

E 20577 F  
101. Band Heft 4  
ausgegeben am 9.12.1999

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



**B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, daß die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 168,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH Stuttgart und Leipzig, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart  
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 7 89 01-0, Telefax (07 11) 7 89 01-10  
e-mail: [info@teubner.de](mailto:info@teubner.de)

Teubner Home Page <http://www.teubner.de>

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 1.00 + .20.

© 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig – Verlagsnummer 2914/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel

101. Band



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photo-mechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970.0012-0456/83 \$ 01.00+.20.

© 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig – Verlagsnummern 2914/1, 2914/2, 2914/3, 2914/4  
Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, Hemsbach

# Inhalt

## 1. Abteilung

<b>A. Bergmann, H. W. Knobloch:</b> Hermann Schmidt 1902–1993 . . . . .	60
<b>R. Busam, E. Freitag:</b> Hans Maaß . . . . .	135
<b>G. Harder:</b> Galoismoduln und Shimura-Varietäten . . . . .	26
<b>H. Karcher:</b> Eingebettete Minimalflächen und ihre Riemannschen Flächen . . . . .	72
<b>P. J. McKenna, K. S. Moore:</b> Mathematics arising from suspension bridge dynamics: recent developments . . . . .	178
<b>E. Novak:</b> Numerische Verfahren für Hochdimensionale Probleme und der Fluch der Dimension . . . . .	151
<b>P. Slodowy:</b> The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl . . . . .	97
<b>P. Ullrich:</b> Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der „Dedekind-Ringe“ . . . . .	116
<b>M. Wiegner:</b> The Navier-Stokes Equations – a Neverending Challenge? . . . . .	1
<b>J. Zabczyk:</b> Infinite Dimensional Diffusions in Modelling and Analysis . . . . .	47

## 2. Abteilung

Andradas, C., Bröcker, L., Ruiz, J. M.: Constructible Sets in Real Geometry ( <i>C. Scheiderer</i> ) . . . . .	46
Bapat, R. B., Raghavan, T. E. S.: Nonnegative Matrices and Applications ( <i>L. Elsner</i> ) . . . . .	43
Bass, R. F.: Diffusions and Elliptic Operators ( <i>A. Wakolbinger</i> ) . . . . .	15
Bertoin, J.: Lévy Processes ( <i>R. L. Schilling</i> ) . . . . .	8
Bhatia, R.: Matrix Analysis ( <i>B. Fischer</i> ) . . . . .	2
Brelot, M.: Théorie classique du potentiel ( <i>N. Jacob</i> ) . . . . .	16
Buergisser, P., Clausen, M., Shokrollahi, A.: Algebraic Complexity Theory ( <i>V. Strassen</i> ) . . . . .	19
Böttcher, A., Karlovich, Y. I.: Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators ( <i>H. Triebel</i> ) . . . . .	56
Chabrowski, J. H.: Variational Methods for Potential Operator Equations ( <i>M. Fuchs</i> ) . . . . .	40
Chriss, N., Ginzburg, V.: Representation Theory and Complex Geometry ( <i>J. Huebschmann</i> ) . . . . .	24
Da Prato, G., Zabczyk, J.: Ergodicity for Infinite Dimensional Systems ( <i>N. Jacob</i> ) . . . . .	10
Diestel, R.: Graph Theory Diestel, R.: Graphentheory ( <i>H. J. Prömel</i> ) . . . . .	52
Dixon, J. D., Mortimer, B.: Permutation Groups ( <i>W. Knapp</i> ) . . . . .	5
Gabriel, P.: Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra ( <i>N. Schappacher</i> ) . . . . .	1
Gliklikh, Y.: Global Analysis in Mathematical Physics, Geometry and Stochastic Models ( <i>B.-W. Schulze</i> ) . . . . .	55
Graham, R. L., Nesetril, J. (Eds): The Mathematics of Paul Erdős I and II ( <i>M. Aigner</i> ) . . . . .	51
Guillemin, V., Lerman, E., Sternberg, S.: Symplectic Fibrations and Multiplicity Diagrams ( <i>J. Hilgert</i> ) . . . . .	7
Harten, F., Meyerthole, A., Schmitz, N.: Prophetentheorie ( <i>L. Rüschemdorf</i> ) . . . . .	41

IV Inhalt

Hazewinkel, M. (Ed.): Handbook of Algebra, Volume 1 ( <i>H.-J. Nastold</i> ) . . . . .	3
Heyde, C. C.: Quasi-Likelihood and its Application, A General Approach to Parameter Estimation ( <i>W. Wefelmeyer</i> ) . . . . .	31
Huybrechts, D., Lehn, M.: The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves ( <i>W. Barth</i> ) . . . . .	23
Janson, S.: Gaussian Hilbert Spaces ( <i>P. Imkeller</i> ) . . . . .	53
Katok, A., Hasselblatt, B.: Modern Theory of Dynamical Systems ