structure $O_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R}) \times \{\pm 1\}$, for n odd, allows to read Schur's presentation along our somewhat simplified account. In this case, all characters are real valued, in addition!

from formula (MS) in a purely algebraic way. A computation of the values of $\chi_{\alpha_1,\dots\alpha_\nu}$ at the identity gives a positive number $M_{\alpha_1,\dots,\alpha_\nu}$ thus showing that they are irreducible characters of that degree.

To prove the completeness of his set of characters Schur has to show that there is no character $\gamma : SO_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ such that

$$\int\limits_{SO_n(\mathbb{R})} \gamma(g)\chi_{\alpha_1,\dots,\alpha_\nu}(g)dg = 0$$

for all $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu \geq 0$ (we still keep the assumption n odd, $n = 2\nu + 1$). For that he employs a method of dimensional reduction which, in a modified form, should become central in Hermann Weyl's approach and may be described, in present terminology, as follows.

Any class function on $G = SO_n(\mathbb{R})$ is determined by its restriction to the maximal torus $T \cong (S^1)^\nu$ of 2×2-blockdiagonal rotations. In particular, a restricted character $\gamma|_T$ decomposes as a finite sum of terms of the form

$$t_{\alpha_1,\dots,\alpha_\nu}(g) = \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_\nu)} e^{i(\beta_1\varphi_1+\cdots+\beta_\nu\varphi_\nu)}$$

where $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ are the rotation angles of $g \in T$ and where $(\beta_1, \dots, \beta_\nu)$ runs over the orbit of$(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ under the action of the group $W = S_\nu \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\nu$ of permutations and sign changes of the α_i. Conversely, he shows that all such orbit sums may be obtained as finite linear combinations of the restricted characters $\chi_{\alpha_1,\dots,\alpha_\nu}|_T, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu \geq 0$. Without providing further details he claims that this leads to the completeness statement ("Dies ist gewiß richtig..").[7]

The paper concludes with remarks on the rationality of the representations constructed, the exterior powers of the natural representation, the group $SO_4(\mathbb{R})$ and some properties of the degrees of the irreducible representations.

Schur's third paper ("III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen") takes up a problem discussed already in his second paper. (In the following, we shall assume once more $n = 2\nu + 1$, for simplicity).

Any continuous class function γ on $G = SO_n(\mathbb{R})$ is completely determined by its restriction $\gamma|_T$ to the maximal torus T and yields an element in $C^0(T, \mathbb{R})^W$,i.e. as a function of the rotation variables $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ the restriction is invariant with respect to permutations and sign-changes of the φ_i. Already in his separate discussion of the case $n = 3$, Schur had found a function $M \in C^0(T, \mathbb{R})^W$ such that

[7] The argument may be easily completed as follows: For the restrictions to T one has a linear expression

$$\gamma|_T = \sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)}\chi_{(\alpha)}|_T, c_{(\alpha)} \in \mathbb{C},$$

$(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$. This implies the equality

$$\gamma = \sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)}\chi_{(\alpha)}$$

for the class functions on G. Orthonormality then gives $c_{(\alpha)} = 0$ for all (α), i.e. $\gamma = 0$.

$$\int\limits_G \gamma(g)dg = \int\limits_T \gamma(\varphi)M(\varphi)d\varphi$$

reducing the three-dimensional integral on the left-hand-side to a one-dimensional integral on the right. He had clearly seen the advantages of such a formula in the general case (reducing an $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensional integral to a $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$-dimensional one) but had also been unable to deduce such a formula in a direct way. Now he provides such a derivation as a consequence of his previous work on the irreducible characters. Starting from a proposed formula for M, e.g.

$$M(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) = \prod_{\alpha=1}^{\nu}(1 - \cos\varphi_\alpha) \prod_{1\leq\alpha<\beta\leq\nu} (\cos\varphi_\alpha - \cos\varphi_\beta)^2$$

for $G = SO_{2\nu+1}(\mathbb{R})$, he has to check the formula

$$\int\limits_G \gamma(g)dg = \int\limits_T \gamma(t)M(t)dt = c_0 \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \gamma(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)M(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)d\varphi_1 \ldots d\varphi_\nu$$

for all class functions γ (and a "natural" constant c_0). However, in his arguments for the completeness of his system of irreducible characters he had seen that a dense subspace of $C^0(T, \mathbb{R})^W$ was provided by the span of all products $p_{d_1} \cdots p_{d_\nu}$ (characters of symmetric powers restricted to T). Thus, by using once more the identity (MS), he has to show

$$\int\limits_T \frac{M(t)dt}{f(z_1, t) \cdots f(z_\nu, t)} = \int\limits_G \frac{dg}{f(z_1, g) \cdots f(z_\nu, g)} = \prod_{1\leq\alpha\leq\beta\leq\nu} \frac{1}{1 - z_\alpha z_\beta},$$

and he achieves this by essentially elementary means (Cauchy's determinant formula and an evaluation of one-dimensional trigonometric integrals).

For $n = 2\nu + 1$ this reduction can also be used for the full orthogonal group $O_{2\nu+1}(\mathbb{R})$, i.e. for the integration over the second component of this group. In the case $n = 2\nu$, the second component of $O_n(\mathbb{R})$ requires a modification of the function M (there is a reduction to $\nu - 1$ angular variables, now).[8]

As an application of the "simplified" integral calculus Schur rederives some of Study's enumerative numbers for the quaternary orthogonal group by means of a quick integration. The article concludes with a precise determination of the reality type of the irreducible representations of $SO_n(\mathbb{R})$ (non-trivial only for $n = 2\nu$ and "two-sided" representations).

Already in the introduction to his second paper Schur comments on the related work of E. Cartan [7], [8] on the representation theory of the "infinitesimal" semisimple Lie groups, pointed out to him by Hermann Weyl, and in an appended footnote he acknowledges recent work of Weyl [33] providing a new approach to the representation theory of the group $SO_n(\mathbb{R})$ in a development of Cartan's method. Moreover, in a "note added in proof" at the same place he signals recent success of

[8] As found out later (cf. Weyl [36]) the structure of M is the same as that for the symplectic group in $n - 2$ dimensions.

Weyl in deriving Schur's result in a shorter way at the same time applicable to a larger class of groups. Actually, Schur's third paper is already preceded by a note of Hermann Weyl to the Prussian academy [33] in which he sketches these new methods and results. Thus, in the introduction to his third paper, Schur has to admit that Weyl has found a direct geometric way to prove the integral formula for class functions and to derive the whole representation theory of the rotation group in a direct analytic way without recourse to invariant theory (as Schur had already done for $n = 2$ and 3). Thus, Schur's work had, by then, been completely superseded by Weyl's simpler and further-reaching methods. Nonetheless, when later Weyl undertook the construction of the irreducible representations of the orthogonal groups in a purely algebraic way (Weyl [36]) his development was based on the same invariant theoretic results (the "First Fundamental Theorem") as was Schur's. In this context, also the indebtness of our two authors to R. Brauer should not go unnoticed: Schur acknowledges Brauer's help in the completeness proof of his second paper (cf. footnote 2 on p. 316 mentioning "Herrn stud. math. R. Brauer") and Weyl gives Brauer a great share for having obtained these results in (Weyl [36]) (cf. the introduction of loc. cit.).

4 Hermann Weyl: The integral and the character formula

Hermann Weyl (1885–1955) was educated as a student at Göttingen. With his doctoral dissertation (1908) and his subsequent research topics he mainly joined Hilbert's and his school's investigations on the spectral theory of integral and differential operators. As an outgrowth of his activity as a Göttingen-Privatdozent he already published his first, highly influential book "Die Idee der Riemannschen Fläche" (Weyl [27]) which, among other things, provided a first "rigorous" treatment of abstract Riemann surfaces.

In 1913 Weyl took up a chair of mathematics at the ETH Zürich and soon, under the presence of Einstein's developing theory of general relativity switched his mathematical interests to the foundation, elaboration and generalization of Riemannian geometry and relativity. Again, this led once more to a celebrated book "Raum, Zeit, Materie" ([28]) as well as to more specialized publications like "Riemann's Habilitationsvortrag" ([29]) or "Vorlesungen über das Raumproblem" ([30]). The essence of the last mentioned "Raumproblem" is a differential-geometric characterization of the orthogonal groups. As a result of E. Cartan's independent contributions to this problem ([9]) Weyl familiarized himself with Cartan's and Killing's fundamental work on the structure and representations of the semisimple Lie algebras (e.g. Killing [18], Cartan [6], [7], [8], cf. also Borel [2] and Hawkins [13] for further details).[9]

[9] In that context it should be pointed out that one of Weyl's basic techniques in his own proof (e.g. [30], 8. Vorl. u. Anhang 12) is the decomposition of a Lie algebra L into eigenspaces ("Länder") with respect to the adjoint action of a diagonalisable element $h \in L$ ("Haupttransformation"). In case of a semisimple L (which is Weyl's case, as easily derived e.g. like in Cartan [9]) and a "generic" h this leads to the Killing-Cartan decomposition of L into the direct sum of a Cartan subalgebra and one-dimensional root spaces. In that sense, Weyl was familiar with one of the fundamental techniques of the Killing-Cartan theory right from the start of his own investigations on the space problem.

As clearly stated by Weyl himself ([37]) and convincingly elaborated by Hawkins ([13], cf. also Borel [2]) his attempt to understand the nature of "fields on space-time" or of "natural" or "covariant quantities" on (differentiable) manifolds M constituted his basic motivation for the study of representation theory. In present-day terminology such fields are just sections of vector bundles associated to linear representations of the structure group G of the frame bundle $\mathcal{F}(M)$ of M. By combining Cartan's infinitesimal constructions ([7]) with Schur's argument for complete reducibility ([22], I) and his own topological arguments for the simple connectivity of the special unitary groups $SU(n), n \geq 2$, Weyl could show in [32] that all irreducible (differentiable) linear representations of SL_n (and, essentially also of GL_n) could be realized by their induced actions on subspaces of tensors of the natural representation given by distinguished symmetry conditions. It is this fact which constituted for him "the true mathematical basis of tensor calculus"[32].[10] Already before, in [31] he had reduced these symmetry conditions to those given by the Young-Frobenius idempotents, thus making contact with the Frobenius-Schur methods in representation theory (cf. Hawkins [13] for more details).

In view of this development it may have been quite natural for Schur to provide Weyl with his subsequent papers ([22], II, III) before publication. As discussed above, Schur's third paper had been dedicated to a derivation of the following fundamental "class integral formula"

$$\int_G \gamma(g)dg = \int_T \gamma(\varphi)M(\varphi)d\varphi$$

for a class function γ on $SO_n(\mathbb{R})$ and a certain auxiliary function M on the maximal torus $T \subset SO_n(\mathbb{R})$. It is this integral formula (including the explicit form of M) for which Weyl was now able to give a completely lucid geometric derivation, uniformly valid for all semisimple (complex or compact) groups. He first sketched this in a letter to Schur ([33]) and then finally elaborated this, together with other basic results in his three great papers ([34]).

Weyl's letter consists of four sections:

1) an introduction,
2) the derivation of the integral formula for the unitary groups,
3) the derivation of the character and dimension formula for the unitary groups,
4) a sketch of 3) (and 2)) for the general semisimple case.

In addition, the formulas for the classical groups ("orthogonale und Komplexgruppe") are explicitly stated in sections 2) and 3).

[10] As the history of physics has shown, the "naturality" of the fields associated to the full frame bundle $\mathcal{F}(M)$ has been superseded quickly. Dirac's relativistic wave equation deals already with spinor fields associated to the finer spin structure underlying a (semi-)Riemannian manifold and thus with the "spin representations" discovered by Cartan [7]. Moreover, today's particle physics deals with fields associated with abstract principal bundles P on M, the structure group G being now the group of "internal symmetries".

Weyl's specific arguments in sections 2) and 3) exhibit already the general structure in such a transparency that we shall describe them, once more as in our section 1 above, from our present-day point of view.[11] In particular, we assume his basic results of [34] on general semisimple groups established, like e.g. the existence of a simply-connected compact real form G with maximal torus T, character lattice P and Weyl group W for every semisimple type.

The derivation of the class integral formula is obtained in three steps:

• Any element in G is conjugate to an element in T. This fact is well-known for the unitary and orthogonal groups, easily provided for the symplectic group (in [34], II, §1), but requires some differential-geometric arguments (as under the subsequent third point) in the general case (cf. [34], IV, §1).

• Weyl regards the coset space G/T as an abstract manifold admitting a (G-left invariant) volume element. The basic fact is here the existence of a T-invariant volume element on the tangent space of G/T at T. Weyl identifies this space with the sum of the root spaces

$$\bigoplus_{\alpha\in\Sigma}(\mathrm{Lie}\,G)_\alpha{}^{12}$$

and derives the invariant volume from the occurence of positive and negative roots in pairs. The measure $d\bar{g}$ on G/T may henceforth be normalized to

$$\int_{G/T} d\bar{g} = 1.$$

• Finally, Weyl compares the volume element $(d\bar{g}) \times (dt)$ on $G/T \times T$ (here, dt denotes the normalized "angular" measure on the torus T) with the normalized volume dg on G under the conjugating map

$$\kappa : (gT, t) \longmapsto gtg^{-1},$$

or, in other words, he computes the Jacobian $J(gT, t)$ of this map. He obtains the expression

$$J(gT, t) = \prod_{\alpha\in\Sigma}(e^\alpha(t) - 1),$$

or,

$$J(t) = \Delta(t).\overline{\Delta}(t),$$

where

[11] For some readers not familiar with the theory of semisimple Lie algebras even Weyl's elaborated treatment of the unitary case in [34] may seem somewhat sketchy. For those we may recommend Weyl's exposition in [36], Chap VII, which, to our knowledge, is the most detailed one given by himself.

[12] This is, strictly speaking, the complexified tangent space.

$$\Delta = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})^{13}$$

is the "Weyl-denominator".
Integration over a class function $f : G \to \mathbb{C}$ gives now

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{|W|}\int_T f(t)\Delta(t)\overline{\Delta(t)}dt.^{14}$$

In view of this formula and Schur's orthogonality relations, the determination of the set of (potential) irreducible characters turns out to be an elementary combinatorial task. By definition, any such character (when restricted to T) is a finite W-invariant Fourier series

$$\chi \in \mathbb{Z}[P]^W \subset C^0(T, \mathbb{C})^W.$$

To find an orthonormal system of such functions with respect to the hermitian product

$$(f, h) = \int_G f(g)\overline{h(g)}dg$$

is the same as to find an orthonormal system in $\mathbb{Z}[P]^W$ with respect to

$$(f, h)_\Delta := \frac{1}{|W|}\int_T f(t)\Delta(t)\overline{h(t)\Delta(t)}dt.$$

However, multiplication by Δ induces a $\mathbb{Z}$-linear isomorphism between $\mathbb{Z}[P]^W$ and $\mathbb{Z}[P]^{W,-}$, the W-anti-invariant Fourier series (for the derivation in the general case, cf. [34], IV, §3), and an orthonormal basis with respect to the "usual" product $(f, h) \longmapsto \frac{1}{|W|}\int_T f(t)\overline{h(t)}dt$ on $\mathbb{Z}[P]^{W,-}$ is given by the elementary anti-invariant sums

$$A(\mu) = \sum_{w\in W} \det(w)\, e^{w(\mu)},$$

μ running through the interior P^{++} of a fundamental domain for W on P. Thus, a potential set of irreducible characters is given by the set of

$$\chi_\lambda = \frac{A(\lambda+\rho)}{\Delta}, \quad \text{where}$$

λ runs through P^+ and $\Delta = A(\rho)$ is the "smallest" anti-invariant ("Weyl-denominator identity").

It remains to be shown that the χ_λ describe actual characters. For that, Weyl has to refer to Cartan [7], where for any $\lambda \in P^+$ an irreducible representation with highest weight λ (corresponding to the "leading term" e^λ in χ_λ) is constructed. The coincidence of the characters is then quickly deduced.

---

13 Note that Δ is still an element of $\mathbb{Z}[P]$ (cf. Weyl [34], IV, §3).

14 The factor $1/|W|$ is nowadays interpreted in terms of the mapping degree of κ. Weyl's treatment of it remains formal.

As a final result, by specializing the character formula, Weyl obtains a formula for the dimension of the module corresponding to λ

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+} (\lambda+\rho,\alpha)}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+} (\rho,\alpha)} ,$$

where (,) denotes a W-invariant scalar product on P.

In contrast to the elegance of his basic arguments, Weyl was not pleased about his dependence on Cartan's explicit constructions.Thus, already in a footnote to [33] he envisages a uniform construction of all irreducible representations by establishing a "completeness relation" for the characters. In [34], IV, §4, he elaborates on that. However, the definite breakthrough had to wait until his joint work with F. Peter ([35]) on the decomposition of the regular representation of G, another cornerstone in the development of the representation theory of Lie groups.

References

[1] *J.F. Adams:* Lectures on Lie Groups, Benjamin, New York, Amsterdam, 1969.

[2] *A. Borel:* Hermann Weyl and Lie Groups, pp. 53–82 in Hermann Weyl, 1885–1985, Centenary lectures at the ETH Zürich, Ed. K. Chandrasekharan, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1986.

[3] *N. Bourbaki:* Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV–VI, Hermann, Paris, 1968.

[4] *N. Bourbaki:* Groupes et algèbres de Lie, Chap VII, VIII, Masson, Paris, 1982.

[5] *Th. Bröcker, T. tom Dieck:* Representations of compact Lie Groups, GTM 98, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985.

[6] *E. Cartan:* Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Paris, 1894, Oeuvres Complètes I_1, 137–253, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

[7] *E. Cartan:* Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane,Bull. Soc. math. **41** (1913), 53–96, Oeuvres Complètes I_1, 355–398, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

[8] *E. Cartan:* Les groupes réels simples finis et continus, Ann. Ec. Norm **31** (1914), 263–355, Oeuvres Complètes I_1, 399–491, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

[9] *E. Cartan:* Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl, J. Math. pures et appliquées **2** (1923), 167–192,Oeuvres Complètes III_1, 633–648, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

[10] *T. Hawkins:* The origins of the theory of group characters, Archive Hist. Exact Sci. **7** (1971), 142–170

[11] *T. Hawkins:* New light on Frobenius' creation of the theory of group characters, Archive Hist. Exact Sci. **12** (1974), 217–243.

[12] *T. Hawkins:* Cayley's counting problem and the representation of Lie Algebras, Proc. ICM, Berkeley, 1986, Vol. **2** (1987), Springer Verlag.

[13] *T. Hawkins:* From general relativity to group representations: The background to Weyl's papers of 1925–26, in: Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e Siècle. Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné. Societé Mathématique de France, Séminaires et Congrès, No. **3**, 1998, pp. 69–100.

[14] *D. Hilbert:* Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen **36** (1890), 473–534.

[15] *A. Hurwitz:* Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und der Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe, Math. Annalen **18** (1881), 528–592; Mathematische Werke, Bd. I, 1–66 Birkhäuser Verlag, Basel, 1963.

[16] *A. Hurwitz:* Zur Invariantentheorie, Math. Annalen, **45** (1894), 381–404; Mathematische Werke, Bd. II, 508–532 Birkhäuser Verlag, Basel, 1963.

[17] *A. Hurwitz:* Über die Erzeugung von Invarianten durch Integration, Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1897, 71–90; Mathematische Werke, Bd. II, 546–564 Birkhäuser Verlag, Basel, 1963.

[18] *W. Killing:* Die Zusammensetzung der stetigen endlichenTransformationsgruppen I, II, III, IV, Math. Annalen **31** (1888), 252–290, **33** (1889), 1–48, **34** (1889), 57–122, **36**(1890), 161–189.

[19] *I. Schur:* Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Dissertation, Berlin, 1901, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, 1–72 Springer Verlag, 1973.

[20] *I. Schur:* Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, 143–169 Springer Verlag, 1973.

[21] *I. Schur:* Antrittsrede des Herrn Schur, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Berlin, 1922, Gesammelte Abhandlungen, Bd. **2**,413–414, Springer Verlag, 1973.

[22] *I. Schur:* Neue Anwendung der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, I–III, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1924, 189–208, 297–321, 346–355, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, 440–494, Springer Verlag, 1973.

[23] *J.-P. Serre:* Algèbres de Lie semisimples complexes, Benjamin, New York, 1965.

[24] *E. Study:* Methode zur Theorie der ternären Formen, Teubner, Leipzig, 1889.

[25] *E. Study:* Über die Invarianten der projektiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Diskriminante, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse **49** (1897), S. 443–461.

[26] *E. Study:* Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen, Braunschweig, 1923.

[27] *H. Weyl:* Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner-Verlag, Leipzig, 1913.

[28] *H. Weyl:* Raum, Zeit, Materie, Springer-Verlag, Berlin, 1918.

[29] *H. Weyl:* B. Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrundeliegen, Nachdruck mit Kommentaren von H. Weyl, Springer-Verlag, Berlin, 1919

[30] *H. Weyl:* Mathematische Analyse des Raumproblems, Springer-Verlag, Berlin, 1923

[31] *H. Weyl:* Über die Symmetrie der Tensoren und die Tragweite der symbolischenMethode in der Invariantentheorie, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **48** (1924), 29–36, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2, 468–475.

[32] *H. Weyl:* Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.–Phys. Klasse, 1924, 218–224, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2, 461–467.

[33] *H. Weyl:* Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur), Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1924, 338–345, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2, 453–460.

[34] *H. Weyl:* Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I–III u. Nachtrag, Math. Zeitschrift **23** (1925), 271–301, **24** (1926), 328–376, **24** (1926), 377–395, **24** (1926), 789–791, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2, 544–647.

[35] *H. Weyl:* Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe (gem. mit F. Peter), Math. Annalen **97** (1927), 737–755, Gesammelte Abhandlungen Bd. 3,58–75.

[36] *H. Weyl:* The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1939 (1st ed.), 1946 (2nd ed.).

[37] *H. Weyl:* Relativity theory as a stimulus in mathematical research, Proc. Am. Phil. Soc. **93** (1949), 535–541, Gesammelte Abhandlungen Bd.4, 394–400.

Peter Slodowy
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
D–20146 Hamburg, Germany
email: slodowy@math.uni-hamburg.de

(*Eingegangen 30.9.1998*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig
101 (1999) 116–134
Mathematics Subject Classification: 01 A 55, 01 A 60, 11-03, 11 R xx, 11 R 58, 13 F 05, 14-03, 14 H 05
Keywords and Phrases: algebraic number fields, algebraic function fields, Dedekind domains, R. Dedekind, K. Hensel, D. Hilbert, E. Noether, L. Kronecker, H. Weber, K. Weierstraß

Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der „Dedekind-Ringe“

P. Ullrich, Münster

Algebraische Erweiterungen des Körpers der rationalen *Zahlen* und algebraische Erweiterungen des Körpers der rationalen *Funktionen* in einer Unbestimmten weisen subtile Ähnlichkeiten auf. Diese Analogie zwischen algebraischen Zahl- und algebraischen Funktionenkörpern hat die Entwicklung von großen Teilen der modernen „abstrakten“ Mathematik, speziell der algebraischen Geometrie, entscheidend beeinflußt und teilweise sogar erst motiviert, vergleiche etwa den Artikel [37] von Serge Lang (*1927).

Der folgende Text soll ein wenig genauer ausleuchten, wie diese Analogien zunächst auftraten, insbesondere bei Leopold Kronecker (1823–1891) und Karl Weierstraß (1815–1897), bei Richard Dedekind (1831–1916) und Heinrich Weber (1842–1913), welche Bedeutung sie für diese Mathematiker hatten, wie sie von deren Zeitgenossen und Nachfolgern rezipiert und zuletzt in der Sprache der abstrakten Algebra formalisiert wurden. Um hierbei sowohl mathematisch als auch historisch auf der sicheren Seite zu sein, sei stets vorausgesetzt, daß die Körpererweiterungen nicht nur algebraisch, sondern sogar endlich sind und daß im Funktionenkörper-Fall der Grundkörper gleich dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist (und der Fall *einer* Unbestimmten vorliegt).

Das Augenmerk gilt dabei speziell der Arithmetik in den jeweiligen Ganzheitsringen, insbesondere der Idealtheorie: Die „ganzen“ Elemente eines Zahl- oder Funktionenkörpers – diejenigen, die eine polynomiale Gleichung mit Leitkoeffizient 1 über den ganzen Zahlen bzw. den Polynomen in der Unbestimmten erfüllen – bilden einen Ring. In Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Elementaren Zahlentheorie läßt sich jedes Ideal in solch einem Ganzheitsring als (eindeutig bestimmtes) Produkt von Primidealen schreiben.

Für den Zahlkörper-Fall hatte Ernst Eduard Kummer (1810–1893) diesen Satz bereits 1846 in der Sprache seiner „idealen Zahlen“ gezeigt [34], [35] (zur Datierung siehe auch [36, Bd. 1, S. 4, Fußnote 2]). Einen analytischen Beweis für den Funktionenkörper-Fall gab Weierstraß seit dem Sommer 1869 in seinen Vorlesungen über die „Theorie der Abelschen Functionen“, vgl. [56, Kap. 19]. Formulierung und Beweis in der Sprache der Ideale finden sich 1879 bei Dedekind für Zahlkörper [6, § 173]; dieser übertrug auch 1880 gemeinsam mit Weber die Beweismethode auf

Funktionenkörper [10, § 9]. Die Axiomatisierung zum Konzept des „Dedekind-Ringes", die die Essenz der Beweise herausdestilliert, erfolgte jedoch erst fast ein halbes Jahrhundert später in einem 1927 veröffentlichten Artikel von Emmy Noether (1882–1935) [45].

1 Zahl- und Funktionenkörper

Das Ende der zu erzählenden Geschichte ist damit recht genau festgelegt; der Anfang verliert sich jedoch im Dunkel: So findet sich Anfang des 19. Jahrhunderts bei Niels Henrik Abel (1802–1829) und Évariste Galois (1811–1832) selbst vom Körperbegriff nur eine vage Vorstellung. Ab der Jahrhundertmitte spricht Kronecker schon deutlicher von „Rationalitäts-Bereichen", welche, in moderner Terminologie, sowohl Zahl- als auch Funktionenkörper sein können (etwa [32, § 1]). Der Terminus „Körper" findet sich 1871 bei Dedekind, und zwar im X. Supplement zu den „Vorlesungen über Zahlentheorie" von Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), hier allerdings ausschließlich für Unterkörper von $\mathbb{C}$ [5, S. 224], und 1880, in der gemeinsamen Arbeit mit Weber, übertragen auf die Situation algebraischer Funktionen [10, S. 182 bzw. 239].

Was diejenigen Analogien zwischen Zahl- und Funktionenkörpern betrifft, die über die bloße Definition eines „Körpers" hinausgehen, so ist es natürlich reizvoll – aber leider auch recht müßig – zu spekulieren, womit Galois sich in der letzten Zeit seines Lebens beschäftigt hatte, vielleicht mit etwas, was wir heute als „Riemannsche Flächen" kennen und auf das er seine neuentwickelte Galois-Theorie anwendete? In jenem berühmten Brief vom Abend vor dem Duell äußert er sich ja nur sehr knapp darüber und spricht von der „théorie de l'ambiguïté", also der „Theorie der Unbestimmtheit" [14, S. 32, auch S. VIII–IX]. – Jedenfalls hatte er sich 1830 mit der Übertragung der von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) entwickelten Theorie der Potenzreste von den ganzen Zahlen auf Polynome über einem endlichen Körper befaßt [13], wie übrigens sechsundzwanzig Jahre später auch Dedekind [3]. –

Im Jahre 1850 veröffentlichte dann Victor Puiseux (1820–1883) seinen Artikel [47], in dem er algebraische Funktionen an Verzweigungsstellen in Potenzreihen mit gebrochenen Exponenten entwickelte und sich dementsprechend mit der Monodromiegruppe der Funktion bzw., in anderer Sichtweise, mit der Galois-Gruppe des zugehörigen Funktionenkörpers auseinandersetzen mußte. Der Name „Galois" tritt in dieser, immerhin über einhundert Seiten langen, Arbeit jedoch nicht auf, obwohl Galois' entscheidende Arbeiten 1846 endlich in Joseph Liouvilles (1809–1882) „Journal de mathématiques pures et appliquées" veröffentlicht worden waren, vgl. [14, insb. S. 33]. Den expliziten Bezug zwischen Galois-Theorie und algebraischen Funktionen stellte erst Charles Hermite (1822–1901) ein Jahr später in einer Comptes-Rendus-Note [20] her, in der er bewies, daß die von den Verzweigungsstellen der algebraischen Funktion herkommenden lokalen Monodromien genau die rationalen Funktionen in der Unbestimmten unverändert lassen, also die Galois-Gruppe des Funktionenkörpers erzeugen [20, Théoréme I, II].

Mit diesen knappen Bemerkungen zur Galois-Theorie im Zahl- und Funktionenkörper-Fall soll es hier sein Bewenden haben, nicht nur, um sich genauer der

Idealtheorie der Ganzheitsringe zuzuwenden, sondern auch, weil bezüglich der Galois-Theorie nach 1850 guten Gewissens auf die umfassende Darstellung [41] verwiesen werden kann.

2 Leopold Kronecker

Der erste, der beim Rechnen in Ganzheitsringen auf die Parallelität zwischen Zahlkörpern und Funktionenkörpern öffentlich hingewiesen und sie auch mathematisch ausgenutzt hat, scheint Kronecker gewesen zu sein, und zwar in einem Vortrag „Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen" am 16. Januar 1862 vor der Berliner Akademie. Publiziert wurde der Text allerdings erst neunzehn Jahre später im „Journal für die reine und angewandte Mathematik" [31]. Kronecker hat zu dieser Veröffentlichung im August 1881 eine „Vorbemerkung" [31, S. 301–305 bzw. 195–200] geschrieben, der man Einzelheiten der Entstehungsgeschichte entnehmen kann (siehe auch [10, S. 182 bzw. 239, Fußnote] und [1, S. 370]):

Die Geschichte beginnt eigentlich schon im Jahre 1857, in dem Kronecker sich, modern gesprochen, mit der Existenz von Ganzheitsbasen in Zahlkörpern beschäftigte – also von Basen des Rings der ganzen Elemente des Zahlkörpers über den ganzen Zahlen –, und gerade erkannt hatte, daß es hierbei im allgemeinen nicht möglich ist, als Basiselemente nur Potenzen eines festen Elementes zu wählen, sondern daß man für die Basis beliebige Elemente des Rings zulassen muß [31, S. 302–303 bzw. 196–197]. Im Jahr zuvor war Karl Weierstraß, ausgewiesener Funktionentheoretiker seines Zeichens, nach Berlin berufen worden, und die beiden standen, nach Kroneckers Worten, „in regem persönlichen Verkehr" [31, S. 303 bzw. 197]. Weierstraß kämpfte zu jener Zeit um die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems für beliebige Abelsche Integrale, und zwar gegen Bernhard Riemann (1826–1866) (vgl. etwa auch [40, S. 229–231]): Im Sommer 1857 reichte Weierstraß bei der Berliner Akademie eine Arbeit über dieses Thema ein; bevor diese aber gedruckt wurde, stellte sich heraus, daß im „Journal für die reine und angewandte Mathematik" Riemanns „Theorie der *Abel'* schen Functionen" [48] erscheinen würde, woraufhin Weierstraß seine Arbeit zurückzog, auch weil ihm für seinen Zugang noch einige Aussagen über algebraische Funktionen fehlten (vgl. [56, S. 9–10]).

Als Kronecker nun Weierstraß über seine Untersuchungen zu Ganzheitsbasen in Zahlkörpern berichtete [31, S. 303 bzw. 197],

> „da forderte er [= Weierstraß] mich [= Kronecker] auf, dieselben Principien auf algebraische Functionen einer Variablen anzuwenden, um womöglich auch dabei die analogen umständlichen Betrachtungen entbehrlich zu machen, welche bei der Behandlung der Integrale algebraischer Functionen ... zunächst erforderlich erscheinen."

Kronecker tat dies: Er übertrug seine für Zahlkörper gefundene Methode zur Konstruktion von Ganzheitsbasen auf den Fall eines Funktionenkörpers, betrachtete für Elemente dieses Körpers deren Diskriminante und zerlegte sie, analog zur Zahlkörper-Situation, in einen „wesentlichen Factor" – der hier von den Verzweigungspunkten herkommt – und einen „ausserwesentlichen Factor" – der von den mehrfachen Punkten herkommt –. Weiterhin zeigte er, daß man nach einer geeigneten rationalen Transformation annehmen kann, daß im Endlichen nur gewöhnliche Doppelpunkte liegen [31, § 3], vgl. auch [1, S. 373–375]. Damit besaß Kronecker einen algebraischen Beweis derjenigen Aussagen über die Diskriminante, die Riemann im Paragraphen 6 seiner „Theorie der *Abel'* schen Functionen" [48] aus den analytischen Reihenentwicklungen hergeleitet hatte (wobei letzterer einen Beweis nur für gewöhnliche Doppelpunkte gegeben hatte, weil er davon ausging, die anderen als „Grenzfälle" dieses Falls behandeln zu können [48, S. 126–127 bzw. 144–145], was aber nicht einmal dem Riemann-Verehrer Felix Klein (1849–1925) als Begründung hinreichte, vgl. [29, S. 150–151]).

Kronecker übergab Weierstraß im Oktober 1858 eine Ausarbeitung seiner Ergebnisse [31, S. 303 bzw. 197], informierte auch Riemann [31, S. 305 bzw. 199] und trug, wie erwähnt, 1862 vor der Berliner Akademie über dieses Thema vor. Das Manuskript wurde jedoch in jenem Jahr nicht veröffentlicht, da Kronecker mit anderen Arbeiten befaßt war. Später machten dann, nach Kroneckers eigenen Worten [31, S. 303 bzw. 197–198],

> „die weiteren Ergebnisse ... [der] *Weierstrass*schen analytischen Untersuchungen ... meine bezüglichen algebraischen in meinen Augen überflüssig ... und [ließen] mich ... von der Publication abstehen .... Herr *Weierstrass* gelangte nämlich zu einer wirklichen Darstellung der von ihm so genannten Primfunctionen – welche den *Kummer*-schen idealen Primfactoren entsprechen – in transcendenter Form, und damit wurde das eigentliche Fundament der Theorie der algebraischen Functionen bloss gelegt und jede auf algebraische Mittel beschränkte Behandlung überholt."

Seinen an der Zahlkörper-Situation orientierten Zugang zu den algebraischen Funktionen hielt Kronecker jedoch nicht verborgen, sondern behandelte ihn in seinen Vorlesungen seit 1865 [31, S. 301–302 bzw. 195–196]. In wie weit dies zur Verbreitung dieses Ansatzes beitrug, soll jedoch dahingestellt bleiben: Zum einen besaß er die Eigenheit, seinen Hörsaal schnell bis auf einen „Kreis der Eingeweihten" [30, S. 213] zu leeren. Zum anderen bestehen Diskrepanzen zwischen der Erinnerung auch dieser „Eingeweihten" und der von Kronecker. So nennt er Zeugen für das Vortragen seiner Resultate [31, S. 301 bzw. 195–196]:

> „Unter meinen Zuhörern von 1865/66 befanden sich die Herren *Brill, Kiepert, Lüroth, Schwarz, ...*".

Georg Cantor (1845–1918) berichtete jedoch am 16. Feburar 1882 brieflich an Dedekind (zitiert nach [12, S. 252]):

> „[Ich] erfuhr ..., dass Lüroth und Brill, welche Kr[onecker] in seiner letzten Abhandlung über die „Discriminanten" [= [31]] in der Einleitung nannte, erklären, diesen Gegenstand in der Untersuchung und Ausführung wie Kr[onecker] behauptet *nicht* bei ihm gehört zu haben."

(Bezeichnenderweise schreibt Alexander (von) Brill (1842–1935) in seinem 1893 gemeinsam mit Max Noether (1844–1921) für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung verfaßten „Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit", Kronecker habe seinen Zugang „seit 1870/71[!] in Vorlesungen mitgeteilt" [1, S. 370].)

3 Karl Weierstraß

Kronecker hatte seine Resultate aus dem Jahre 1858 sowohl Riemann als auch Weierstraß zur Verfügung gestellt, wobei letzterer davon „bei seinen analytischen Untersuchungen Gebrauch machen konnte" [31, S. 303 bzw. 197]. Diese schritten aber in der schon erwähnten Weise so weit voran, daß Weierstraß sich vom algebraischen Zugang frei machen und mit analytischen Methoden zeigen konnte, daß sich jede rationale Funktion $R(x,y)$ auf dem durch die algebraische Gleichung $f(x,y)=0$ gegebenen „algebraischen Gebilde" – also jedes Element des zu $f(x,y)=0$ gehörenden Funktionenkörpers – als endliches Produkt von (mehrdeutigen) „Primfunctionen" $E(x,y;x_\nu,y_\nu,x'_\nu,y'_\nu)$ schreiben läßt, d.h., von Funktionen, die nur an der einen Stelle (x_ν,y_ν) Null und an der einen Stelle (x'_ν,y'_ν) Unendlich werden und zwar jeweils von erster Ordnung [56, S. 390]:

$$R(x,y)=R(a_0,b_0)E(x,y)\prod_{\nu=1}^{r}E(x,y;x_\nu,y_\nu,x'_\nu,y'_\nu)$$

mit (a_0,b_0) fest vorgegeben, $E(x,y)$ ohne Null- und Unendlichkeitsstelle und (x_ν,y_ν) die Null- und (x'_ν,y'_ν) die Unendlichkeitsstellen von $R(x,y)$. An dieser Stelle sollen nicht die genaue Gestalt der „Primfunctionen" und der Beweis des Resultats interessieren, ebensowenig, daß Weierstraß mittels dieser Primfaktorisierung das Abelsche Theorem beweisen und das Jacobische Umkehrproblem für beliebige Abelsche Funktionen analog lösen konnte wie Jahre zuvor das für hyperelliptische Integrale. (Dazu konsultiere man etwa seine „Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten" [56, Kap. 19 und 22] bzw. als Sekundärquellen [1, S. 429] und [28, S. 531–533].)

Beachtenswert ist jedoch, wie er selbst sein Resultat kommentierte, etwa in der 1902 publizierten Werksausgabe dieser Vorlesungen, deren Text auf die Jahre 1875/76 zurückgeht [56, S. V]. Hier heißt es im Anschluß an das obige Resultat [56, S. 391–393]:

> „Diese Sätze bieten eine bemerkenswerthe Analogie mit solchen aus der Zahlentheorie dar. Zunächst gilt im Gebiete der reellen ganzen Zahlen der Satz, dass jede Zahl entweder selbst nicht in Factoren zerlegbar ist oder aus solchen unzerlegbaren Zahlen durch Multiplication gebildet werden kann. ...
>
> Es wurde nun versucht, diese Zerlegung auf die verallgemeinerten complexen ganzen Zahlen, die ganzen algebraischen Zahlen, auszudehnen. ... Die ganze algebraische Zahl $\varphi(\alpha)$ wird eine Primzahl genannt, wenn sie sich nicht als Product zweier Zahlen derselben Art darstellen lässt, von denen keine eine Einheit ist. Es fand sich aber, dass das Product zweier so definirten Primzahlen noch durch andere dem betrachteten Gebiete angehörige Zahlen, als diese selbst, theilbar sein kann. ...
>
> Diesen Übelstand beseitigte K u m m e r durch Einführung der sogenannten i d e a l e n P r i m f a c t o r e n. ...
>
> In der Functionentheorie versteht man unter Primfunctionen solche, die an je einer Stelle von der ersten Ordnung unendlich gross werden und verschwinden. Wenn der Rang [= das Geschlecht] des algebraischen Gebildes gleich Null ist, so lässt sich jede rationale Function des Paares (xy) mittels Multiplication aus Primfunctionen bilden, die ebenfalls in (xy) rational sind. Ist aber der Rang größer als Null, so giebt es im Gebiete [= Körper] der rationalen Functionen des Paares (xy) keine Primfunctio-

nen; man muss unter den transcendenten Functionen solche aufsuchen, welche nur an einer Stelle unendlich gross werden und an einer Stelle verschwinden und sich den rationalen Functionen möglichst eng anschliessen. Dies sind die Functionen $E(xy; x_\nu y_\nu, x'_\nu y'_\nu)$, als deren Product, wie gezeigt worden ist, sich jede rationale Function des Paares (xy) darstellen lässt, wenn man noch eine Function $E(xy)$, die nicht verschwindet und nicht unendlich gross wird, als Factor hinzunimmt.

Die Functionen $E(xy)$ sind mit den Einheiten in der Theorie der complexen Zahlen zu vergleichen. Denn nach der obigen Definition ist eine ganze algebraische Zahl eine Einheit, wenn ihr reciprocer Werth ebenfalls ganz ist. Ebenso ist die Function $\frac{1}{E(xy)}$ von derselben Beschaffenheit, wie $E(xy)$ selbst, da $E(xy)$ an keiner Stelle Null oder unendlich gross wird.

Es hat sich nun im vorigen Kapitel ... ergeben, dass jede Function $E(xy)$ aus 2ρ speciellen Functionen

$$E(xy)_\beta \quad \text{und} \quad E'(xy)_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \dots \rho)$$

durch Multiplication erhalten werden kann, sodass stets

$$E(xy) = \prod_{\beta=1}^{\rho} \{[E(xy)_\beta]^{\mu_\beta} [E'(xy)_\beta]^{\mu'_\beta}\}$$

ist. Entsprechend giebt es in der Theorie der algebraischen Zahlen $\varphi(\alpha)$ eine geschlossene Anzahl Einheiten $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$,... $E_r(\alpha)$, aus denen sich alle übrigen in der Form

$$E_1^{\mu_1}(\alpha), E_2^{\mu_2}(\alpha), \dots E_r^{\mu_r}(\alpha)$$

zusammensetzen lassen, wobei die Exponenten $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_r$ ganze positive Zahlen oder Null sind.

Sowohl für die idealen Primfactoren, wie für die Einheiten in der Theorie der algebraischen Zahlen findet sich also bei den rationalen Functionen des durch eine algebraische Gleichung verbundenen Paares (xy) ein Analogon."

Bedeutsam für die Verbreitung der Einsicht in die Analogie zwischen algebraischen Zahlen und algebraischen Funktionen durch Weierstraß war zum einen, daß er wesentlich mehr Hörer als etwa Kronecker hatte – Adolf Kneser (1862–1930) erwähnt „[z]weihundert Jünglinge" [30, S. 211] in Weierstraß' Vorlesung, während er in bezug auf Kronecker vom schon erwähnten „Kreis der Eingeweihten" spricht –. Zum anderen wies Weierstraß aber auch nicht nur bei dieser einen Vorlesung 1875/76, sondern immer wieder auf die Parallelität hin:

In einer Ausarbeitung der Vorlesung aus dem Wintersemester 1881/82 über die „Theorie der Abel'schen Functionen" [55], die A. Ramsay auf der Basis von (wohl teilweise wörtlichen) Mitschriften anderer anfertigte (vgl. [55, S. 59]), findet sich der folgende Passus im Anschluß an die Darstellung der Einheiten [55, S. 205–208]:*

„Dabei offenbart sich nun eine sehr grosse Analogie mit der Zahlentheorie.

In dieser Theorie zeigte sich, sobald auch complexe Zahlen mitgenommen wurden, dass es noch nothwendig war andere Grössen einzuführen als Einheiten als die, die ra-

* Mein Dank gilt dem Institut Mittag-Leffler, Djursholm, für die während eines Aufenthalts im Oktober 1996 gewährte Gastfreundschaft und für die Publikationsgenehmigung für die Quelle [55].

tional aus i gebildet waren. Es zeigte sich dass man Einheiten α in der Zahlentheorie hinein ziehen müßte, Einheiten, die die λ^{te} Wurzeln der Einheit waren oder rational aus solchen sich zusammensetzen liess[en] und deren Norm gleich eins war; dies wurde von Kummer gemacht. Und gerade diese Einheiten sind mit den oben mit E bezeichneten Functionen zu vergleichen. – Es zeigte sich sofort, dass ... nur eine geschlossene Anzahl solche Einheiten existiert.

Eine ganze Zahl von den α wurde eine Zahlgrösse der Form $k_1\alpha_1 + \ldots$ genannt, deren Norm eine ganze Zahl ist, und Primzahl eine solche Grösse, deren Norm eine nicht zerlegbare Zahl ist. Aber jetzt zeigte sich durch die Untersuchungen von Kummer, dass solche Definitionen sich nicht aufrecht erhalten lassen, in dem die für gewöhnliche Zahlen geltenden Sätze über die Eindeutigkeit der Zerlegung in Factoren und dergleiche nicht jetzt übertragen werden können. Dadurch wurde man zur Aufstellung des Begriffes der idealen Primzahl geführt. Das charakteristische für die idealen Zahlen ist, dass sie nicht mehr rational in den αs ausgedrückt werden können sondern in α und einer noch zu adjungierenden Grösse w, die algebraisch mit α zusammenhängt. Kurz, man sah sich gezwungen das Gebiet der Zahlen zu erweitern, aber nicht beliebig, sondern der Art, dass man einen algebraischen Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neu eingeführten Zahlen erhält. – In diesem erweiterten Gebiete konnten nun sämmtliche Sätze der elementaren Zahlentheorie bewiesen werden. – In ähnlicher Weise verfahren wir hier in der Theorie der zweiwerthigen Functionen: wir erweitern das Gebiet, doch mit Beibehaltung der selben Classe [= des selben Definitionsbereichs], wie vorher. Es wird sich dann zeigen, dass wir in diesem Gebiete zweiwerthige Ausdrücke aufstellen können, die nur eine Unstetigkeitsstelle haben und nur eine Nullstelle erster Ordnung oder auch gar keine haben, und die so gewonnenen Functionen haben genau dieselben Eigenschaften, wie die Primfunctionen in der Theorie der eindeutigen Functionen; es lässt sich ferner zeigen, dass jede derselben Classe angehörige zweiwerthige Function sich aus solchen Primfunctionen in der Form einer Productes oder eines Quotienten zweier solchen zusammensetzen lässt."

Zusätzlich sei noch darauf hingewiesen, daß Weierstraß auch seinen 1874 gefundenen Produktsatz für eindeutige analytische (= holomorphe) Funktionen stets als Faktorisierungssatz formulierte und die auftretenden Faktoren als „Primfunctionen" bezeichnete [54, S. 91–92], [58, S. 148–150].

4 Richard Dedekind und Heinrich Weber

Die Erkenntnis der Analogie der Arithmetik in Zahl- und in Funktionenkörpern war jedoch keineswegs ein Monopol der Berliner Mathematiker:

So gab Dedekind insgesamt vier Auflagen von Dirichlets „Vorlesungen über Zahlentheorie" heraus und machte dabei, „Zusätze von nicht unbedeutender Ausdehnung", wie er selbst es in der für ihn typischen Bescheidenheit formulierte [9, Bd. 3, S. 392]. Von besonderer Bedeutung für den hier interessierenden Fragenkreis ist das XI. Supplement „Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen", das in der dritten und vierten Auflage von 1879 [6] bzw. 1894 [8] explizit erschien und eine Vorläuferversion im X. Supplement der zweiten Auflage von 1871 [5] besitzt. Dedekind entwickelte darin die Idealtheorie für algebraische Zahlkörper, insbesondere führte er die Begriffe „Ideal", „Modul" und, wie bereits erwähnt, „Körper" ein. Im Vorwort der dritten Auflage von 1879 merkte er zu dem nun eigenständigen XI. Supplement an, daß [9, Bd. 3, S. 424]

> „eine von meinem Freunde H. Weber in Königsberg in Gemeinschaft mit mir ausgeführte Untersuchung, welche demnächst erscheinen wird, das Resultat ergeben hat, daß dieselben Prinzipien sich mit Erfolg auf die Theorie der algebraischen Funktionen übertragen lassen."

Schon in seinem Artikel [3] aus dem Jahre 1857 über die Theorie der Potenzreste in Polynomringen über endlichen Körpern hatte Dedekind davon gesprochen, daß sich die Analogie zwischen Zahlen und Funktionen „bisher in allen Principien und Beweisen bewährt hat" [3, 17.]. Heinrich Weber hatte er bei der gemeinsamen Herausgabe von Riemanns gesammelten Werken in den Jahren 1874 bis 1876 kennengelernt; Weber war bei diesem Unternehmen, vereinfacht gesagt, der Spezialist für Funktionentheorie und insbesondere für mathematische Physik gewesen. Von Januar 1879 bis Sommer 1880 arbeiteten die beiden per Briefwechsel zusammen an einer Arbeit, die zumindest zu Anfang ein eher bescheidenes Ziel hatte. Weber schrieb dazu am 5. März 1879 (zitiert nach [49, S. 232]):

> „Ob die ganze Sache zu etwas Neuem führen wird, müssen wir abwarten. Was wir bis jetzt haben ist im Grunde nicht neu. Immerhin ist es eine sehr elegante und hübsche Ausdrucksweise für bekannte Sätze und genügt insofern einem ästhetischen Bedürfnis. Was ich zunächst davon hoffe ist übrigens eine strenge oder wenigstens allgemeinere Begründung der Riemannschen Theorie."

Was in Wirklichkeit letztlich unter dem Titel „Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen" [10] herauskam, war jedoch nicht mehr und nicht weniger als die abstrakte Theorie algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten über $\mathbb{C}$ unter Verwendung der Dedekindschen Idealtheorie. Diese Arbeit ist – zu Recht – bereits mehrfach gewürdigt worden, siehe etwa [15], [49], auch [41, Abschn. 3.4]; im folgenden wird nur ein kleiner Ausschnitt betrachtet:

In der Arbeit findet sich die abstrakte Definition eines „Punktes" (einer Riemannschen Fläche) als, in moderner Terminologie, $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus von dem Funktionenkörper nach $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit gewissen Vorbehalten beim Rechnen mit „∞" [10, § 14]. Dedekind und Weber zeigen sogleich, daß – bei fixiertem Polynomring $\mathbb{C}[z]$ in der Unbestimmten z im Funktionenkörper – die Punkte der Riemannschen Fläche bis auf endlich viele Ausnahmen genau den Primidealen des Ganzheitsrings, also des ganzen Abschlusses des Polynomrings im Funktionenkörper entsprechen. (Die endlich vielen hier nicht erfaßten Punkte entsprechen gerade den Primidealen des ganzen Abschlusses von $\mathbb{C}[1/z]$, die $1/z$ enthalten.) Angemerkt sei allerdings, daß das, was Dedekind und Weber hier „Primideal" nennen, als maximales Ideal definiert ist [10, § 8, 6.], genauso wie im Zahlkörper-Fall [6, § 171, 5.], [8, § 179], was aber bei den, später so genannten, „Dedekind-Ringen", um die es hier geht, nichts ausmacht, da alle (vom Nullideal verschiedenen) Primideale maximal sind.

Was die Übertragung von Resultaten von der Zahlkörper- auf die Funktionenkörper-Situation betrifft, so finden sich in dem Artikel [10], wie schon bei Kronecker, die Existenz von Ganzheitsbasen [10, § 3] und der Zusammenhang von Diskriminante und Verzweigung [10, § 16]. Außerdem wird gezeigt, daß sich jedes Ideal des Ganzheitsrings eines Funktionenkörpers als (eindeutiges) Produkt von Primidealen schreiben läßt [10, § 9], wobei dieser Beweis sogar einfacher ist als Dedekinds ursprünglicher für Zahlkörper [6, § 173], da im Funktionenkörper-Fall ein Ideal genau dann ein Primideal ist, wenn seine „Norm" – das charakteristische Polynom der Multiplikation mit der Unbestimmten z auf dem Quotienten des Ganzheitsrings nach dem betrachteten Ideal – linear in z ist [10, § 9, 7.]; in der Zahlentheorie, aus der diese Definition kopiert ist, kann hingegegen die Norm eines Primideals irgendeine Potenz einer Primzahl sein [7].

Dedekind und Weber hatten also nicht nur erkannt, daß Zahl- und Funktionenkörper Ähnlichkeiten aufweisen, sondern auch, daß es bei der Theorie der algebraischen Funktionen „eine nicht unerhebliche Vereinfachung" [10, S. 212 bzw. 268, Fußnote] geben kann im Vergleich zu der der algebraischen Zahlen.

Weber reichte die gemeinsame Arbeit [10] im Oktober 1880 bei dem damals von Kronecker federführend herausgegebenen „Journal für die reine und angewandte Mathematik" zur Veröffentlichung ein, worauf letzterer sich seines alten, 1862 nicht veröffentlichten Manuskriptes [31] erinnerte und es noch vor der Arbeit [10] abdrucken ließ. (Details zu dieser unerfreulichen Episode findet der interessierte Leser in [12, S. 251–254], [49, S. 230] oder auch [50, Sect. 1].)

5 Erste Reaktionen

Neben diesen Prioritätsquerelen hatten Dedekind und Kronecker allerdings auch verschiedene Sichtweisen bezüglich der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern:

Für Kronecker gab es sozusagen keine *Analogie* zwischen algebraischen Zahlkörpern und algebraischen Funktionenkörpern, sondern beide waren *Spezialfälle* seiner umfassenden Theorie der „algebraischen Formen", die er in seiner Festschrift zu Kummers fünfzigstem Doktorjubiläum [32] entwickelte, sozusagen in einem Ansatz die kommutative Algebra für die algebraische Zahlentheorie *und* die algebraische Geometrie.

In einem Brief vom 17. Februar 1882 an Cantor schrieb hingegen Dedekind über diese Arbeit (zitiert nach [12, S. 254]):

> „... das kann ich aber wohl sagen, dass mir Einiges sehr wohl gefällt, wie ich denn überhaupt vor dem feinsinnigen und durchdenkenden Mathematiker Kronecker die allergrösste Hochachtung habe. Seine Art würde mir, glaube ich, noch besser gefallen, wenn er die Theorie der *Zahlen* von d[er] der *Functionen* gänzlich getrennt hätte. Die Arbeit von Weber und mir verfolgt im Wesentlichen einen ganz anderen Zweck; eine Hauptsache für uns ist die Definition dessen, was man seit Riemann einen „Punct" nennt."

Obwohl der seinen Zeitgenossen sonst oft zu abstrakte Dedekind genau die Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern sah, war er also nicht an einer simultanen Behandlung interessiert, sondern wollte in dem Artikel [10] vielmehr durch Übertragung von Konzepten und Beweisen aus der Zahlkörper-Situation, wie er und Weber in der „Einleitung" schreiben, [10, S. 181 bzw. 238]

> „die Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, ... von einem einfachen und zugleich strengen und völlig allgemeinen Gesichtspunkt aus ... begründen."

Webers Einstellung dazu war ähnlich, zumindest in der kurzfristigen Perspektive; wie bereits zitiert, erhoffte er sich 1879 von der Arbeit „zunächst ... eine strenge oder wenigstens allgemeinere Begründung der Riemannschen Theorie" [49, S. 232]. 1893 allerdings, in seinem Nachruf auf Kronecker, nahm er schon Bezug auf eine Zahl- *und* Funktionenkörper umfassende Theorie [51, S. 16]:

> „Auch in der Theorie der algebraischen Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen herrschen analoge Gesetze wie in der Theorie der Zahlen, und eine allgemeine[!] Theorie der Teilbarkeit muss auch diese umfassen."

Und im zweiten Band seines einflußreichen „Lehrbuch[s] der Algebra", dessen erste beiden Auflagen 1896 und 1899 erschienen, formulierte er den Beweis der Primfaktorzerlegung [52, §§ 153–160] so, daß er neben der Aussage für Zahlkörper auch die für Funktionenkörper gleich miterhielt, worauf er zum Schluß seines Beweises auch explizit hinwies [52, S. 595]. (Weber gab in diesem Band übrigens eine Theorie der Zahlkörper, die den Dedekind(-Weber)schen und den Kroneckerschen Standpunkt verbindet. Die analoge Theorie für Funktionenkörper publizierte er allerdings erst 1908 im dritten Band [53] des „Lehrbuch[s]"; man vergleiche auch die Arbeiten [59], [60] seines Schülers Joseph Wellstein (1869–1919).)

Nach den Reaktionen der Entdecker, auch auf einander, sollen nun die der mathematischen „Umwelt" betrachtet werden, welche erstaunlich früh und breit einsetzten:

So beurteilte Felix Klein die „Entwicklungen ... der Algebristen und Arithmetiker" [29, S. 71] im Hinblick auf die Theorie der (kompakten) Riemannschen Flächen, i.e., der algebraischen Kurven, durchaus skeptisch [29, S. 72]:

> „Die genannten Autoren [= Weierstraß, Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), Dedekind, Weber und Hensel] ... sehen sich vor der doppelten Aufgabe, einmal die... algebraische Darstellung [der auf der Riemannschen Fläche vorhandenen algebraischen Funktionen und Integrale] zu leisten, andererseits von ihr ausgehend zu den Sätzen über die Existenz und die Zahl der Funktionen zu gelangen. Daher hat ihre Entwicklung, sofern sie sich nicht auf Riemannsche Flächen mit getrennten Verzweigungspunkten oder sonstige einfache Fälle beschränkt, etwas sehr Mühsames und Abstraktes."

Dennoch stellte er in seinen Vorlesungen über Riemannsche Flächen im Wintersemester 1891/92 nicht nur Ergebnisse von Kronecker, Dedekind und Weber über algebraische Funktionenkörper vor, sondern er schob auch einen „Exkurs über die Theorie der algebraischen ganzen Zahlen" ein [29, S. 89–93, vgl. auch S. 10], den er wie folgt begann:

> „Im übrigen ist hier die Stelle, wo wir begreiflich machen können, wieso DEDEKIND und WEBER bzw. KRONECKER die Theorie der Formen Γ (oder wie sie sagen, ganzen Funktionen G) in ihren Arbeiten fortgesetzt mit der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen parallelisieren. Ich gehe hierauf um so lieber kurz ein, als wir dadurch von der uns geläufigen Theorie der Γ aus einen ersten Einblick in letztere wichtige Theorie gewinnen."

In diesem Exkurs setzte er dann die analoge Behandlung des Problems der Primfaktorzerlegegung in der Situation der algebraischen Zahlen und in der der algebraischen Funktionen auseinander [29, S. 90–93].

Bereits im Winter 1891/92 hatte Klein also die Analogie von Zahl- und Funktionenkörpern zur Kenntnis genommen und benutzte sie sogar schon „in umgekehrter Richtung“: Kronecker bzw. Dedekind und Weber hatten nach Vorbildern aus der Zahlentheorie Fragestellungen über algebraische Funktionen behandelt; Klein hingegen ging von den Funktionen zu den Zahlen über, wohl um etwas mehr Anschauung in die Arithmetik zu bringen (vgl. dazu auch [59, S. 112]).

Im Vergleich hierzu mag zunächst irritieren, daß die für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in den neunziger Jahren des 19. Jahrhunderts verfaßten Berichte über Teilgebiete der Mathematik sich nur knapp zur Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern äußern: So besprechen Brill und Noether in ihrem 1894 erschienen Bericht über die „Theorie der algebraischen Functionen“ die Theorien von Kronecker bzw. Dedekind und Weber nicht einmal. In der „Vorrede“ wird jedoch darauf hingewiesen daß „Kronecker [sich] bereit erklärt [hatte], durch Vermittlung einer jüngeren ihm nahestenden Kraft bei dem Unternehmen mitzuwirken“ [1, S. I]. Da Kronecker aber bereits 1891 starb, entschlossen sich die Autoren [1, S. II],

> „die auf den Begriffsbildungen der neueren Zahlentheorie beruhenden Theorien von Kronecker und von Dedekind-Weber, sowie die anschliessenden Arbeiten unberücksichtigt zu lassen.“

Die Bezeichnung „arithmetisch“ für diese von der Zahlentheorie inspirierte Theorie der algebraischen Funktionen war jedoch bereits eingeführt [1, S. III].

Wirft man nun einen Blick auf den Bericht über die andere Seite, die Theorie der algebraischen Zahlen, so erinnert David Hilbert (1862–1943) im Vorwort seines „Zahlberichts“ [24] durchaus „an die zahlreichen und merkwürdigen Analogien, welche zwischen gewissen Tatsachen aus der Theorie der Zahlkörper und aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen bestehen“ [24, S. III bzw. 65], verwendet auch etwa den Begriff „Verzweigung“ ab § 41, aber hält es erst in § 130 für nötig, etwas zu dessen Motivation im Zusammenhang mit Riemannschen Flächen zu sagen.

Der Grund hierfür scheint allerdings eher der gewesen zu sein, daß Hilbert diese Analogie bereits zu sehr vertraut war, als daß er davon noch Aufhebens machen wollte: Bereits in seinen Arbeiten zur Invariantentheorie, etwa [21], [22] aus den Jahren 1890 bzw. 1893, nutzte er den arithmetischen Zugang zur Theorie der algebraischen Funktionen, und den Begriff „Verzweigung“ verwendete er seit 1894 [23, S. 228–229 bzw. 17]. Auch würdigte Hilbert in seinem 1897, dem gleichen Jahr wie der „Zahlbericht“, erschienenen Nachruf auf Weierstraß explizit dessen Ergebnisse über die Primfaktorisierung algebraischer Funktionen [25, S. 334–335] (und wies auch beim Internationalen Kongreß zu Paris im Jahre 1900 in seinem „12. Mathematischen Problem“ auf Entsprechungen zwischen funktionen- und zahlentheoretischen Problemstellungen hin [26, S. 312]).

Einen weiteren Beleg daür, daß bereits in den letzten Jahren des 19. Jahrhunderts die Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern durchaus wohlbekannt war, findet man bei Hilberts Alter ego Hermann Minkowski (1864–1909) in dessen „Geometrie der Zahlen“, die auf in den Jahren 1893 bis 1896 verfaßten Manuskripten basiert. Hierzu sei vorab erklärt, daß eine Primzahl als „kritisch“ für eine algebraische Zahl bezeichnet wird, wenn sie die Diskriminante des von der Zahl erzeugten Zahlkörpers teilt [39, S. 129], was, wie dank Dedekind seit 1871 bekannt war ([4, S. 404], auch [7]), dazu äquivalent ist, daß die Primzahl im entsprechenden Ganzheitsring vom Quadrat eines Primideals geteilt wird. Minkowski schreibt nun [39, S. 129–130]:

> „Die kritischen Primzahlen für eine irrationale algebraische Zahl spielen eine in gewissem Sinne ähnliche Rolle wie die Verzweigungspunkte für eine irrationale algebraische Function einer Variablen.“

6 Kurt Hensel

Eine regelrechte Begründung der Wahl des Wortes „Verzweigung“ im Zusammenhang mit algebraischen Zahlen gab Kurt Hensel (1861–1941) in einem Artikel von 1897: Es geht hierbei um die π-adische Entwicklung einer algebraischen Zahl, wobei π eine d-te Wurzel einer (rationalen) Primzahl ist. Betrachtet man die d Konjugierten von π über den rationalen Zahlen, so erhält man vermöge Konjugation d Entwicklungen der gegebenen Zahl, und, wie Hensel konstatiert [17, S. 85],

> „jene d Entwickelungen hängen ... genau in derselben Weise zusammen wie die d Zweige einer algebraischen Function in der Umgebung eines Verzweigungspunktes ... von der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Es sollen daher diese Primzahlen Verzweigungszahlen genannt werden.“

Überhaupt ist Hensel für die Rezeption der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern eine markante Gestalt: Für die bisher genannten Mathematiker war diese Analogie wohl eine bemerkenswerte Tatsache, die sie etwa verwendeten, um Sätze zu finden oder auch nur deren Beweise zu vereinfachen. Hensel jedoch verließ sich so sehr auf sie, daß er sie zur Basis einer eigenständigen mathematischen Teildisziplin machte. Seine erste Publikation über die p-adischen Zahlen begann wie folgt [17, S. 83–84]:

> „Die Analogie zwischen den Resultaten der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und der der algebraischen Zahlen hat mir schon seit mehreren Jahren den Gedanken nahe gelegt, die Zerlegung der algebraischen Zahlen mit Hülfe der idealen Primfactoren durch eine einfachere Behandlungsweise zu ersetzen, welche der Entwickelung der algebraischen Functionen in Potenzreihen für die Umgebung einer beliebig Stelle völlig entspricht.“

Hensels Grundidee für die p-Adik war also, die Ergebnisse von Kronecker bzw. Dedekind und Weber über die Analogie bei den Ganzheitsringen von Zahl- und Funktionenkörpern, insbesondere die Entsprechung von Primzahlen und Linearfaktoren in der Unbestimmten, mit dem Potenzreihen-Kalkül zu kombinieren und Zahlen in Reihen in aufsteigenden Potenzen einer Primzahl zu entwickeln.

Wegen einer ausführlichen Darstellung der Entstehung der Henselschen p-adischen Zahlen sei auf den Beitrag [50] verwiesen und an dieser Stelle nur ergänzend der Einfluß der Weierstraßschen Funktionentheorie betont: So schreibt etwa André Weil (1906–1998) in seiner „Introduction“ zu Kummers „Collected Papers“ [36], in der er auf p-adisches Denken bei Kummer – und Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852) – hinweist, [36, Bd. 1, S. 6–7]:

> „Of course he [= Kummer] never introduced the concept of p-adic fields; the credit for this goes to his pupil, or rather his pupil's [= Kronecker's] pupil Hensel. Perhaps this concept could only occur to someone like Hensel, who had also been Weierstrass's pupil and who was familiar, not only with Cantor's definition of the real numbers, but with the ideas of Dedekind and Weber on the analogies between number-fields and function-fields.“

(Sine ira et studio sei hinzugefügt, daß Hensel von diesen Analogien auch, wie oben durch Zitate belegt, in den Vorlesungen von Weierstraß hatte erfahren können.) Auch Helmut Hasse (1898–1979) führt die anfängliche Ablehnung der Henselschen Zahlen in Göttingen darauf zurück, daß dort „unter dem nachwirkenden Einfluß von Riemann die Weierstraßschen Gedankengänge sich noch nicht vollen Boden erobert hatten“ [16, S. 10]. Im Vergleich mit der Zurückhaltung des (Algebraikers) Emil Artin (1898–1962), von der Hasse an gleicher Stelle berichtet, fällt auch die Begeisterung des (Analytikers) Hermann Weyl (1885–1955) auf, der 1940 im „Preface“ seiner „Algebraic Theory of Numbers“ schreibt [61, S. iii]:

> „The ultimate verdict may be that the one outstanding way for any deeper penetration into the subject [= Theory of Numbers] is the Kummer-Hensel p-adic theory.“

Der starke Weierstraßsche Einfluß auf Hensel spiegelt sich übrigens auch in dessen 1902 gemeinsam mit Georg Landsberg (1865–1912) veröffentlichtem Buch „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln“ [19] wider, welches „Herrn Dr. Richard Dedekind zum 18. März 1902 [= dessen fünfzigstem Doktorjubiläum] in grösster Verehrung gewidmet“ [19, S. III] ist. Dieses Buch schreibt den Artikel [10] von Dedekind und Weber fort, indem es nicht nur die obengenannte Theorie, sondern auch deren „Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale“ gibt. Dabei wird allerdings die ursprüngliche, idealtheoretische Grundlage verlassen, und es werden stattdessen die „hierher gehörigen Resultate aus der Funktionentheorie“ [19, S. V], insbesondere Potenzreihen-Entwicklungen, herangezogen. In ihrer „Vorrede“ begründen die Autoren ihr Vorgehen unter anderem wie folgt [19, S. VI]:

> „In der höheren Arithmetik werden die algebraischen Zahlen einmal in Bezug auf ihre Teilbarkeit untersucht mit Hilfe der Idealtheorie, zweitens aber werden sie in Bezug auf ihre Größe betrachtet ... Während die Resultate dieser beiden arithmetischen Untersuchungen sehr ähnlich sind, erscheinen ihre Methoden völlig verschieden. Ferner sind diese Untersuchungen auf das Gebiet der algebraischen Zahlen beschränkt, während sich für das der transcendenten Zahlen bisher noch keine allgemeinen Methoden ergeben haben.
>
> Dagegen bedürfen wir in der Theorie der algebraischen Funktionen zu ihrer vollständigen Charakterisierung innerhalb des allgemeinen Funktionengebietes nur des Satzes, daß sie endlich vieldeutig sind und in der Umgebung einer jeden endlichen oder der unendlich fernen Stelle algebraischen Charakter besitzen. Mit Hilfe des Fortsetzungsprinzips für die analytischen Funktionen erhält man so eine wunderbar ein-

fache und vollständige Einsicht in die Natur einer beliebig gegebenen algebraischen Funktion, eine völlig strenge Darstellung der zugehörigen Riemannschen Kugelfläche, und eine rein arithmetische Charakterisierung ihrer Punkte und der diesen zugeordneten Divisoren; genau dieselbe Einsicht ergiebt sich aber auch für alle algebraischen Funktionen, welche rational durch die gegebene und die unabhängige Variable ausdrückbar sind, d.h. für alle Elemente des zugehörigen „Körpers" ..."

(Das hier angesprochene, auf Augustin Louis Cauchy (1789–1857) und Puiseux zurückgehende Algebraizitätskriterium für Funktionen war übrigens für Hensel das Vorbild, nach dem er seine p-adischen Entwicklungen in Sinne eines Lokal-Global-Prinzips für Transzendenzuntersuchungen von Zahlen einsetzen wollte, vgl. [50, S. 164].)

Im Geiste des Buches [19] ist auch Hensels im März 1921 abgeschlossener Bericht über die „Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen" [18] für die „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" geschrieben. Dieser ist mit einem Anhang über die „Arithmetische Theorie der algebraischen Zahlen" versehen, der recht knapp beginnt [18, S. 642]:

„Die in I und II [für rationale bzw. algebraische Funktionen] auseinandergesetzten Prinzipien führen auch zu einer vollständigen Theorie der rationalen und algebraischen Zahlen. Als Aufgabe der ersteren ..."

Obwohl Hensel in den neunziger Jahren des 19. Jahrhunderts die p-adischen Zahlen nur deshalb in die Mathematik einführte, weil er der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern zutiefst vertraute, verliert er jetzt hierüber keinen weiteren Kommentar, und er behandelt die beiden Situationen – immerhin ein ganzes Vierteljahrhundert später – immer noch nur als analog, aber nicht simultan!

Hensels Darstellung erschien aber wohl schon zur damaligen Zeit nicht nur leicht antiquiert, sondern auch etwas einseitig. So wurde sein „Encyklopädie"-Bericht von Alexander Ostrowski (1893–1986) überarbeitet, der durch fleißiges Hinzufügen von Fußnoten und des Abschnitts 10a die Theorie aus dem Buch [19] von Hensel und Landsberg durch die Aspekte der ursprünglichen Theorie von Dedekind und Weber [10] ergänzte (vgl. auch [42, S. 182 bzw. 271, Fußnote 3)]).

7 Emmy Noether

Praktisch zeitgleich mit Hensels Beitrag erschien ein Artikel von Emmy Noether im „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" mit dem Titel „Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie" [42] – die offiziellen Publikationsdaten sind zwar 1919 und 1921, die Arbeiten verweisen allerdings so aufeinander, als sei die jeweils andere schon publiziert (wenn auch das angegebene Publikationsjahr für [42] in [18, S. 535] fehlerhaft ist, dafür aber auch die Bandzahl in [46, S. 271]) –. Noether beginnt [42, S. 182 bzw. 271]:

„Der folgende Bericht ist aus dem Wunsche entstanden, ein verbindendes Glied zwischen den einzelnen Theorien der algebraischen Funktionen zu haben; zugleich

> kann er als eine Ergänzung zu dem Bericht von Brill-Noether angesehen werden, in dem die Besprechung der arithmetischen Theorie im wesentlichen fehlt."

Der vorgebliche Hauptzweck dieses Artikels war also, die Lücke zu schließen, die Kroneckers Tod in dem Bericht von Brill und ihrem Vater [1] erzeugt hatte. Jedoch deutet der Zusatz über die „Zahlkörpertheorie" im Titel bereits an, daß hier nicht nur die „arithmetische" Theorie der algebraischen Funktionen nach Dedekind und Weber bzw. Kronecker mit der „transzendenten" nach Riemann und der „algebraischen" nach Weierstraß verglichen wird.

So beschäftigt sich in der Tat die Hälfte der acht Abschnitte des Artikels mit der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: In der Nummer 2 mit dem Thema „Parallelismus zwischen algebraischen Zahlen und algebraischen Funktionen" geht es um den Körperbegriff, Galois-Theorie, Ganzheitsringe und Existenz von Ganzheitsbasen, hergeleitet aus dem Satz, daß, modern gesprochen, ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring (also einem, in dem jede aufsteigende Kette von Idealen stationär wird) wieder noethersch ist [42, S. 185–188 bzw. 274–277]. Und in der Nummer 3 mit dem Thema „Parallelismus und Verschiedenheiten in der Idealtheorie der algebraischen Zahlen und Funktionen" geht es um die Zerlegung in Primideale, Verzweigungstheorie und die Unterschiede, die zwischen den beiden Theorien auftreten, etwa, weil man in der Zahlkörper-Situation stets eine algebraische Erweiterung des *einen*, festen Körpers der rationalen Zahlen hat, wohingegen der „Körper der rationalen Funktionen" in einem algebraischen Funktionenkörper kein absolutes Objekt ist [42, S. 188–191 bzw. 277–280]. Die Abschnitte 4 und 8 schließlich behandeln transzendente Methoden sowohl für den Zahl- als auch den Funktionenkörper-Fall, insbesondere Hensels p-adische Zahlen [42, S. 191–192 und 201–203 bzw. 280–281 und 290–292].

In diesem 1919 veröffentlichten Artikel von Emmy Noether findet sich also endlich eine explizite und ausführliche Darstellung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern, obwohl dies, wie gesehen, zumindest einigen Mathematikern schon über sechzig Jahre zuvor bewußt gewesen war.

Was die Idealtheorie betrifft, so untersuchte Noether in einem bereits im nächsten Jahr abgeschlossenen Artikel [43] allgemein die *„Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen"* [43, S.25 bzw. 355], d.h., sie gab eine arithmetische Herleitung der Resultate von Emanuel Lasker (1868–1941) und F.S. Macaulay (1862–1937) über die Primärzerlegung in Polynom-, allgemeiner noetherschen Ringen. Den „Spezialfall des Polynombereichs" behandelt sie hier im § 10 allerdings nur im Hinblick auf den *„Zusammenhang unserer Sätze mit den bekannten Sätzen der Eliminations- und Modultheorie"* [43, S. 57 bzw. 387], also nicht speziell auf den Funktionenkörper-Fall (in einer Veränderlichen) bezogen.

Am 25. September 1924 trug sie dann auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Innsbruck vor über das Thema „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischen Zahlkörper". Ihrer Vortragszusammenfassung im „Jahresbericht" nach wurden dabei „die abstrakten Eigenschaften angegeben, die der Idealtheorie im algebraischen Zahlkörper vollständig äquivalent sind". Weiter kündigte sie an: „Eine ausführliche Darstellung wird in den Mathematischen Annalen erscheinen." [44].

Veröffentlicht wurde diese allerdings erst 1927, wobei sich der Titel des Annalen-Artikels [45] in bemerkenswerter Weise vom Vortragstitel unterscheidet. Jetzt heißt die Überschrift nämlich „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern", und Noether leitet ihn wie folgt ein [45, S. 26 bzw. 493]:

> „Im folgenden wird eine abstrakte Charakterisierung all derjenigen Ringe gegeben, deren Idealtheorie übereinstimmt mit der Idealtheorie aller ganzen Größen eines algebraischen Zahlkörpers – deren Ideale sich also eindeutig als Potenzprodukte von Primidealen darstellen lassen. Zu diesen Ringen gehören als bekannteste Beispiele noch der Ring aller ganzen Größen eines algebraischen Funktionenkörpers von einer Unbestimmten".

Dazu gibt sie zunächst ein Axiomensystem für einen kommutativen (und assoziativen) Ring R an, welches beinhaltet, daß R ein Einselement besitzt, nullteilerfrei, noethersch und ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist – d.h., jedes Element des Quotientenkörpers, welches ganz über R ist, stammt in Wirklichkeit schon aus R – und daß jeder Faktorring von R nach einem vom Nullideal verschiedenen Ideal artinsch ist, d.h., daß darin jede absteigende Kette von Idealen stationär wird [45, S. 26–27 bzw. 493–494].

Sie zeigt, daß die Ganzheitsringe sowohl von Zahl- als auch von Funktionenkörpern diesem Axiomensystem genügen [45, S. 36–39 bzw. 503–506] und daß jeder Ring mit Einselement, für den das letzte Axiom gilt, die Eigenschaft besitzt, daß jedes vom Nullideal verschiedene Primideal maximal ist [45, S. 48–49 bzw. 515–516], so daß für diese Ringe und damit auch für den Ringtyp, den Noether betrachtet, die oben erwähnte Dedekind(-Weber)sche Definition eines Primideals – nämlich maximal zu sein – zwar nicht mehr Definition, aber doch noch eine zutreffende Aussage ist.

Das Hauptergebnis ihres Artikels ist jedoch, daß die durch das Axiomensystem charakterisierten Ringe genau diejenigen sind, für die sich jedes Ideal als (eindeutiges) Produkt von Primidealen schreiben läßt [45, S. 26–27, 53 bzw. 493–494, 520], wobei sie für den Beweis der schwierigeren Implikation, daß aus den Axiomen die Primzerlegung folgt, explizit Bezug auf Dedekind nimmt [45, insb. §§ 1, 4], speziell die dritte und die vierte Auflage des XI. Supplements zu Dirichlets Zahlentheorie [6], [8].

Es bleibt jetzt nur noch die Frage offen, woher der Name „Dedekind-Ring" für die so charakterisierten Ringe kommt: Emmy Noethers Ausspruch „Es steht schon bei Dedekind." ist zwar wohlbekannt [11, S. 28], und sie zitierte Dedekind, wie gesagt, auch in ihrem Artikel [45]; die Bezeichnung „Dedekind-Ring" sucht man darin jedoch vergebens. Kameo Matusita hingegen sprach in einem 1944 erschienen Artikel [38], in dem er eine Übertragung des von Noether gegebenen Axiomensystems in die Sprache der Bewertungen angab, bereits von der „Dedekind-Noetherschen Idealtheorie". 1950 verwendete Irving S. Cohen dann den Begriff „Dedekind domains" [2, S. 31 ff.], welche er allerdings durch ein anderes Axiomensystem charakterisierte. Oscar Zariski (1899–1986) hatte in jenen Jahren gemeinsam mit Cohen ein Buch über „Commutative Algebra" begonnen [62, S. viii]; nach dessen frühem Tod stieß an seiner Stelle Pierre Samuel zu dem Projekt, aus dem dann das Buch [62] wurde, welches 1958 in der ersten Auflage erschien. Und mit explizitem Verweis auf Matusita [62, S. vii] nennen die Autoren darin einen nullteilerfreien Ring, in dem jedes Ideal Produkt von Primidealen ist, „Dedekind domain" [62, S. 270].

Dies war gerade einhundert Jahre, nachdem Kronecker sein Manuskript [31] beendet hatte, in dem die Analogie der Idealtheorie in Ganzheitsringen für Zahl- bzw. Funktionenkörper zum erstem Mal ausgenutzt wurde; Zariski und Samuel hingegen führen in ihrer Liste mit Beispielen für Dedekind-Ringe diese Ringe erst als letzte an [62, S. 270–271].

Literatur

[1] Alexander Brill und Max Noether: Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **3** (1894), 107–566, I–XXIII

[2] Irving S. Cohen: Commutative rings with restricted minimum condition. *Duke Math. J.* **17** (1950), 27–42

[3] Richard Dedekind: Abriß einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus. *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 1–26; auch in [9, Bd. 1, S. 40–66]

[4] —: Anzeige der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. *Göttingische gelehrte Anzeigen vom 20. September 1871*, 1481–1494; hier in [9, Bd. 3, S. 399–407]

[5] —: Ueber die Composition der binären quadratischen Formen. Supplement X zu *Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn 2. Auflage 1871, S. 423–462; hier in [9, Bd. 3, S. 223–261]

[6] —: Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen. Supplement XI zu *Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn 3. Auflage 1879, S. 515–530; hier in [9, Bd. 3, S. 297–313]

[7] —: Ueber die Discriminanten endlicher Körper. *Abh. Königl. Gesell. Wiss. Gött.* **29** (1882), 1–56; hier in [9, Bd. 1, S. 351–396]

[8] —: Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen. Supplement XI zu *Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn 4. Auflage 1894, S. 434–657; auch in [9, Bd. 3, S. 1–222]

[9] —: *Gesammelte mathematische Werke*, hrsg. v. Robert Fricke, Emmy Noether und Öystein Ore, 3 Bde. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1930–1932

[10] — und Heinrich Weber: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.* **92** (1882), 181–290; auch in [9, Bd. 1, S. 238–349]

[11] Auguste Dick: Emmy Noether 1882–1935, *Elem. Math.*, Beiheft **13** (1970)

[12] Pierre Dugac: *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Collection des Travaux de l'Académie internationale d'Histoire des Sciences **24**. Paris: J. Vrin 1976

[13] Évariste Galois: Sur la théorie des nombres. *Bull. Sci. Math., I. Ser.* **13** (1830), 428–435; hier in [14, S. 15–23]

[14] —: *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois*. Gauthier-Villars: Paris 1897

[15] Wulf-Dieter Geyer: Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen nach Dedekind und Weber. In *Richard Dedekind, 1831–1981, Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, hrsg. v. Winfried Scharlau, Braunschweig, Wiebaden: Friedr. Vieweg & Sohn 1981, S. 109–133

[16] Helmut Hasse: Kurt Hensel zum Gedächtnis, *J. Reine Angew. Math.* **187** (1950), 1–13

[17] Kurt Hensel: Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **6** (1897), 83–88

[18] —: Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* **2**: *Analysis*, Teil 3, 1, Leipzig: B. G. Teubner 1909–1921, S. 536–650 (1921)

[19] — und Georg Landsberg: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*. Leipzig: B. G. Teubner 1902

[20] Charles Hermite: Sur les fonctions algébriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **32** (1851), 458–461; auch in *Œuvres de Charles Hermite*, hrsg. v. Émile Picard, 4 Bde., Paris: Gauthier-Villars 1905–1917, Bd. 2, S. 276–280

[21] David Hilbert: Über die Theorie der algebraischen Formen. *Math. Ann.* **36** (1890), 473–534; auch in [27, Bd. 2, S. 199–257]

[22] —: Über die vollen Invariantensysteme. *Math. Ann.* **42** (1893), 313–373; auch in [27, Bd. 2, S. 287–344]

[23] —: Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers. *Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Gött. Math.-Phys. Kl. 1894*, 224–236; auch in [27, Bd. 1, S. 13–23]

[24] —: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **4** (1895), 175–546; auch in [27, Bd. 1, S. 63–363]. Englische Übersetzung *David Hilbert: The theory of algebraic number fields*, übers. v. Iain T. Adamson, mit einer Einführung von Franz Lemmermeyer und Norbert Schappacher. Berlin: Springer 1998

[25] —: Zum Gedächtnis an Karl Weierstraß. *Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Gött. 1897*, 60–69; hier in [27, Bd. 3, S. 330–338]

[26] —: Mathematische Probleme. Verschiedene Fassungen in *Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Gött. Math.-Phys. Kl. 1900*, 253–297 und *Arch. Math. Phys.*, 3. Reihe **1** (1901), 44–63, 213–237; hier in [27, Bd. 3, S. 290–329]

[27] —: *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Bde. Berlin: Springer 1. Auflage 1932–1935, 2. Auflage 1970

[28] Christian Houzel: Elliptische Funktionen und Abelsche Integrale. In *Jean Dieudonné, Geschichte der Mathematik 1700–1900*, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1985, S. 422–540

[29] Felix Klein: *Riemannsche Flächen. Vorlesungen, gehalten in Göttingen 1891/92. Herausgegeben und kommentiert von Günther Eisenreich und Walter Purkert*, Teubner-Archiv zur Mathematik **5**. Leipzig: BSB B. G. Teubner 1986

[30] Adolf Kneser: Leopold Kronecker. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **33** (1925), 210–228

[31] Leopold Kronecker: Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen. *J. Reine Angew. Math.* **91** (1881), 301–334; auch in [33, Bd. 2, S. 193–236]

[32] —: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen*. Berlin: Reimer 1881; auch in *J. Reine Angew. Math.* **92** (1882), 1–122 und in [33, Bd. 2, S. 237–387]

[33] —: *Leopold Kronecker's Werke*, hrsg. v. Kurt Hensel, 5 Bde. Leipzig: B. G. Teubner 1895–1931

[34] Ernst Eduard Kummer: Zur Theorie der complexen Zahlen. *Monatsber. Akad. Wiss. Berlin* März 1846, 87–96 und *J. Reine Angew. Math.* **35** (1847), 319–326; auch in [36, Bd. 1, S. 203–210]

[35] —: Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren. *J. Reine Angew. Math.* **35** (1847), 327–367; auch in [36, Bd. 1, S. 211–251]

[36] —: *Collected Papers*, hrsg. v. André Weil, 2 Bde. Berlin et al.: Springer 1975

[37] Serge Lang: Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics. *Mitt. Dtsch. Math.-Ver.* 4/1994, 20–31 und *Notices Amer. Math. Soc.* **42**, 3 (1995), 339–350

[38] Kameo Matusita: Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie. *Jap. J. Math.* **19** (1944), 97–110

[39] Hermann Minkowski: *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner 1896; hier zitiert aus der 2. Ausgabe 1910

[40] Erwin Neuenschwander: Über die Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierstraß. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien. *Arch. Hist. Exact Sci.* **24** (1981), 221–255

[41] Olaf Neumann: Die Entwicklung der Galois-Theorie zwischen Arithmetik und Topologie (1850 bis 1960). *Arch. Hist. Exact Sci.* **50** (1997), 291–329

[42] Emmy Noether: Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränder-

lichen, in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **28** (1919), 182–203; auch in [46, S. 271–292]
[43] —: Idealtheorie in Ringbereichen. *Math. Ann.* **83** (1921), 24–66; auch in [46, S. 354–396]
[44] —: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **33** (1924), 102; auch in [46, S. 482]
[45] —: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. *Math. Ann.* **96** (1927), 26–61; auch in [46, S. 493–528]
[46] —: *Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers*, hrsg. v. Nathan Jacobson. Berlin et al.: Springer 1983
[47] Victor Puiseux: Recherches sur les fonctions algébriques. *J. Math. Pures Appl., I. Ser.* **15** (1850), 365–480
[48] Bernhard Riemann: Theorie der *Abel'* schen Functionen. *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 115–155; auch in *Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge, Collected Papers*, hrsg. v. Heinrich Weber, Richard Dedekind und Raghavan Narasimhan. Berlin et al.: Springer-Verlag und Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1990, S. 132–174
[49] Walter Strobl: Über die Beziehungen zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind und Weber. *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.* **33** (1982), 225–246
[50] Peter Ullrich: The genesis of Hensel's p-adic numbers. In *Charlemagne and his Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe, Vol. 2: Mathematical Arts*, hrsg. v. P. L. Butzer, H. Th. Jongen und W. Oberschelp. Turnhout: Brepols 1998, S. 163–178
[51] Heinrich Weber: Leopold Kronecker. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **2** (1893), 5–23
[52] —: *Lehrbuch der Algebra, Zweiter Band.* Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn; hier: 2. Auflage 1899
[53] —: *Lehrbuch der Algebra, Dritter Band: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen.* Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn 1908
[54] Karl Weierstraß: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. *Math. Abh. Königl. Akad. Wiss. Berlin, 1876*, 11–60; hier in [57, Bd. 2, S. 77–124]
[55] —: *Theorie der Abel'schen Functionen.* Vorlesung Wintersemester 1881/82, ausgearbeitet von A. Ramsay, handschriftlich, 3 Bde., 921 pp. Standort: Bibliothek des Instituts Mittag-Leffler, Djursholm
[56] —: *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten.* Band 4 von [57], 1902
[57] —: *Mathematische Werke*, 7 Bde. Berlin: Mayer & Müller 1894–1927
[58] —: *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen, Vorlesung Berlin 1878, in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz, bearbeitet von Peter Ullrich*, Dokumente zur Geschichte der Mathematik **4**. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn 1988
[59] Joseph Wellstein: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen einer unabhängigen Veränderlichen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **13** (1904), 112–116
[60] —: Algebraische Uniformisierung algebraischer Funktionen. In *Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern.* Leipzig, Berlin: B. G. Teubner 1912, S. 457–479
[61] Hermann Weyl: *Algebraic Theory of Numbers*, Annals of Mathematics Studies **1**. Princeton: Princeton University Press 1940. Deutsche Übersetzung *Hermann Weyl: Algebraische Zahlentheorie*, übers. v. Wolfgang Schwarz, B.I.-Hochschultaschenbuch **136**. Mannheim: Bibliographisches Institut 1966
[62] Oscar Zariski und Pierre Samuel: *Commutative Algebra, Vol. I.* Princeton, N.J., et al.: D. Van Nostrand 1. Auflage 1958

Peter Ullrich
Westfälische Wilhelms-Universität
Mathematisches Institut
Einsteinstraße 62
48149 Münster
ullricp@math.uni-muenster.de

Eingegangen 14.4.1999

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
101 (1999) 135–150
Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Hans Maaß

R. Busam und E. Freitag, Heidelberg

Einige Stationen seines Lebens*

Hans Maaß wurde am 17.6.1911 als Sohn der Eheleute Johannes und Maximiliana Maaß (geb. Huber) in Hamburg-Altona geboren. Sein Vater hatte sich dort zu einer Zeit niedergelassen, als sein Gewerbe, die Photographie, noch als Kunstgewerbe angesprochen werden konnte. Hans Maaß war gerade drei Jahre alt, als sein Vater zum Kriegsdienst eingezogen wurde. An Folgen einer Kriegsverletzung verstarb sein Vater bereits 1919. Alles, was er geworden ist, so berichtet Hans Maaß

---

* Die folgenden Ausführungen stützen sich auf persönliche Gespräche der Verfasser mit Hans Maaß, seiner Antrittsrede bei der Heidelberger Akademie, Gespräche mit Kollegen und auf das Studium von Fakultätsakten.

später, verdankt er seiner Mutter, die als Sozialfürsorgerin den Lebensunterhalt für die Familie bestritt und die ihm nach Ablegung des Abiturs (Ostern 1931) auch die Aufnahme des Studiums ermöglichte.

In seiner Heimatstadt studierte Hans Maaß ab dem Sommersemester 1931 an der Hansischen Universität Mathematik, Physik und Astronomie, zunächst mit dem Ziel, Astronom zu werden. Diese Absicht gab er jedoch bereits im ersten Semester auf, als er beim Studium der *Theoria Motus* von Carl Fr. Gauß auf Kettenbrüche stieß. Da ihm diese mathematischen Objekte bis dato nicht begegnet waren, griff er zum Standardwerk über Kettenbrüche, dem einschlägigen Lehrbuch von Oskar Perron, dessen erste Auflage dieser noch während seiner Lehrtätigkeit an der Universität Tübingen verfaßt hatte. Das Studium der Kettenbrüche hat Hans Maaß so fasziniert, daß er den Anlaß, der zum Studium der Kettenbrüche führte, völlig vergaß. Das war wohl seine erste Hinwendung zur Zahlentheorie.

Die ersten Semester seines Studiums fielen in eine Zeit, in welcher dank der Wirkung hervorragender Mathematiker wie Emil Artin, Erich Hecke und anderer (Blaschke, Lenz, ...) das Mathematische Seminar der Hansischen Universität zu einer Forschungsstätte internationalen Ranges aufstieg. Hans Maaß, zunächst stark von E. Artin beeinflußt, siedelte sich schließlich in der geistigen Umgebung von E. Hecke an, wo insbesondere dessen damaliger Assistent Hans Petersson seine weitere wissenschaftliche Entwicklung stark beeinflussen sollte (siehe das wissenschaftliche Werk von Hans Maaß). Das Ende der Weimarer Republik und die Machtübernahme durch die Nationalsozialisten erlebte Hans Maaß im 4. Semester.

Hans Maaß wurde zwar via Abstammungsbescheid bescheinigt, von „deutschem oder artverwandtem Blut" zu sein, doch fanden sich in seiner Ahnenreihe auch jüdische Mitglieder. Hans Maaß hatte deshalb in den folgenden Jahren einen schweren Stand. Dennoch oder vielleicht gerade deshalb gehörte Maaß von 1935 bis 1938 dem NSKK (nationalsozialistisches Kraftfahrer-Korps) an, und er trat 1937 in die NSDAP ein. Für die Würdigung seiner inneren Einstellung zum Nationalsozialismus ist folgendes Zitat aus der Antrittsrede in der Heidelberger Akademie im Jahre 1974 von Bedeutung:

„... Der allgemeine Terror, der nach der Machtübernahme durch die Nationalsozialisten über deutsche Lande hereinbrach, warf seine Schatten auch auf das Mathematische Seminar und setzte dem unbeschwerten fröhlichen Wissenschaftsbetrieb ein abruptes Ende. Furcht vor Denunziantentum sorgte dafür, daß die Kommunikation im größeren Kreis zum Erliegen kam. ..."

Am 26.6.1937 wurde Hans Maaß mit der Arbeit „Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatatorsystem", die von Hans Petersson angeregt worden war, promoviert.

Am 24.2.1938 wurde ihm nach bestandener Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen die Lehrbefähigung (für höhere Schulen) in Mathematik, Physik und Angewandter Mathematik zuerkannt. Hauptsächlich Erwägungen wirtschaftlicher Art zwangen ihn anschließend, eine Stellung als Statiker bei der Firma Focke-Wulf-Flugzeugbau GmbH in Bremen anzunehmen, wo er mit der Berechnung von Flugzeugschwingungen beauftragt war. Sein Gastspiel in der Flugzeugindustrie war jedoch von relativ kurzer Dauer (6.4.1938 bis 31.5.1939). Aufgrund eines Angebots von Prof. Dr. Udo Wegner von der Universität Heidelberg nahm Hans Maaß zum

1.6.1939, also kurz vor Beginn des zweiten Weltkriegs, eine Stelle als wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg an.

Udo Wegner stand dem damaligen Regime nahe. Er war im übrigen Nachfolger des von den Nationalsozialisten zur vorzeitigen Emeritierung gezwungenen und dann entlassenen Artur Rosenthal. Diese Tatsache macht eine gewisse anfängliche Reserviertheit des zweiten Lehrstuhlinhabers, Herbert Seifert, gegenüber Maaß verständlich. Herbert Seifert, als Nachfolger des ebenfalls von den Nationalsozialisten zur vorzeitigen Emeritierung gezwungenen Heinrich Liebmann von Dresden nach Heidelberg beordert, stand dem Nazi-Regime kritisch gegenüber. Hans Maaß konnte jedoch aufgrund seiner Geradlinigkeit, seiner Aufrichtigkeit, aber auch durch überzeugende wissenschaftliche Leistungen, diese Vorurteile abbauen, so daß Herbert Seifert die Habilitation von Hans Maaß, die bereits im März 1940 erfolgte, mit Nachdruck unterstützte. Im folgenden ist ein Auszug aus dem Bericht der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät über die *öffentliche Lehrprobe* von Hans Maaß am 1. Juli 1940 über das Thema „*Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*" wiedergegeben:

„*... der Vortragende zeigte in dieser zusammengefaßten Behandlung eines nicht ganz einfachen Problems einen umfassenden wissenschaftlichen Weitblick und erhebliche rechnerische und unterrichtliche Begabung. In dieser Hinsicht vermag er ebenso wie persönlich charakterlich allen Anforderungen zu genügen, die an den akademischen Lehrer gestellt werden. ...*"

Hans Maaß übte in den Kriegsjahren eine intensive Lehrtätigkeit am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg aus, gelegentlich bis zu 16 Stunden in der Woche. Er war in dieser Zeit die wesentliche Stütze des Lehrbetriebs. Das Verbleiben in der Heimat forderte jedoch auch seinen Preis: Hans Maaß mußte „kriegswichtige" Berechnungen für die Luftwaffe durchführen (Berechnung von Strömungen an Tragflächen und Schwingungseinflüssen bei Flugzeugen u. ä.). Gegen Ende des Krieges wurde er dennoch eingezogen und im Wetterdienst der Luftwaffe eingesetzt. Hans Maaß geriet im Frühjahr 1945 in amerikanische Gefangenschaft, konnte jedoch seine Lehrtätigkeit zum Wintersemester 1945/46 wieder aufnehmen, nachdem er vor der amerikanischen Militärbehörde als „conditional excepted" eingestuft worden war. Auf Vorschlag von H. Seifert und W. Threlfall wurde Hans Maaß 1948 zum planmäßigen Extraordinarius ernannt. Über die Nachkriegszeit führt Hans Maaß in seiner Antrittsrede in der Heidelberger Akademie aus:

„*... Es war ein beglückendes Gefühl, mit einer Jugend zusammenarbeiten zu können, die jahrelang alles hatte entbehren müssen und die nun in großer Erwartung mit dem Vorsatz, Versäumtes nachzuholen, zur Universität strömte. In den ersten Nachkriegsjahren wurde an dem relativ kleinen Mathematischen Institut mit unvergleichlicher Intensität gearbeitet. ...*"

Schon in seiner Habilitationsschrift „*Zur Theorie der automorphen Funktionen in n Veränderlichen*" [5] hatte Hans Maaß mit einer auf C. L. Siegel zurückgehenden Idee die Struktur gewisser Körper automorpher Formen bestimmt. Unmittelbar nach Siegels Rückkehr von Princeton nach Göttingen lud ihn Maaß zu einem Kolloquiumsvortrag nach Heidelberg ein. Wir zitieren wieder aus der Akademierede:

„... Zu Beginn der fünfziger Jahre traf ich zum erstenmal mit Carl Ludwig Siegel zusammen, der durch sein Werk und die Ausstrahlung seiner Persönlichkeit wie kein anderer Einfluß auf meine Entwicklung genommen hat... . Unsere erste Begrüßung glich der alter Freunde. Es wird unverständlich bleiben, warum ich einem Ruf nach Göttingen und damit einem Ruf Siegels nicht gefolgt bin ....“

Mit C. L. Siegel verband H. Maaß bis zum Tod von Siegel im Jahre 1981 eine enge persönliche und wissenschaftliche Beziehung. Nach Ablehnung des Rufes nach Göttingen wurde Hans Maaß am 12.6.1958 zum ordentlichen Professor an der Universität Heidelberg ernannt.

Hans Maaß war mehrfach Dekan der naturwissenschaftlich-mathematischen bzw. der mathematischen Fakultät.

Im Wintersemester 1962/63 weilte Hans Maaß am Tata Institute of Fundamental Research in Bombay als Gastprofessor. Dieser Gastprofessur war bereits eine solche im Wintersemester 1954/55 vorausgegangen. Bereits aus dieser Zeit stammt die freundschaftliche Verbundenheit von Hans Maaß mit K. Chandrasekharan, dem Begründer der Mathematischen Schule des Instituts und wohl auch die Liebe von Hans Maaß zur asiatischen Kunst und Musik. Ein weiterer für ihn ergiebiger, aber anstrengender Gastaufenthalt im Wintersemester 1969/70 führte ihn an die University of Maryland (USA). Dies war unmittelbar nach seiner zweiten Amtszeit als Dekan der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät, die ihn als Mitglied der Grundordnungsversammlung aufgrund der harten politischen Auseinandersetzungen um die Strukturreform der Universität und ihrer Gremien viel Kraft gekostet hat. Aus der Zeit in Maryland stammt auch eine enge persönliche und wissenschaftliche Verbindung zu Reinhold Remmert.

Anfang der siebziger Jahre hielt Robert P. Langlands (Institute for Advanced Studies, Princeton) auf Einladung von Hans Maaß eine Gastvorlesung über Zetafunktionen am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg. Maaß hielt im gleichen Semester eine Vorlesung über Modulformen und Dirichlet-Reihen. Jeder besuchte die Vorlesung des anderen. Die Überschneidungen bei den Resultaten waren groß, die Methoden allerdings völlig verschiedenen. Von Beginn der siebziger Jahre an weilte auch Anatoli N. Andrianov (St. Petersburg) mehrfach auf Einladung von Hans Maaß als Gastprofessor in Heidelberg. Maaß schätzte die „solide Mathematik“ von Andrianov, und es verband ihn mit Andrianov über seine Emeritierung hinaus eine enge wissenschaftliche und freundschaftliche Beziehung.

1974 wurde H. Maaß Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, die Indian National Science Academy ernannte ihn 1983 zum „foreign fellow“.

Nach 44 Dienstjahren im öffentlichen Dienst wurde Hans Maaß mit Ablauf des Sommersemesters 1979 emeritiert. Dieses Jahr bedeutete aber nicht das Ende seiner wissenschaftlichen Aktivitäten. Solange es seine Kräfte zuließen, nahm Hans Maaß lebhaften Anteil an der Entwicklung seines Arbeitsgebiets, er nahm weiterhin an Oberseminaren und Arbeitsgemeinschaften teil, und wie in der Würdigung seines wissenschaftlichen Werkes ausgeführt, stammen wichtige Arbeiten aus der Zeit nach seiner Emeritierung.

Die wissenschaftlichen Arbeiten und Vorlesungsausarbeitungen von Maaß zeichneten sich durch hohe Dichte und Vollständigkeit bis ins Detail aus. Ähnlich waren seine Vorlesungen stets perfekt mit lückenlosen Beweisen ausgearbeitet. Dabei spielte es keine Rolle, ob es sich um eine Anfängervorlesung oder eine Spezialvorlesung handelte, beiden widmete er sich mit gleichem leidenschaftlichem Engagement. Doch stellten seine Vorlesungen durch ihren Inhaltsreichtum hohe Anforderungen an die Hörer, den bequemen Weg gab es bei ihm nicht, wohl ein Umstand, daß Maaß eine relativ geringe Zahl von Schülern hatte. Wer seinen Ideen folgte, konnte sich jedoch unerschütterlicher Unterstützung gepaart mit hoher Toleranz sicher sein.

Hans Maaß war zweimal verheiratet, aus beiden Ehen stammen insgesamt fünf Söhne.

Hans Maaß verstarb am 15.4.1992 in Heidelberg. Sein bescheidenes, aber bestimmtes Auftreten, seine durch Geradlinigkeit und Korrektheit gekennzeichnete Haltung, seine exzellenten Fähigkeiten als akademischer Lehrer, die intensive Betreuung und Unterstützung seiner Schüler, haben ihm Respekt und Achtung unter Kollegen, Freunden und Schülern eingebracht.

Mit Herbert Seifert und F.K. Schmidt hat er die Struktur des Mathematischen Instituts der Universität Heidelberg wesentlich mitgeprägt und die heutige Struktur der Fakultät für Mathematik an der Universität Heidelberg vorgeprägt.

Das wissenschaftliche Werk

Die erste wissenschaftliche Publikation von H. Maaß *„Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen"* weist Maaß als einen Schüler E. Artins aus. Auf Anregung Artins bewies Maaß in dieser Arbeit, welche 1937 in den Hamburger Abhandlungen erschien, daß für jede einfache Algebra S über einem Zahlkörper k mit zyklischem Zentrum der Normensatz gilt: Ein Element $a \in k$ ist genau dann Norm eines Elements von S, wenn dies an jeder Stelle von k der Fall ist. Man nennt diese Verallgemeinerung des Hasseschen Normensatzes heutzutage nicht den „Maaßschen Normensatz", sondern spricht eher von einem Hasseprinzip, wohl zu Recht, denn Maaß erwähnt in einem Zusatz bei der Korrektur, daß eine etwas schwächere Variante dieses Satzes bereits 1936 von Hasse und Schilling publiziert wurde.

Maaß begann also seine wissenschaftliche Laufbahn als Schüler Artins mit rein algebraisch-zahlentheoretischen Fragestellungen. Auch wenn er sich in der Folgezeit mehr analytischen Problemstellungen zuwenden sollte, so war es immer die Verbindung zur Zahlentheorie, die ihn faszinierte und in seinem Werk überall zutage tritt. Maaß sah sich selbst als analytischen Zahlentheoretiker.

Die Zuwendung zu analytischen Fragestellungen, insbesondere zur Theorie der Modulformen, erfolgte unter dem Einfluß von E. Hecke und H. Petersson, dem damaligen Assistenten Heckes. Unter dessen Anleitung entstand seine Dissertation *„Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen"*, welche in zwei Teilen (Hamb. Abh. 1937, Math. Z. 1938) erschien.

Da diese Arbeit für das weitere Schaffen von Maaß richtungsweisend und in gewisser Weise typisch ist, möchten wir auf den ersten Teil etwas genauer eingehen.

In dieser Arbeit wird u.a. ein neuer Beweis für die bekannte Formel der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von drei Quadraten abgeleitet, und nur auf diesen Teil der Arbeit gehen wir ein. Diese Formel wird aus einer funktionentheoretischen Identität

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}\right)^3 = \sum_{(c,d)\ \text{ganz}} \gamma(c,d)\sqrt{c\tau+d}^{\,-3}$$

abgeleitet. Die Koeffizienten $\gamma(c,d)$ werden so eingerichtet, daß die rechte Seite dasselbe Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen hat wie die Thetareihe auf der linken Seite. Das eigentliche Problem liegt in der Interpretation der rechten Seite. Die Wurzel ist zweideutig, und im übrigen konvergiert die Reihe nicht.

Nach einer Vorgehensweise von Hecke ersetzt man nun den Ausdruck $(c\tau+d)^{-3/2}$ durch $(c\tau+d)^{-3/2}|c\tau+d|^{-s}$ und erhält Konvergenz in der Halbebene $\mathrm{Re}\, s > 1/2$. Man setzt diese Funktion von s analytisch fort und betrachtet ihren Wert bei $s = 0$. Wenn die so definierte Eisensteinreihe als Funktion von τ analytisch ist, kann man obige Identität mit Standardschlüssen aus der Theorie der Modulformen beweisen. A priori treten jedoch bei der Analyse der Eisensteinreihe nicht-analytische Terme in τ auf. Deren Verschwinden muß man beweisen. Maaß formuliert hierzu:

„*...Es zeigt sich also hier eine bemerkenswerte Verschränkung zwischen der Aussage, welche natürlichen Zahlen als Summe von drei Quadraten darstellbar sind und der Tatsache, daß eine bestimmte Funktion von τ in τ analytisch wird....*“

Maaß sieht hier die auftretenden nicht-analytischen Terme noch als Störterme an, derer man sich zu entledigen hat. Erst ein Jahrzehnt später entstanden seine bahnbrechenden Arbeiten, in denen er die Theorie der nicht-analytischen Modulformen begründete.

Doch zunächst widmete er sich Fragen der Grundlegung der Theorie der Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher. Im zweiten Teil seiner Dissertation wurden bereits Hilbertsche Modulformen zweier Veränderlicher untersucht. Die Theorie dieser Modulformen war von Blumenthal begründet worden, doch die Darstellung Blumenthals hatte, was Einfachheit und Exaktheit angeht, ihre Tükken. In einer Reihe von Arbeiten, darunter seine Habilitationsschrift „*Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen*“ (Math. Ann. 1940), erbrachte Maaß eine neue Grundlegung und Weiterentwicklung der Blumenthalschen Theorie, beginnend mit der Konstruktion des Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppe, welcher nach Maaß h Spitzen hat, wenn h die Klassenzahl des zugrunde gelegten total reellen Zahlkörpers bezeichnet. (Blumenthal war irrtümlicherweise davon ausgegangen, daß dieser Fundamentalbereich stets nur eine Spitze hat.) Weitere Untersuchungen betrafen den Nachweis, daß der Körper der Hilbertschen Modulfunktionen ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n ist. Hier stützte sich Maaß auf die neuen Methoden, die Siegel bei der Entwicklung einer funktionentheoretischen Begründung der nach ihm benannten Modulfunktionen verwandte. Maaß hatte bereits in seiner Dissertation analytische Versionen des Siegelschen Hauptsatzes für quadratische Formen kleiner ungerader

Variablenzahl abgeleitet. Die Nähe zu Siegels Arbeiten und Denkweise durchzieht das Gesamtwerk von Maaß.

Neben dem Einfluß Siegels auf diese Phase des Schaffens von Maaß muß auch noch der Einfluß Peterssons hervorgehoben werden. Motiviert durch die Arbeiten Peterssons versuchte Maaß, die Theorie der Poincaréreihen verschiedener Typen soweit als möglich auf den Hilbertschen (später auch auf den Siegelschen) Fall zu übertragen.

Sein Interesse galt auch immer wieder hiermit zusammenhängenden zahlentheoretischen Fragen, worüber einige Arbeiten zur Arithmetik der quadratischen Formen über quadratischen Zahlkörpern Zeugnis ablegen. Beispielsweise gelang Maaß der Beweis, daß im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ jede ganze total positive Zahl Summe von drei Quadraten ist, und er gab eine Formel für die Anzahl an. Dieser Satz ist umso bemerkenswerter, als es in jedem anderen reell-quadratischen Zahlkörper total positive ganze Zahlen gibt, die sich nicht einmal als Summe von vier Quadraten darstellen lassen. Die von Maaß gegebene Anzahlformel enthält als Hauptfaktor die Klassenzahl eines biquadratischen Zahlkörpers. Dieser Zusammenhang zwischen Klassenzahlen und Darstellungsanzahlen – von Hecke bereits früher vermutet – waren eines der Motive Heckes für das Studium von Klassenzahlen.

Damit kommen wir auf den Einfluß Heckes auf das Werk von Maaß. Bereits 1936 war Heckes fundamentale Arbeit *„Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung“* erschienen. In dieser Arbeit entsprechen gewisse Typen von Dirichletreihen mit Funktionalgleichung durch umkehrbare Integraltransformation automorphen Formen. Der Gammafaktor in Heckes Theorie muß mit $\Gamma(s)$ oder mit $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ übereinstimmen.

Die meisten interessanten Zetafunktionen der algebraischen Zahlentheorie können wegen dieser Einschränkung von Heckes ursprünglicher Theorie nicht erfaßt werden. Dies empfand Maaß als einen Mangel. Er formuliert in einer seiner Arbeiten:

„... Es erhebt sich nun die Frage, ob die Funktionalgleichungen der Zetafunktionen des reell-quadratischen Zahlkörpers einer ähnlichen Behandlung fähig sind, ob es also eine Funktionenklasse gibt, die für die Zetafunktionen des reell-quadratischen Zahlkörpers dasselbe leistet, wie die Modulfunktionen für die Zetafunktionen des rationalen und imaginär-quadratischen Zahlkörpers. ...“

Und Maaß fährt fort *„Das ist in der Tat der Fall ...“* und stellt seine Theorie der nicht-analytischen Modulformen vor.

Dieses Zitat stammt aus der Arbeit *„Über eine neue Art von nicht-analytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen“*, welche 1949 in den Mathematischen Annalen erschien. Doch war dies nicht die erste einer ganzen Reihe von fundamentalen Arbeiten zu diesem Thema. Es gab zwei Vorläuferarbeiten, welche etwas Licht darauf werfen, wie Maaß zu seiner Theorie gekommen sein mag.

In der Arbeit *„Automorphe Formen und indefinite quadratische Formen“*, welche kurz zuvor ebenfalls 1949 in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften erschienen war, ging Maaß von den Zetafunktionen aus, welche Siegel indefiniten quadratischen Formen der Signatur $(2\alpha, 2\beta)$ zugeordnet hatte. Siegels analytische Theorie der quadratischen Formen bringt die Thetareihen, die man diesen quadratischen Formen zuordnen kann, in Verbindung mit nicht-analytischen Eisensteinreihen des Typs

$$\sum (c\tau + d)^{-\alpha}(c\bar{\tau} + d)^{-\beta}.$$

Maaß suchte nach einer Erweiterung des Begriffs der Modulform, durch welchen diese Eisensteinreihen mit erfaßt werden. Um einen Ersatz für die Analytizität zu bekommen, suchte und fand er eine Differentialgleichung, welcher diese Eisensteinreihe genügt. Modulformen des neuen Typs sollen dann allgemein Lösungen dieser Differentialgleichung sein, die dasselbe Transformationsverhalten wie die Eisensteinreihe unter Modulsubstitutionen besitzen. Gelegentlich nennt er diese Modulformen auch *Wellenformen*. Es gelang Maaß, in dieser und der nachfolgenden Arbeit den umkehrbaren Übergang von den Modulformen des neuen Typs zu den Dirichletreihen zu vollziehen. Schließlich entwickelte er die Theorie der Heckeoperatoren in der verallgemeinerten Form und bewies so, daß die neuen Dirichletreihen, wenn sie nicht schon selbst Eulerprodukte sind, sich aus Eulerprodukten linear kombinieren lassen. Maaß hatte damit – einer Formulierung A. Weils zufolge – die Theorie der Modulformen aus dem Prokrustesbett der Funktionentheorie befreit.

Den beiden genannten Arbeiten geht noch eine Arbeit voraus, welche bereits 1946 anläßlich der Tübinger Mathematikertagung unter dem Titel *„Über automorphe Formen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen“* in den Tagungsberichten erschien. Dieser erste Beitrag von Maaß zum Thema der nicht-analytischen Modulformen umfaßt lediglich zwei Seiten. Die Arbeit beginnt ebenfalls mit dem Hinweis auf den Mangel von Heckes Theorie. Als möglicher Ausweg wird vorgeschlagen, zu automorphen Funktionen in mehreren Variablen überzugehen. Ohne weitere Motivation wird vorgeschlagen, als Grundgebiet den reellen hyperbolischen Raum $(x_1, \ldots, x_k)$, $x_k > 0$, zu nehmen. Als Ersatz für holomorphe Funktionen werden Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\Delta f = \lambda f$$

genommen, wobei Δ der invariante Laplace-Operator sei. Es wird gefordert, daß f unter einem geeigneten Translationsgitter $x \mapsto x + n$ und unter der Spiegelung $x \mapsto \frac{x}{||x||^2}$ invariant ist. Die Fourierkoeffizienten sind konstante Vielfache gewisser Besselfunktionen. Mit diesen Konstanten $a(b)$ werden die Dirichletreihen

$$\sum \frac{P(b)a(b)}{||b||^s}$$

gebildet. Dabei ist P eine Kugelfunktion, die eingebaut wird, um Koeffizienten $a(b)$ zum selben $||b||$ separieren zu können. Die neuen Dirichletreihen genügen Funktionalgleichungen. Dies findet sich alles auf zwei Seiten, ohne weitere Motivation und ohne Beispiele.

Später (1949) wird Maaß diese Arbeit in einer E. Artin gewidmeten Arbeit noch einmal aufgreifen und vertiefen. Dort werden die Picardschen Modulgruppen auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum benutzt und als vielleicht wichtigstes Resultat bewiesen, daß gewisse Zetafunktionen zu biquadratischen Erweiterungen Mellintransformierte Picardscher Modulformen sind. Daß die Frage der Beschreibung der Zetafunktionen der algebraischen Zahlentheorie durch automorphe Formen zu einem beherrschenden Thema der Mathematik werden sollte, hat Maaß in diesen Arbeiten sicherlich nicht vorhergesehen. In seiner Antrittsrede bei der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (1974) formuliert dies Maaß folgendermaßen: *„Heute gibt es eine umfangreiche Literatur über nicht-analytische automorphe Formen, die weit über das hinausgeht, was ich ursprünglich angestrebt hatte.“*

Maaß bezieht sich in seinen späteren Arbeiten wenig auf die kurze Tübinger Arbeit. Es ist eine historische Merkwürdigkeit, daß am Anfang der Untersuchungen von Maaß zur Theorie der nicht-analytischen Modulformen die Gruppe $SO(1,n)$ stand, um dies in heute üblicher Sprechweise auszudrücken.

Eine formal vollendete Darstellung seiner Theorie hat Maaß 1953 in der Arbeit *„Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen“* (Math. Annalen) gegeben. Beschränkungen in den Gewichten sind völlig aufgehoben, die Differentialgleichungen erscheinen nun als ein konsistentes Eigenwertproblem eines invarianten Laplace-Operators zweiter Ordnung, welcher sich aus linearen Operatoren zusammensetzt, von Maaß gelegentlich *„Schaukeloperatoren“* genannt. Diese Schaukeloperatoren führen Modulformen in Modulformen über, verändern aber ihr Gewicht. Diese Arbeit stellt wohl einen der Höhepunkte der wissenschaftlichen Arbeit von Maaß dar und auch in der Darstellung, konzentriert und mit lückenlosen Beweisen, hatte Maaß zu höchster Meisterschaft gefunden.

Die nachfolgende Arbeit *„Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen“* erschien ebenfalls in den Annalen drei Jahre später, eine für Maaß lange Zeitspanne, die mit den enormen technischen Schwierigkeiten zusammenhängt, mit denen Maaß zu kämpfen hatte, um seine Theorie der Differentialgleichungen auf den symplektischen Fall zu übertragen.

An dieser Stelle muß auf einen anderen Aspekt des Werkes von Maaß eingegangen werden. Wir haben bereits gesehen, daß Maaß an automorphen Funktionen in mehreren Variablen interessiert war und eine Reihe von wichtigen Arbeiten über Hilbertsche Modulformen geschrieben hat. Etwa 1950 wandte er sich den Siegelschen Modulfunktionen zu. Siegel und Maaß verband seit Beginn der fünfziger Jahre eine enge Freundschaft, die bis zum Tode Siegels (1981) dauerte. Siegel nahm durch sein Werk und die Ausstrahlung seiner Persönlichkeit – so formulierte es Maaß in der bereits erwähnten Heidelberger Antrittsrede – wie kein anderer Einfluß auf seine Entwicklung. Am Rande sei erwähnt, daß Maaß bereits 1942 in der Arbeit *„Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum“* die metrische Grundform der symplektischen Geometrie eingeführt und explizite Parameterdarstellungen ihrer Geodätischen angegeben hat. Unter den Arbeiten über die allgemeine Theorie der analytischen Siegelschen Modulformen ist die Arbeit *„Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen“* hervorzuheben, hatte doch der Darstellungssatz von Modulformen genügend großen und geraden Gewichts zur Folge, daß der Siegelsche Spezialisierungsoperator, welcher Modulformen n-ten Grades in solche $(n-1)$-ten Grades überführt, in diesen Gewichten surjektiv ist. Eine andere Anwendung dieses Darstellungssatzes gab Maaß in der Arbeit *„Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulformen“*. In dieser Arbeit benutzte

Maaß den Darstellungssatz, um ein Vertauschungsgesetz für Heckeoperatoren und Siegelschem Spezialisierungsoperator zu beweisen. Diese Arbeit ist der erste tiefere Beitrag zur Theorie der Heckeoperatoren im Siegelschen Fall.

Maaß war, wie wir wissen, stets an Zetafunktionen interessiert und damit natürlich mit Fragen konfrontiert, wie Siegelsche Modulfunktionen – sowohl analytische als auch nicht-analytische – und Zetafunktionen zusammenhängen. Wir wissen, daß Maaß zu den nicht-analytischen Modulformen u.a. über die Zetafunktionen gestoßen war, welche Siegel indefiniten quadratischen Formen zugeordnet hatte. Diese Zetafunktionen hängen ähnlich wie die Epsteinschen Zetafunktionen mit Fragen der räumlichen Verteilung von Punkten eines Gitters zusammen. Es lag nahe, diese Zetafunktionen dahingehend zu verallgemeinern, daß auch die Verteilung von Untergittern eines Gitters analytisch erfaßt werden konnte. Die beiden Fragen sind formal voneinander unabhängig, aber, wie man vom Fall einer Variablen her weiß, eng miteinander korreliert. Die analytischen Schwierigkeiten, denen sich Maaß gegenübersah, waren nur schwer zu überwinden, und die Arbeiten, die Maaß zu diesen Themenkreisen in den fünfziger Jahren, vor allem 1955 bis 1960, verfaßte, gehören zu den technisch schwierigsten, die er verfaßt hat. Wenden wir uns zunächst der ersten Frage zu. Es war in den Anfängen der Theorie nicht klar, wie man selbst holomorphen Siegelschen Modulformen Zetafunktionen zuordnen sollte. Man konnte daran denken, diese Zetafunktionen aus den Fourierkoeffizienten der Siegelschen Modulformen zu bilden, und dies war ein Themenkreis, der Maaß stets interessierte. Ein anderer naheliegender Gedanke, die Zetafunktionen aus den Eigenwerten der Heckeoperatoren zu bilden, konnte erst dann realisiert werden, als die Theorie der Heckeoperatoren im höherdimensionalen Fall formal in geeigneter Form entwickelt war. Dies sollte geraume Zeit dauern. Wir wissen, daß gerade dieser Aspekt der automorphen Zetafunktionen für die Zahlentheorie eine ungeahnte Bedeutung erlangt hat und zu einer gewaltigen Theorie geführt hat, die Maaß zwar angestoßen aber nicht eigentlich entwickelt hat. Hier sind andere Namen wie Andrianov und vor allem Langlands zu nennen. Was jedoch die Zetafunktionen angeht, die man den Fourierkoeffizienten der Siegelschen Modulformen zuordnen kann, so sind die Arbeiten von Maaß immer noch aktueller Standard. Ein Teil dieser Arbeiten fand in den Springer lecture notes 216 (1971) „*Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*“ eine abschließende Darstellung. Im §15 werden einer Siegelschen Modulform mit Fourierkoeffizienten $a(T)$ (die Indizes durchlaufen ein Gitter symmetrischer Matrizen) die Zetafunktionen

$$D(s,u) = \sum_{\{T>0\}} \frac{a(T)u(T)}{\varepsilon(T)|T|^s}$$

zugeordnet. Dabei ist $\varepsilon(T)$ lediglich die Zahl der Einheiten der quadratischen Form T. Die Funktion $u(T)$ wird eingeführt, um Koeffizienten $a(T)$ mit gleicher Determinante T separieren zu können. Man will schließlich die Modulform aus den assoziierten Dirichletreihen rekonstuieren können. In Analogie zu Heckeschen L-Funktionen, welche mit der Hilbertschen Modulgruppe in Verbindung stehen, nannte er diese Funktionen Größencharaktere. Diese sollten in erster Linie invariant unter der unimodularen Gruppe und homogen vom Grade 0 sein. Damit diese Funktionen ein vernünftiges analytisches Verhalten bekommen, beschränkt man sich auf

Eigenfunktionen invarianter Differentialoperatoren, wobei man im Hintergrund bedenken muß, daß man jede Funktion u nach Eigenfunktionen spektral entwickeln kann. Diese Eigenfunktionen sind in heutiger Sprechweise Modulformen auf der Gruppe $\mathrm{SL}(n)$. Im Falle $n=2$ sind das genau die Wellenformen. Der Beweis der analytischen Fortsetzung und Funktionalgleichung dieser Dirichletreihen war das Resultat jahrelanger schwerer Arbeit, ebenso wie die der Zetafunktionen, die Maaß den erwähnten Gitterproblemen zuordnete.

Auf diese wurde Maaß über folgendes zahlentheoretische Problem geführt. Gegeben ist eine positiv definite m-reihige reelle Matrix S. Man will ganzzahlige Darstellungen $S[G]=T$ studieren, wobei T eine n-reihige Matrix ist. Man gibt sich zwei Bereiche A und B vor. A ist ein Teilkegel des Minkowskikegels im Bereich der positiven n-reihigen Matrizen und B ist ein Teilbereich im Raum aller reellen $m \times n$-Matrizen, welcher unter der Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bei Rechtsmultiplikation invariant ist. Das zahlentheoretische Problem besteht nun darin, die Asymptotik in t der Anzahl der ganzen Darstellungen

$$S[G]=T \quad \text{mit} \quad T \in A,\ G \in B \quad \text{und} \quad |T|=t$$

zu studieren. Die Idee ist es, Taubersätze auf Dirichletreihen

$$\sum_{\{G\}} \frac{w_0(QG)u(S[G])}{|S[G]|^{s+k}} \qquad (S=Q'Q)$$

anzuwenden. Die Funktionen w_0 und u werden aus den charakteristischen Funktionen der Bereiche A und B gebildet. Um vernünftige analytische Eigenschaften zu bekommen, führt man eine Approximation durch und ersetzt u durch einen Größencharakter. Um den „Winkelbereich" B analytisch erfassen zu können, approximiert man seine charakteristische Funktion durch Polynome w_0 mit der Eigenschaft $w_0(XV)=|V|^{2k}w_0(X)$. Es stellt sich jedoch heraus, daß die Klasse dieser Polynome nicht allgemein genug ist, um Konsistenz in dem gesamten Formalismus zu erhalten. Man muß allgemeiner Polynome zulassen, welche von rechts lediglich unter der orthogonalen Gruppe invariant sind. Maaß verwendete einen raffinierten Trick, um diese Polynome zu beschreiben. Sei L ein Differentialoperator, welcher als Polynom in $X\frac{\partial}{\partial X'}$ geschrieben werden kann. Dann ist durch

$$Le^{-\pi\sigma(X'X)}=w_0(X)e^{-\pi\sigma(X'X)}$$

ein Polynom w_0 mit dieser Invarianzeigenschaft definiert und man erhält jedes invariante Polynom w_0 auf diesem Wege. Die Zerlegungstheorie der Polynome in einer Matrixvariablen $X=X^{(m,n)}$, welche unter der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(m)$ von rechts invariant sind, insbesondere ihr Aufbau aus harmonischen Polynomen, ist schwierig. Maaß hat dieses algebraische Problem in mehreren Arbeiten aufgegriffen. Man hat heutzutage einen einfacheren Zugang zu dieser Theorie, welcher darauf beruht, daß man die Darstellung der Gruppe $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{O}(n)$ auf dem Raum der Polynome $P(X^{(m,n)})$ studiert und mittels der Theorie der Höchstgewichte in irreduzible Komponenten zerlegt. Maaß lagen darstellungstheoretische Methoden fern, er bevorzugte die Sprache der Differentialoperatoren, zu der er selbst soviel beigetragen hat. Wie man weiß, hat die Darstellungstheorie an allen Ecken und En-den in der Theorie der Modulformen Einzug gehalten. Maaß hat manches, was später darstellungstheoretisch „neuentdeckt“ wurde, zumindest in Ansätzen vorweggenommen. Ein schönes Beispiel hierzu ist die Arbeit *„Dirichletsche Reihen und Modulformen zweiten Grades“*, welche 1973 in den Acta Arithmetica erschienen ist. In dieser Arbeit werden analytische Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Dirichletschen Reihe

$$\sum_{\{N\}>0} \frac{a(N)\overline{b(N)}}{\varepsilon(T)|N|^s}$$

bewiesen, wobei $a(N)$ und $b(N)$ die Fourierkoeffizienten zweier Siegelscher Modulformen zweiten Grades gleichen Gewichts seien. Beim Beweis werden Eisensteinreihen zur symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(2)$ und zur orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2,2)$ miteinander in Verbindung gebracht. Es wird gezeigt, daß beide durch eine Integraltransformation mit einem Thetakern ineinander überführt werden könnnen. Daß Modulformen zur orthogonalen und symplektischen Gruppe mittels Thetakernen ineinander transformiert werden können, ist heutzutage ein eigenständiges umfangreiches Teilgebiet in der Theorie der automorphen Formen geworden, wobei manchmal vergessen wird, daß Maaß auch hier Pionierarbeit geleistet hat.

Der eben angesprochene „Thetalift“ ist wiederum ein Spezialfall eines allgemeinen Funktorialitätsprinzips, welches es nach den Vorstellungen von Langlands erlaubt, Modulformen zwischen verschiedenen Gruppen hin- und herzuschieben. Dieses Funktorialitätsprinzip ist eine der großen offenen Fragen der gegenwärtigen Theorie der automorphen Formen und konnte bislang nur in Spezialfällen ausgearbeitet werden. In einem wichtigen Fall sollte Maaß – fast siebzigjährig – nocheinmal bahnbrechende Ideen entwickeln und Resultate erzielen. Es handelt sich um seine vier Arbeiten zum „Kurokawa-Lift“, welche 1979 und 1980 in den Inventiones erschienen sind, die erste unter dem Titel *„Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades“*. Ausgangspunkt wie mehrmals in seinem wissenschaftlichen Werk war wiederum das detaillierte Studium von Eisensteinreihen, diesmal der Siegelschen Eisensteinreihen zur Modulgruppe zweiten Grades. In zwei Arbeiten aus den Jahren 1964 und 1972 in der dänischen Zeitschrift Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk berechnete Maaß die sogenannte singuläre Reihe und kam so zu einem expliziten Ausdruck für die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe. Als Folge leitete Maaß die Relation

$$a(T) = \sum_{\substack{d|n,m,t\\ d>0}} d^{k-1} a\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2d} \\ \frac{t}{2d} & \frac{nm}{d^2} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix},$$

für die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe ab. Computerrechnungen von Resnikoff und Saldana legten nahe, daß solchen Relationen auch manche Spitzenformen genügen können. Maaß faßte alle Modulformen dieser Art zu seiner „Spezialschar“ zusammen. Eine Vermutung von Kurokawa und die Arbeiten von Maaß erbrachten schließlich ein faszinierendes Bild. Die Spezialschar ist isomorph zu einem Vektorraum elliptischer Modulformen. Dieser „Lift“ elliptischer Modulformen zu Siegelschen Modulformen führt Hecke-Eigenformen in Hecke-Eigenformen über und läßt sich auch über die Zetafunktionen, die diesen Modulformen zugeordnet werden, beschreiben, nebenbei im Einklang mit Langlands allgemeinem Funktorialitätsprinzip. Maaß verdankte die Vertrautheit mit der schwierigen Teorie der Zetafunktionen, welche man den Eigenwerten Siegelscher Eigenformen zuordnen kann, den Arbeiten Andrianovs mit dem er bis zu seinem Tode freundschaftlich verbunden war.

Die Arbeiten von Maaß über seine Spezialschar stellen sicherlich ein außergewöhnliches Beispiels für schöpferische Schaffenskraft eines Mathematikers in schon vorgerücktem Alter dar.

Schon über siebzigjährig publizierte Maaß die Arbeit „*Über eine Kennzeichnung der Koecherschen Dirichletreihen mit Funktionalgleichung*“ (Math. Ann. 1982), einen Beitrag zur Charakterisierung der reell-analytischen Eisensteinreihen zur Siegelschen Modulgruppe durch seine Differentialoperatoren. Dieses Problem ist bis heute ungelöst, Maaß gelang in dieser Arbeit wenigstens die Charakterisierung des nullten Fourierkoeffizienten.

Maaß hat neben seinen in Zeitschriften publizierten Arbeiten auch einige wichtige Monographien verfaßt. Zur Standardliteratur gehören seine beiden Tata-lecture notes „*Lectures on Siegel's Modular Functions*“ und „*Lectures on Modular Functions of One Complex Variable*“ aus den Jahren 1954 und 1964. Beide entstanden aus Vorlesungen am Tata Institute of Fundamental Research in Bombay. Auf diese Aufenthalte geht auch die enge Freundschaft mit Chandrasekharan zurück. Die zweite dieser Vorlesungen erschien 1983 in revidierter Form beim Springer-Verlag. Die Monographie „*Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*“ (Springer Lecture Notes 216, 1971) entstand bei Gastvorlesungen an der University of Maryland. Diese letzte große Reise kostete Maaß viel Kraft. „*Ungestraft treibt niemand Raubbau mit seinen Kräften.*“, formulierte er in der Antrittsrede bei der Heidelberger Akademie.

Anläßlich einer Würdigung des wissenschaftlichen Werkes von Maaß dürfen auch seine Vorlesungsausarbeitungen nicht unerwähnt bleiben, die – zum Teil handschriftlich – zum wertvollen Bestand der Bibliothek der Fakultät für Mathematik der Universität Heidelberg gehören.

Von Hans Maaß betreute Dissertationen

1 Herrmann, Oskar: *Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung (1953)*
2 Roelcke, Walter: *Uber die Wellengleichung der Grenzkreisgruppen erster Art (1954)*
3 Becker, Hugo: *Poincarésche Reihen zur hermiteschen Modulgruppe (1954)*
4 Freitag, Eberhard: *Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper (1966)*
5 Busam, Rolf: *Eine Verallgemeinerung der Dimensionsformeln von Shimizu (1970)*
6 Bauhoff, Eugen Peter: *Konstruktion von Nichtkongruenzgruppen in Picardschen Modulgruppen (1970)*
7 Hoppe, Klaus: *Über die spektrale Zerlegung der algebraischen Formen auf der Graßmann-Mannigfaltigkeit (1971)*
8 Neunhöffer, Helmut: *Über die analytische Fortsetzung der Poincaré-Reihen (1972)*

Wissenschaftliche Veröffentlichungen

Bücher

Lectures on Siegel's Modular Functions (Notes by T.P. Srinivasan). Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1954–1955

Lectures on Modular Functions of One Complex Variable (Notes by Sunder Lal). Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1964; Berlin u.a.: Springer 1983 (rev.)

Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series: Course given at the University of Maryland, 1969–1970. Berlin u.a.: Springer 1971 (Lecture Notes Math., vol. 216)

zus. mit K. Chandrasekharan (Hrsg.): *Carl Ludwig Siegel: Gesammelte Abhandlungen.* Berlin u.a.: Springer – Bände I–III: 1966 – Band IV: 1979

Abhandlungen

[1] *Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen.* Abh. Math. Semin. Hans. Univ. **12** (1937), 64–69

[2] *Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen* (Dissertation, 1. Teil). Abh. Math. Semin. Hans. Univ. **12** (1937), 133–162

[3] *Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen* (Dissertation, 2. Teil). Math. Z. **43** (1938), 709–738

[4] *Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen.* Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, 1940, 2. Abh.

[5] *Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen* (Habilitationsschrift). Math. Ann. **117** (1940), 538–578

[6] *Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper* $R(\sqrt{5})$. Math. Ann. **118** (1941), 65–84

[7] *Über die Darstellung total positiver Zahlen des Körpers* $R(\sqrt{5})$ *als Summe von drei Quadraten.* Abh. Math. Semin. Hans. Univ. **14** (1941), 185–191

[8] *Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum.* Math. Ann. **118** (1942), 312–318

[9] *Theorie der Poincaŕschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der Hilbertschen Modulgruppe.* Math. Ann. **118** (1942), 518–543

[10] *Über automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen.* Berichte über die Math.-Tagung in Tübingen vom 23. bis 27. Sept. 1946 (herausgeg. v. Math. Inst. Univ. Tübingen), 100–102

[11] *Quadratische Formen über quadratischen Körpern.* Math. Z. **51** (1948), 233–254

[12] *Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe.* Math. Z. **51** (1948), 255–261

[13] *Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen.* Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, 1949, 1. Abhandlung

[14] *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen.* Math. Ann. **121** (1949), 141–183

[15] *Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **16** (1949), 72–100

[16] *Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen.* Math. Ann. **122** (1950), 90–108

[17] *Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen.* Math. Ann. **123** (1951), 125–151

[18] *Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen.* Math. Ann. **124** (1951), 87–122

[19] *Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen.* Math. Ann. **125** (1953), 235–263

[20] *Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen.* Math. Ann. **126** (1956), 44–68

[21] *Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen.* Math. Z. **58** (1953), 385–390

[22] *Die Bestimmung der Dirichletreihen mit Größencharakteren zu den Modulformen n-ten Grades.* J. Indian Math. Soc. **19** (1955), 1–23

[23] *Differentialgleichungen und automorphe Funktionen.* Proc. Int. Congress Math. 1954, Amsterdam, Vol. III, 34–39

[24] *Spherical Functions and Quadratic Forms.* J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 117–162

[25] *Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen.* Math. Ann. **134** (1957), 1–32

[26] *Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen.* Math. Ann. **135** (1958), 391–416

[27] *Zur Theorie der harmonischen Formen.* Math. Ann. **137** (1959), 142–149

[28] *Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter.* Math. Ann. **137** (1959), 319–327

[29] *Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik.* Math. Ann. **138** (1959), 287–315

[30] *Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Klasse, 1964, Nr. 11, 125–135

[31] *Über die gleichmäßige Konvergenz der Poincarschen Reihen n-ten Grades.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Klasse, 1964, Nr. 12, 137–144

[32] *Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades.* Mat.-fys. Medd. (udgivet af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab) **34** (1964), Nr. 7

[33] *Modulformen zu indefiniten quadratischen Formen.* Math. Scand. **17** (1965), 41–55

[34] *Some Remarks on Selberg's Zeta Functions.* In: Several Complex Variables I, Maryland 1970, Proc. Intern. Math. Conference., held at College Park, April 6–17, 1970, edited by J. Horvth, Berlin u.a.: Springer 1970 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 155), 122–131

[35] *Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades.* Mat.-fys. Medd. (udgivet af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab) **38** (1972), Nr. 14

[36] *Dirichletsche Reihen und Modulformen zweiten Grades.* Acta Arith. **24** (1973), 225–238

[37] *Indefinite quadratische Formen und Eulerprodukte.* Comm. Pure Applied Math. **24** (1976), 689–699

[38] *Konstruktion von Spitzenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen.* Math. Ann. **226** (1977), 275–284

[39] *Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades.* Math. Ann. **232** (1978), 163–175

[40] *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades.* Invent. math. **52** (1979), 95–104

[41] *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (II).* Invent. math. **53** (1979), 249–253

[42] *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (III).* Invent. math. **53** (1979), 255–265

[43] *Über ein Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa.* Invent. math. **60** (1980), 85–104

[44] *Harmonische Formen in einer Matrixvariablen.* Math. Ann. **252** (1980), 133–140
[45] *Über eine Kennzeichnung der „Koecherschen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung".* Math. Ann. **260** (1982), 119–131

Vorlesungsmanuskripte

(Mathematisches Institut der Universität Heidelberg)
1. Analytische Zahlentheorie I, SS 1950
2. Analytische Zahlentheorie II, WS 1950/51
3. Algebraische Zahlen, WS 1950/51
4. Funktionentheorie I, WS 1948/49
5. Funktionentheorie II, SS 1949
6. Funktionentheorie III, WS 1949/50
7. Algebraische Funktionen, SS 1948
8. Differentialgleichungen I, WS 1951/52
9. Differentialgleichungen II, SS 1952

Rolf Busam
Mathematisches Institut
Ruprecht-Karls-Universität
Im Neuenheimer Feld
D-69120 Heidelberg
busam@mathi.uni-heidelberg.de

Eberhard Freitag
Mathematisches Institut
Ruprechts-Karls-Universität
Im Neuenheimer Feld 288
D-69120 Heidelberg
freitag@mathi.uni-heidelberg.de

(Eingegangen: 12. 5. 1999)

Buchbesprechungen

Lorentz, G. G., Mathematics from Leningrad to Austin, Selected Works in Real, Functional and Numerical Analysis, Vol. 1 and 2, R. A. Lorenz (Ed.) Boston u. a.: Birkhäuser 1997, Bd 1: 548 S., Bd 2: 648 S., DM 358,–

Der Name George G. Lorentz steht für Originalität, Tiefe, Eleganz, das endgültige Klären von Phänomenen, didaktische Meisterschaft und vieles mehr. Eine neue Faszination geht von seinen Arbeiten aus, wenn man sie als Spuren auf einem langen Weg sieht, der von Leningrad über Tübingen, Frankfurt, Toronto, Detroit und Syracuse nach Austin führt, mit Beteiligten, die uns inzwischen längst als hochrangige Wissenschaftler bekannt sind, und mit den politischen Wogen unseres Jahrhunderts als Hintergrund.

Die vorliegenden zweibändigen ausgewählten Werke widmen sich vier Themenkreisen, je zwei pro Band, wobei etwa zwei Drittel der Forschungsarbeiten von G. G. Lorentz reproduziert werden. Zu jedem Themenkreis gehört eine Einführung, in der die zugehörigen Arbeiten vorgestellt und ihr Einfluß auf die weitere Entwicklung des Gebiets aufgezeigt werden. Band 1 beginnt mit einer Einleitung von R. A. Lorentz; es folgen eine Autobiographie, eine vollständige Bibliographie, eine Liste der Doktoranden und vier bisher unveröffentlichte Aufsätze von allgemeinem mathematischen Interesse. Am Anfang von Band 2 steht nochmals die vollständige Bibliographie; ihr schließt sich eine Besprechung der Bücher von Lorentz an. In beiden Bänden befinden sich einige Fotos aus dem Leben von Lorentz. Wir wollen uns nun den vier Themenkreisen zuwenden.

Im Teil I von Band 1 werden unter dem Titel *Summability and Number Theory* nach einer Einführung von Baron und Leviatan 24 Arbeiten präsentiert, die sich mit Matrixverfahren, Fast-Konvergenz, Taubersätzen, Umordnung, Vergleichssätzen, Orthogonalreihen und etwas Zahlentheorie beschäftigen. Darunter befindet sich die erste Lorentzsche Arbeit, geschrieben 1931 in Leningrad. Aufgrund der Schwierigkeiten im kommunistischen Rußland und dem beginnenden Krieg kann Lorentz jedoch seine volle Produktivität erst in der Tübinger Zeit (1942–1949) entfalten, wo er Zusammenarbeit mit K. Knopp hat und später mit K. L. Zeller einen hervorragenden Schüler für die Limitierungstheorie gewinnt. Dieser Forschungsschwerpunkt bestimmt auch noch sehr seine Zeit in Toronto (1949–1953). Mit seiner Übersiedlung nach Detroit (1953–1958) möchte sich Lorentz von der Limitierungstheorie trennen. Trotzdem folgen noch bis in die Austiner Zeit hinein zahlreiche weitere Arbeiten zu diesem Gebiet; acht davon wurden in den vorliegenden Band aufgenommen, darunter fünf elegante Arbeiten mit Zeller. Zu den letzten drei bemerkt Lorentz selbst, daß sie einfache fundamentale Fragen beantworten, die eigentlich am Anfang der Theorie hätten stehen müssen.

Teil I enthält ferner zwei zahlentheoretische Arbeiten aus der Detroiter Zeit, von denen die eine ein Problem von Paul Erdős löst, während die andere in Zusammenarbeit mit Erdős entstanden ist.

Teil II von Band 1 trägt den Titel *Interpolation.* Nach einer Einführung von Riemenschneider folgen 22 Arbeiten über Birkhoff-Interpolation. Dieses Gebiet mag als wenig attraktiv gegolten haben, da der initiale Beitrag von Birkhoff (1906) nur mäßige Resonanz fand. Es erwachte erst mit einer Arbeit von Schoenberg (1966) und anschließenden Beiträgen von Atkinson & Sharma (1969) und Ferguson (1969). Der Einstieg von Lorentz erfolgt in seiner Austiner Zeit, als er in einer gemeinsamen Arbeit mit Zeller die Birkhoff-Interpolation als Hilfsmittel benutzt. Sobald sein Interesse entflammt ist, dringt er zu den wesentlichen Phänomenen vor und kann bald die vorhandenen Ergebnisse vereinfachen und die Theorie mit neuen tiefen Erkenntnissen und letztlich auch leistungsfähigen Begriffen und Bezeichnungen bereichern. Später wendet er sich auch Birkhoff-Quadraturformeln, Erweiterungen von Polynomen auf Splines und mehrdimensionalen Problemen zu. An Mitarbeitern sind vor allem Zeller, Riemenschneider und sein Sohn R. A. Lorentz zu nennen.

Teil I von Band 2 bringt unter dem Titel *Real and Functional Analysis* eine Auswahl von 18 Arbeiten, denen eine Einführung durch Bennett vorangestellt ist. Die Begegnung mit Kamke führt zu zwei Arbeiten über das Dirichlet-Prinzip. Ebenfalls in der Tübinger Zeit wird eine schon in Leningrad geschriebene Arbeit über Verbände veröffentlicht, und schließlich wird mit der Arbeit „A problem of plane measure" ein wichtiger Grundstein gelegt, auf dem in der Torontoer Zeit Verallgemeinerungen der L^p-Räume aufbauen, die inzwischen nach Lorentz benannt sind. Diese und die aus der Zeit in Detroit und Syracuse sich anschließenden Beiträge über Funktionenräume erlangten enorme Bedeutung in Verbindung mit Arbeiten von Luxemburg, Calderón und anderen und gaben Anstoß für zahlreiche weitere Untersuchungen. Drei gemeinsame Arbeiten mit Shimogaki repräsentieren die Beiträge zur Interpolation von Operatoren. Teil I schließt mit zwei funktionalanalytischen Arbeiten aus den achtziger Jahren, in denen neue Beweise für bekannte Ergebnisse gefunden wurden, sowie mit einem Artikel über Zygmund und sein Werk.

Der letzte und umfangreichste Teil widmet sich der *Approximationstheorie.* Nach einer Einführung von Berens folgt eine Auswahl von 32 Arbeiten. Es mag erstaunen, wenn Lorentz in seiner Autobiographie bemerkt, daß er noch nichts über Approximationstheorie wußte, als er 1958, am Ende seiner Zeit in Detroit, damit begann, sich mit Hilfe der Arbeiten von Kolmogorov in dieses Gebiet einzuarbeiten. Tatsächlich enthält die Auswahl nur drei frühere Arbeiten: je eine über Stieltjes-Landau-Polynome und Bernstein-Polynome aus der Leningrader Zeit und eine weitere über Bernstein-Polynome, geschrieben in Toronto. Alle anderen präsentierten Beiträge stammen aus der Zeit ab 1960. Darunter befinden sich Arbeiten mit Zeller über monotone Approximation, Arbeiten mit Berens über Korovkin-Sätze und Bernstein-Polynome, Arbeiten über Entropien, n-te Weiten und Superposition von Funktionen, Beiträge zu Bernstein- und Markoff-Ungleichungen z. T. mit v. Golitschek und Arbeiten über unvollständige Polynome.

Mit der Sorge, etwas versäumt zu haben, hält man am Ende Ausschau nach dem Drittel von Arbeiten, die nicht in das vorliegende Werk aufgenommen wurden. Darunter befindet sich z. B. eine Arbeit über Entropie, n-te Weiten und Superposition von Funktionen, die von der Mathematical Association of America als bester Artikel im Amer. Math. Monthly des Jahres 1962 ausgezeichnet wurde.

Wir wollen nun noch ein paar Bemerkungen zu einigen der anderen eingangs erwähnten Beiträge machen. Der von Erdélyi und Nevai stammende Artikel über die Bücher von Lorentz (Band 2) beginnt mit sehr persönlich gefärbten Reminiszensen der Autoren. Danach folgen umfangreiche Besprechungen der folgenden Werke: *Bernstein Polynomials* (1953, 2. Aufl. 1988), *Approximation of Functions* (1966), *Problems in Approximation Theory* (1977), *Birkhoff Interpolation* (mit Jetter und Riemenschneider, 1983), *Constructive Approximation* (mit deVore, 1993) und *Constructive Approximation, Advanced Problems* (mit v. Golitschek und Makovoz, 1996).

Der Abschnitt mit Artikeln von allgemeinem mathematischen Interesse (Band 1) beginnt mit einem Bericht über die Universität Leningrad, geschrieben in den vierziger Jahren. Er ist ein wertvolles geschichtliches Dokument über den Universitätsbetrieb im kommunistischen Rußland. Insbesondere enthält er einen vollständigen Vorlesungskatalog des mathematischen Instituts vom Jahr 1936. Die anderen drei Artikel tragen die Titel *On the Work of the Mathematical Mind, Proofs in Mathematics* und *Writing Mathematical Books.* Mit ihnen vermittelt Lorentz interessante Einsichten in das Wesen der Mathematik, die Denk- und Arbeitsweise des Mathematikers sowie in Entwurf und Gestaltung von Büchern mit Bezug auf die eigenen Werke.

Um dem wissenschaftlichen Werk Priorität zu geben, haben wir uns einen Kommentar zur Einführung von R. A. Lorentz und zur Autobiographie für den Schluß aufgehoben. Diese Artikel stehen jedoch am Anfang von Band 1 und sollten auch zuerst gelesen werden, denn sie geben dem vorliegenden Werk seinen besonderen, einmaligen Charakter. Sie zeigen uns, daß hinter der geraden mathematischen Linie ein Mensch steht, der durch die Tiefen und Höhen unseres Jahrhunderts ging, dem Flüchtlingsschicksal und Nachkriegselend nicht erspart blieben; – ein Mann mit drei Leben, in Rußland, Deutschland und Nordamerika, mit der Mathematik als gemeinsamen Inhalt, wie es sein Sohn Rudolph ausdrückt.

Ein kleiner, eher ästhetischer Mangel sei nicht verschwiegen, um ihn dem Verlag anzulasten mit der Hoffnung auf künftige Besserung. Während die Forschungsarbeiten von Lorentz als Kopien der Originaltexte übernommen wurden, hat in den neu geschaffenen Partien der Fehlerteufel sichtbar zugeschlagen. Die korrekte Übertragung von deutschen Titeln in das Inhaltsverzeichnis ist öfters mißlungen; gelegentlich sind Seitenangaben falsch; man findet Wortverdoppelungen – ein Fehlertyp des Computerzeitalters; gegen die Maxime von Lorentz „we owe the author of a paper we use the simple politeness of not misspelling his name“ wird verstoßen; fehlerhafte Zahlenangaben führen zu kuriosen Aussagen: „He“ (*Anm.* geboren 1910) „retired in 1980, at the age of eighty.“, um nur ein Beispiel zu nennen. Ist etwa das Korrekturlesen einer Rationalisierungsmaßnahme des Verlags zum Opfer gefallen?

Das Werk sollte in keiner mathematischen Institutsbibliothek fehlen. Es ist ferner Liebhabern der klassischen Analysis, Anhängern der einschlägigen Arbeitsgebiete, aber auch historisch, biographisch und allgemein-mathematisch Interessierten wärmstens zu empfehlen.

Erlangen G. Schmeißer

Motohashi, Y., Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function (Cambridge Tracts in Mathematics, 127), Cambridge University Press 1997, 228 S., £29.95

Die Theorie der Riemannschen Zetafunktion, die der Kloostermanschen Summen und die Beziehung zwischen den beiden ist das Thema dieses Buches. Die Riemannsche Vermutung hat in der Theorie der Riemannschen Zetafunktion und bei ihren Anwendungen in der Zahlentheorie eine leitende Funktion, weil ihre Korrektheit oder Nichtkorrektheit sich in einer großen Vielfalt von anderen Aussagen wiederspiegelt. Nicht nur diese Vermutung, sondern auch eine Reihe anderer schwächerer Vermutungen, widerstrebt allen Versuchen eines Beweises. Die erste im Rang hinter der Riemannschen Vermutung ist die Lindelöfsche Vermutung, nämlich die Behauptung, daß für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(|t|^\epsilon)$ für $|t| \to \infty$. Diese Vermutung läßt sich in eine Reihe noch „schwächerer“ Vermutungen zerlegen, die durch eine natürliche Zahl k parametrisiert werden. Die k.te Vermutung behauptet, daß für $T \to \infty$ gilt: $T^{-1} . \int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^k dt = O(|T|^\epsilon)$. (Es würde reichen, wenn die Abschätzung für eine unendliche Folge von k's gelten würde.) Bei diesen Vermutungen kann man auch nur ernüchterend wenig beweisen; in den Fällen $k = 2, 4$ sind asymptotische Formeln bekannt und im Falle $k = 12$ gibt es eine relativ scharfe Abschätzung von D.R. Heath-Brown. Die klassische Art, Probleme dieser Art zu behandeln, besteht darin, die Funktionen mit Hilfe der „approximate functional equation“/Riemann-Siegel Formel durch eine endliche Summe anzunähern und mit Mitteln der Theorie exponentieller Summen das Integral abzuschätzen zu versuchen.

Das Ziel von diesem Buch liegt darin, diese Probleme in Zusammenhang mit der Theorie der Kloostermanschen Summen zu bringen. Kloostermansche Summen sind Exponentialsummen von der Art:

$$S(a,b;c) = \sum_{x,y \bmod c,\ xy\equiv 1 \bmod c} \exp(2\pi i(ax+by)/c).$$

Kloosterman ist 1927 auf diese Summen gestoßen, als er die Darstellung von natürlichen Zahen durch quadratische Formen untersucht hat. Schon am Anfang treten sie in Zusammenhang mit Modulformen auf. Ein weiterer Zusammenhang wurde von A. Selberg und R. Bruggemann entdeckt. Es ist aber N.V.Kuznetsov zu verdanken, daß diese Beziehung, eine Summationsformel mit einer äußerst komplizierten Kernfunktion, nützlich geworden ist. Sie liefert eine „Dualität“ zwischen automorphen Formen und Kloostermanschen Summen, die dem Zusamnenhang zwischen Primzahlen und Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion (die „expliziten Formel der Primzahltheorie“) ähnelt. Die Kuznetsovsche Summationsformel kann entweder dazu benutzt werden, die Gesamtheit der automorphen Formen (unter, z.B., $SL(2,\mathbf{Z})$) zu untersuchen, oder die Kloostermanschen Summen asymptotisch zu analysieren. Die ersten drei Kapitel dieses Buches beschreiben in einer effizienten und gut verständlichen Weise die Kuznetsovsche Theorie. Sie ist jetzt wesentlich einfacher und zugänglicher als die ursprüngliche Fassung und steht allen, die auf dem Gebiet der analytischen Zahlentheorie arbeiten, jetzt zur Verfügung.

In den letzten zwei Kapitel geht Motohashi auf sein eigentliches Anliegen ein. Es handelt sich hier um die Anwendung der Kuznetsovschen Formel in der Theorie der Riemannschen Zetafunktion, die auch den Titel des Buches rechtfertigt. Er untersucht Integrale der Gestalt $\int_{-\infty}^{\infty} \mid \zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t) \mid^4 g(t)dt$ mit geeigneten Funktionen g. Mit den klassischen Mitteln der analytischen Zahlentheorie zeigt er, daß diese durch Summen, in denen Kloostermanschen Summen erscheinen, ausgedrückt werden können. Die Kuznetsovsche Formel liefert, mit viel Mühe, eine komplizierte aber brauchbare Formel für diese Integrale, in der Daten der Gesamtheit der automorphen Formen auf $SL(2,\mathbf{Z})$ erscheinen. In diesem Zusammenhang heißt „brauchbar“, daß die Formel dazu verwendet werden kann, um Abschätzungen für $T^{-1}\int_0^T |\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)|^4 dt$ und verwandte Ausdrücke zu gewinnen. Der Verfasser bekommt solche im letzten Kapitel. Er kann, z.B., beweisen, daß $\int_1^{\infty} \mid \zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t) \mid^4 t^{-\omega}dt$ eine analytische Fortsetzung in ω als meromorphe Funktion besitzt. Er zeigt auch, daß die Polstellen in enger Verbindung mit den automorphen Formen auf $SL(2,\mathbf{Z})$ stehen. Er betont, daß diese Analysis ohne Approximationen von der Art der „approximate functional equation“/Riemann-Siegel Formel auskommt. Sie ist in diesem Sinne intrinsischer als die klassischen Methoden. Sie ist aber, wenigstens heute, eng mit dem vierten Potenz verbunden. Ein Grund dafür liegt darin, daß der n.te Koeffizient von $\zeta(s)^2$ die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $xy = n$ darstellt, so daß ein Zusammenhang mit der ursprünglichen Arbeit von Kloosterman besteht. Motohashi stellt einige Überlegungen an, wie das größere Bild aussehen soll.

Wie die obige Beschreibung zeigt, ist das hauptsächlich neue (in Buchformat) in dieser Monographie die explizite Formel für $\int_{-\infty}^{\infty} \mid \zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t) \mid^4 g(t)dt$. Es gibt andere Darlegungen der Kuznetsovschen Theorie vom Standpunkt der analytischen Zahlentheorie (z. B. M. N. Huxley, *An Introduction to Kloostermania*, Elementary and Analytic Theory of Numbers, Banach Centre Publ. 17, 1985, 217–306, Polish Science Publishers, Warsawa), obwohl die hiesige Darstellung einige positive Besonderheiten aufweist, die sie wertvoll macht. Die Hauptthese des Buches ist die fundamentale Natur der Darstellung von $\int_{-\infty}^{\infty} \mid \zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t) \mid^4 g(t)dt$, und die Leserschaft wird aus denjenigen bestehen, die entweder von dieser These überzeugt sind, oder wenigstens sich mit ihr auseinandersetzen wollen.

Göttingen S. J. Patterson

Katok, A., Hasselblatt, B., Modern Theory of Dynamical Systems, (Encycl. of Math. and its Appl. Vol. 543) Cambridge University Press 1997, Paperback 802 S., £ 30.-

Das Buch hat einen anspruchsvollen Titel und eine beeindruckende Länge. Da möchte man an etwas lehrbuchhaft Enzyklopädisches denken, mit dessen Hilfe man umfassende Informationen über und Einsichten in die vielfältigen Aspekte dynamischer Syteme erhält, obwohl man weiß, daß angesichts der Masse gegenwärtigen Wissens so etwas schier unmöglich ist. Deshalb muß man den Autoren nachsehen, daß sie eine Reihe von Gebieten wie z.B. die komplexe Dynamik fast ganz und den Lorenz-Attraktor völlig aussparen und, je mehr es in die Tiefe geht, desto mehr das Feld ihrer eigenen Forschung in den Vordergrund rücken. Gehen wir ins Detail. In Einleitung und Teil 1 werden die Grundbegriffe und Grundtatsachen über dynsamische Systeme an Hand von vielen Beispielen und Übungsaufgaben eingeführt und erklärt. Die Stoffauswahl möge durch Wiedergabe des relevanten Teils des Inhaltsverzeichnisses illustriert werden: *Introduction:* Principal branches of dynamics – Flows, vector fields, differential equations – Time-one map, section, suspension – Linearization and localization. **Part 1 Examples and fundamental concepts** *First examples:* Maps with stable asymptotic behavior – Linear maps – Rotations of the circle – Translations on the torus – Linear flow on the torus and completely integrable systems – Gradient flows – Expanding maps – Hyperbolic toral automorphisms – Symbolic dynamical systems. *Equivalence, classification, and invariants:* Smooth conjugacy and moduli for maps – Smooth conjugacy and time change for flows – Topological conjugacy, factors, and structural stability – Topological classification of expanding maps on a circle – Coding, horseshoes, and Markov partitions – Stability of hyperbolic toral automorphisms – The fast converging iteration (Newton method) for the conjugacy problem – The Poincaré-Siegel Theorem – Cocycles and cohomological equations. *Principal classes of asymptotic topological invariants:* Growth of orbits – Examples of calculation of topological entropy – Recurrence properties. *Statistical behavior of orbits and introduction to ergodic theory:* Asymptotic distribution and statistical behavior of orbits – Examples of ergodicity; mixing – Measure-theoretic entropy – Examples of calculation of measure-theoretic entropy – The variational principle. *Systems with smooth invariant measures and more examples:* Existence of smooth invariant measures – Examples of Newtonian systems – Lagrangian mechanics – Examples of geodesic flows – Hamiltonian systems – Contact systems.

Es ist sinnvoll in dieser Besprechung, nun gleich **Part 3 Low-dimensional phenomena** des Buches anzuschließen, weil hier auch noch allgemeine Grundlagen erörtert werden, die teils fester Bestandteil der klassischen Lehrbuchliteratur sind, teils in Zukunft zur Lehrbuchliteratur gehören sollten. Dazu lesen wir im Inhaltsverzeichnis: *Homeomorphisms of the circle:* Rotation number – The Poincaré classification. Circle diffeomorphisms: The Denjoy theorem – The Denjoy example – Local analytic conjugacies for Diphantine rotation number – Invariant measures and regularity of conjugacies – An example with singular conjugacy – Fast-approximation methods – Ergodicity with respect to Lebesgue measure. *Twist maps:* The regularity lemma – Existence of Aubry-Mather sets and homoclinic orbits – Action functionals, minimal and ordered orbits – Orbits homoclinic to Aubry-Mather sets – Nonexistence of invariant circles and localization of Aubry-Mather sets. *Flows on surfaces and related dynamical systems:* Poincaré-Bendixson theory – Fixed-point-free flows on the torus – Minimal sets – New phenomena (The Cherry flow; Linear flow on the octagon) – Interval exchange transformations – Applications to flows and billiards – Generalizations of rotation number. *Continuus maps on the interval:* Marcov covers and partitions – Entropy, periodic orbits, and horseshoes – The Sharkovsky Theorem – Maps with zero topological entropy – The kneading theory – The tend model. *Smooth maps of the interval:* The structure of hyperbolic repellers – Hyperbolic sets for smooth maps – Continuity of entropy – Full families of unimodal maps.

Die restlichen Teile **Part 2 Local analysis and orbit growth, Part 4 Hyperbolic dynamical systems** und **Supplement** bilden eine kompetente Darstellung der hyperbolischen Theorie mitsamt den erforderlichen Hilfsmitteln. Im Einzelnen kommen zur Sprache: *Local hyperbolic theory and its application:* Stable and unstable manifolds – The Hartman-Grobman Theorem – Hyperbolic sets – Homoclinic points and horseshoes – Local smooth linearization and normal forms. *Transversality and genericity:* Residual sets and sets of first category – Transverse fixed points – The Kupka-Smale Theorem – Structurally stable bifurcations – Hopf bifurcations – The theorem of Artin and Mazur. *Orbit growth arising from topology:* Topological and fundamental-group entropies – A survey of degree theory – Index theory for an isolated fixed point – The Shub-Sullivan Theorem – The Lefshetz Fixed-Point Formula and applications – Nielsen theory and periodic points for toral maps. *Variational aspects of dynamics:* Critical points of functions, Morse theory, and dynamics – The billiard problem – Twist maps – Variational description of Lagrangian systems – Local theory and the exponential map – Minimal geodesics – Minimal geodesics on compact manifolds. *Survey of examples:* The Smale attractor – The DA (derived from Anosov) map and the Plykin attractor – Expanding maps and Anosov automorphisms of nilmanifolds – Definitions and basic properties of hyperbolic sets for flows – Geodesic flows on surfaces of constant negative curvature – Geodesic flows on compact Riemannian manifolds with negative sectional curvature – Geodesic flows on rank-one symmetric spaces – Hyperbolic Julia sets in the complex plane. *Topological properties of hyperbolic sets:* Shadowing of pseudo-orbits – Stability of hyperbolic sets and Markov approximation – Spectral decomposition and specification – Local product structure – Density and growth of periodic orbits – Global classification of Anosov diffeomophisms on tori – Markov partitions. *Metric structure of hyperbolic sets:* Hölder structures – Cohomological equations over hyperbolic dynamical systems. *Equilibrium states and smooth invariant measures:* Bowen measure – Pressure and the variational principle – Uniqueness and classification of equilibrium states – Smooth invariant measures – Margulis measure – Multiplicative asymptotic for growth of periodic orbits. *Dynamical systems with nonuniformly hyperbolic behavior:* Lyapunov exponents – Regular neighborhoods – Hyperbolic measures – Entropy and dynamics of hyperbolic measures.

Forschende auf dem Gebiet der hyperbolischen Theorie wird das vorliegende Buch ein unentbehrliches Hilfsmittel sein, während es sich für Forschende auf anderen Gebieten der dynamischen Systeme als wichtiges Nachschlagewerk erweisen dürfte.

Es war das Anliegen der Autoren, das Buch auch für Studenten (undergraduates) nützlich zu machen. Zu diesem Zweck schrieben sie noch einen Anhang von knapp vierzig Seiten mit Definitionen, Sätzen und Erläuterungen aus folgenden Gebieten: Basic topology – Functional analysis – Differentiable manifolds – Differential geometry – Topology and geometry of surfaces – Measure theory – Homology theory – Lie groups. Ich habe Zweifel, ob das als Hintergrund für das Verständnis des Buches ausreicht. Aber vieleicht ersetzen die mehr als vierhundert Übungsaufgaben mit Lösungsanleitung das Fehlende an theoretischen Vorkenntnissen.

Insgesamt stellt dieses Buch eine überwältigende Leistung dar, und alle an dynamischen Systemen Interessierten werden darin etwas sie Anregendes finden.

Mainz

H. Rüßmann

Witting, H., Müller-Funk, U., Mathematische Statistik II, Stuttgart: Teubner 1995, 803 S., DM 128,–

Das vorliegende Buch ist der zweite Band einer auf drei Bände angelegten Reihe über Mathematische Statistik. Das Thema dieses Bandes ist die Asymptotische Statistik.

Die Theorie zum finiten Stichprobenumfang des ersten Bandes (1985) wird hier fortgeführt. Das Buch bietet eine einheitliche und umfassende Darstellung aktueller Forschungsergebnisse und deren Anwendungen. Neben der Darstellung klassischer Themen werden viele neuere Entwicklungen der Asymptotik aufgegriffen, die in dieser Form erstmals in der Lehrbuchliteratur vorgestellt werden. Das Buch beginnt mit dem (aus Band I fortlaufend numerierten) Kapitel 5, in dem Grundlagen und Grenzwertsätze für Zufallsvariablen bereitgestellt werden. Hier findet man z.B. exponentielle Schranken (im Sinne von Chernoff) für Schätzfehler und Fehlerwahrscheinlichkeiten zweiter Art. Die Grenzwertsätze sind auf die Bedürfnisse der Statistik zugeschnitten und gehen zum Teil deutlich über den üblichen Stoff eines Buches über Wahrscheinlichkeitstheorie hinaus. Behandelt werden z.B. quadratische Formen von Zufallsvariablen und deren (asymptotische) Spektralzerlegung. Die Beweise werden in der Regel völlständig ausgeführt, so z.B. auch für die Berry-Esseen Schranke des zentralen Grenzwertsatzes.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit der Ableitung asymptotisch optimaler Schätz- und Testverfahren. Viele Standardverfahren der Statistik erfahren in diesem Rahmen eine Rechtfertigung. Bekanntlich liegt ja eine finite Optimalität nur in wenigen Modellen – etwa für Exponentialfamilien – vor. In der Praxis treten häufig Modellapproximationen auf, die mit der Asymptotik behandelt werden können.

Im folgenden wird eine Theorie entwickelt, die nicht für jede einzelne Verteilung Grenzwertsätze anwendet, sondern auf Modellapproximationen zugeschnitten ist. Eine wesentliche Rolle spielt hierbei die Untersuchung der Asymptotik von Dichtequotienten, die die Koppelung der einzelnen Verteilungen untereinander berücksichtigt. Im Mittelpunkt steht die lokale Betrachtungsweise der Statistik, die durch die lokale asymptotische Normalität (LAN) von Modellen und durch den Übergang zu Gaußschen Limesexprimenten gegeben ist. Dieser Gedanke zieht sich wie ein roter Faden durch das ganze Kapitel. Es wird gezeigt, daß dieses Hilfsmittel eine einheitliche Sichtweise der Asymptotik liefert und auf viele verschiedene Fragestellungen anwendbar ist. Im Zentrum stehen die drei Lemmata von Le Cam, die eine Lösung der Entscheidungsprobleme im Limesexperiment erlauben. Hieraus lassen sich dann Risikoschranken und gegebenenfalls optimale Verfahren ableiten. Der Statistiker erhält damit ein Instrument, das den (asymptotischen) Vergleich konkurrierender Schätz- und Testverfahren erlaubt. Zu nennen sind hier die asymptotische relative Effizienz (ARE) von Test- und Schätzfolgen, der Faltungssatz von Hájek für reguläre Schätzfolgen und die lokale asymptotische Minimax-Schranke. Das Buch glänzt durch eine Fülle sorgfältig ausgearbeiteter Beispiele. Gezeigt wird z. B. die Effizienz von Maximum-Likelihood Schätzern.

Breiten Raum nimmt ferner die Darstellung von Testproblemen (mit und ohne Nebenparametern) ein. Der Paragraph 6.4.1 enthält den Hauptsatz der Testtheorie, der z. B. eine einheitliche Ableitung von Likelihoodquotiententests, χ^2-Tests und weiterer Score Tests (etwa für Regressionsmodelle) als maximin (oder optimale) Tests erlaubt. Neu in der Lehrbuchliteratur ist ebenfalls die konsequente Behandlung der Tests unter Nebenparametern im Rahmen der LAN-Theorie.

Das Kapitel 7 behandelt nichtparametrische Funktionale und deren Schätzer. Bekanntlich übernehmen in der Nichtparametrik Funktionale die Rolle der Parameter. Diese Sichtweise entwickelt viele interessante Ansätze und kann als zukunftsweisend angesehen werden. Dargestellt werden zunächst verschiedene Funktionale und Ordnungsgrößen sowie deren Eigenschaften: Von Mises (V) Funktionale, quadratische Funktionale, Abhängigkeitsfunktionale, Maßzahlen der Symmetrie. Danach wird die asymptotische Theorie für adäquate Schätzerklassen entwickelt, z. B. für L-, M-, U-, und V-Statistiken. Wesentliche Hilfsmittel bilden die Hájek'sche Projektionsmethode, die Hoeffdingzerlegung sowie U-Statistiken, die auch für Zweistichprobenprobleme behandelt werden. Als Anwendung erhält man z. B. die asymptotische Normalität linearer Rangstatistiken. Es schließt sich eine Diskussion der asymptotischen Effizienz von L-Statistiken für Lokations-Skalenmodelle an. Die benötigten analytischen Hilfsmittel sind in einem Anhang zusammengefaßt.

Das vorliegende Buch dürfte sich zu einem Standardlehrbuch über asymptotische Statistik entwickeln, das bestens für fortgeschrittene Vorlesungen, Seminare und für die Ausbildung von Doktoranden geeignet ist. In verständlicher Form werden neuere Entwicklungen einem breiten Leserkreis erschlossen und zugänglich gemacht. Die beiden bislang erschienenen Bände sind ebenfalls wertvolle Nachschlagewerke für Forscher. Auch unter Praktikern wünsche ich dem Buch weite Verbreitung. Für die Praxis wird anhand der vielen Anwendungsbeispiele deutlich, welche statistischen Verfahren zu welchen Modellen passen. Die Gemeinschaft der Stochastiker muß sich bei den Autoren dafür bedanken, daß sie einen Kernbereich der Statistik für uns aufbereitet und durch ihre eigenen Beiträge erweitert haben.

Wir warten alle gespannt auf den nächsten Band III, der sich mit nichtparametrischen Schätz- und Testproblemen befassen wird.

Düsseldorf A. Janssen

Chabrowski, J. H., Variational Methods for Potential Operator Equations (de Gruyter Studies in Mathematics 24), Berlin: de Gruyter 1997, 290 S., DM 189,–

Ausgehend von der klassischen Aufgabenstellung, Maxima und Minima von Funktionalen zu bestimmen, haben sich Variationsmethoden in den vergangenen Jahrzehnten zunehmend verfeinert und finden heute ihre Anwendung zum Beispiel bei der Behandlung von Randwertaufgaben für (nicht lineare) partielle Differentialgleichungen, der Untersuchung Hamiltonscher Systeme oder auch bei geometrischen Fragestellungen wie etwa der Beschreibung geschlossener Geodätischer und dem Studium von harmonischen Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
Stark vereinfacht gliedern sich Variationsmethoden in die Bereiche „direkte Verfahren" (Minimieren ggf. unter Nebenbedingungen) und „global-analytische Techniken" (Stichworte sind Lusternik-Schnirelman und Morse Theorie, Mountain Pass Theorem, etc.), wo man sich neben der Existenz auch für die Art und Anzahl von kritischen Punkten interessiert.

Während die Monographien von Struwe [1] und Zeidler [2] Variationsmethoden an sich vorstellen und ihre Anwendungsmöglichkeiten auf durchaus thematisch verschiedene Problemkreise schildern, konzentriert sich das vorliegende Buch ganz darauf, das Spektrum der Variationsmethoden am Beispiel der Potentialoperatorgleichungen zu entfalten. Exemplarisch sei hier die Eigenwertgleichung

$$(1) \qquad A(u) = \lambda B(u)$$

für Potentialoperatoren $A, B : X \to X^*$ auf einem Banachraum X erwähnt, d.h. A und B entstehen durch Gradientenbildung aus skalaren Potentialen a bzw. b, wobei im ersten Kapitel beide Operatoren zusätzlich als homogen angenommen werden. Unter dem Stichwort Minimieren bei Nebenbedingungen wird (1) auf die Diskussion von

$$a(u) \to min, \; b(u) = 1$$

reduziert, Anwendung finden die erzielten Ergebnisse auf das Problem, nicht-triviale Lösungen von

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = r|u|^{q-2} = u \;\text{ auf } \mathbb{R}^n$$

mit $2 \leq p < n$, $r \in L^1_{loc}, p < q < \frac{np}{n-p}$ zu konstruieren, wenn Δ_p den p-Laplace Operator bezeichnet.
Kapitel 2 widmet sich der Lusternik-Schnirelman Theorie: Nach der abstrakten Formulierung und einigen einfachen Beispielen wird die Eigenwertgleichung

$$-\Delta u_p + |u|^{p-2}u = \lambda r|u|^{p-2}u \text{ auf } \mathbb{R}^n$$

diskutiert und ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Eigenfunktionen angegeben.
Kapitel 3 vertieft die vorstehenden Fragestellungen auf den Fall, daß einer der beteiligten Operatoren nicht homogen ist, in Kapitel 4 wird die Technik des Minimierens unter Nebenbedingungen ausgedehnt auf Potentiale, die gewisse Kovarianzbedingungen unter einer gegebenen Gruppe erfüllen.
Kapitel 5 behandelt Minimierungsverfahren zur Lösung von parameterabhängigen Gleichungen, der Leser findet eine genaue Analyse, die auf der level-set Methode basiert.
Das Mountain-Pass Theorem wird in den Kapiteln 6 und 7 verschärft, und zwar zunächst in Form der Hampwile Alternative, anschließend findet man Versionen für Lipschitz Funktionale, die auf dem Konzept des verallgemeinerten Gradienten von Clarke beruhen.
Die beiden letzten Kapitel adressieren Variationsprobleme in Sobolev Räumen für den kritischen und subkritischen Fall, vorgestellt werden die concentration-compactness Prinzipien von P.L. Lions. Soweit die kurze Inhaltsübersicht.

Das Buch gibt insgesamt eine vollständige Darstellung der klassischen und auch aktuellen Resultate, die mit Variationsmethoden auf dem Gebiet der Potentialoperatorgleichungen erzielt worden sind. Bedingt durch den Gegenstand, der in seiner Ausführung oftmals sehr technisch ist, wirkt die Schilderung teilweise trocken, allerdings ist der Autor auch um große Sorgfalt bemüht, d.h. die Beweise sind verläßlich und abgesehen von offensichtlichen Modifikationen vollständig ausgeführt. Jedes Kapitel wird durch „bibliographical notes“ abgerundet: Der Leser erfährt hier mehr über die Geschichte des Problems sowie über weiterführende Literatur, insgesamt umfaßt das Literaturverzeichnis knapp 250 Titel. Der potentielle Leserkreis ist recht groß: Da fast alle Begriffsbildungen zumindest kurz angerissen werden (etwa Sobolev Räume im Appendix A1), eignet sich das Buch als Lehrbuch für fortgeschrittene Semester oder auch zur Durchführung eines Seminars. Die Monographie bringt den Leser sehr schnell an den Rand der laufenden Forschung, so daß jeder auf den Gebieten Partielle Differentialgleichungen oder Variationsrechnung arbeitende Forscher sich durch Einstieg an entsprechender Stelle gut informieren kann.

Als Quelle über die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Variationsmethoden ist die Monographie von Chabrowski jedoch nicht zu verstehen, hier leisten die Werke von Struwe und Zeidler bessere Dienste.

[1] Struwe, M.: Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Second Edition. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1996
[2] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications III Variational Methods and Optimization. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1984

Saarbrücken M. Fuchs

Harten, F., Meyerthole, A., Schmitz, N., Prophetentheorie (Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik), Stuttgart: Teubner 1997, 210 S., DM 54,–

Die „Prophetentheorie“ hat sich aus Fragestellungen des optimalen Stoppens von stochastischen Prozessen entwickelt. Thema ist die Charakterisierung der „Prophetenregion“ einer vorgegebenen Klasse von Prozessen X, die Angaben macht über das Verhältnis des erwarteten Maximums $M = M(X)$ des Prozesses zu dem erwarteten optimal gestoppten Wert $V = V(X)$ des Prozesses. Ein Prophet mit Einblick in den gesamten Verlauf des Prozesses kann am Maximum stoppen, während die gerichtete Zeitkomponente (ohne Einsicht in die Zukunft) auf den optimalen Stoppwert verweist.

Einen Aufschwung nahm dieses Gebiet insbesondere durch die Arbeiten von Krengel und Sucheston (1977) und Hill und Kerz (1978). Ein berühmtes Resultat dieser Arbeiten ist die Schranke $M(X) \leq 2V(X)$, die in der Klasse der nichtnegativen, unabhängigen Prozesse gültig und scharf ist. Ein weiteres klassisches Resultat von Dubins und Blackwell (1963) besagt, daß für Martingale mit unendlichem Horizont mit Werten im Interval $[0, 1]$ die Ungleichung $M(X) \leq EX_1 - EX_1 \ln EX_1$ gültig ist. In diskreter Zeit ist die Schranke scharf, sie wird aber nicht angenommen. Dubins und Gilat (1978) haben ein zeitstetiges Martingal konstruiert, das diese Schranke realisiert. Eine elegante alternative Konstruktion basierend auf einer Zeittransformation der Brownschen Bewegung – das Azema-Yor-Martingal – wird in dem Buch ausführlich erläutert.

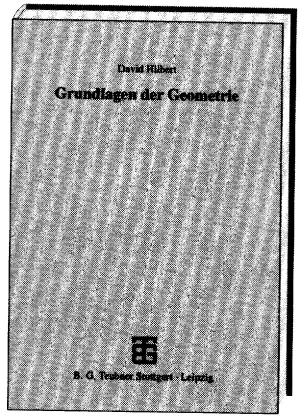
In dem vorliegenden Werk werden eine Reihe von weiteren Beispielklassen detailliert besprochen und die zugehörigen Prophetenregionen charakterisiert. Neu sind die Berücksichtigung von Beobachtungskosten und Diskontierung und insbesondere eine spieltheoretische Formulierung der Fragestellung. Die Aktionenmengen der Spieler sind zum einen die Menge der Stoppzeiten und zum anderen die Klasse der zugrundeliegenden Verteilungen. Reduktionstechniken wie die Balayage-(Spreading-)-Technik oder die Hardy-Littlewood-Transformierte werden verallgemeinert und erlauben die Reduktion der Verteilungsklassen auf wenige extremale Verteilungen und führen dann auf reelle Optimierungsprobleme.

Das Buch gibt eine sehr gut lesbare Übersicht des Gebietes und ermöglicht mit seiner Auswahl an Themen und deren detaillierter Darstellung einen sehr guten Einstieg in dieses interessante Forschungsgebiet.

Freiburg

L. Rüschendorf

Hilbert
Grundlagen der Geometrie



Von **David Hilbert**

Mit Supplementen von
Paul Bernays

Herausgegeben und
mit Anhängen versehen von
Prof. Dr. **Michael Toepell,**
Universität Leipzig

Mit Beiträgen von
Prof. Dr. **Michael Toepell,**
Universität Leipzig,
PD Dr. **Hubert Kiechler,**
Universität Hamburg,
Prof. Dr. **Alexander Kreuzer,**
Universität Hamburg,
und Prof. Dr.
Heinrich Wefelscheid,
Universität Duisburg

14. Auflage. 1999.
XXIII, 408 Seiten mit 164 Bildern.
13,7 x 20,5 cm.
(TEUBNER-ARCHIV
zur Mathematik, Suppl. 6)
Geb. DM 58,–
ÖS 423,– / SFr 52,–
ISBN 3-519-00237-X

David Hilberts bahnbrechendes Werk »Grundlagen der Geometrie« erscheint seit 1899 im Verlag B. G. Teubner. Diese klassische axiomatische Grundlegung der Geometrie ist aus einem Ferienkurs für Lehrer und einer sich daran anschließenden Vorlesung in Göttingen hervorgegangen. Die von Michael Toepell im Rahmen der Sammlung »TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik« herausgegebene Edition enthält neben Hilberts Originaltext und den Supplementen von Paul Bernays auch aktuelle Beiträge sowie bisher unveröffentlichte Archivalien. Der Herausgeber schreibt in seinem Vorwort: Hilberts Buch »markiert den Übergang von der empirisch verankerten zur formal-deduktiven Geometrie. Sein klarer axiomatischer Aufbau wurde zugleich richtungsweisend für das mathematische Denken des 20. Jahrhunderts.«

Preisänderungen vorbehalten.

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig
Postfach 80 10 69 · 70510 Stuttgart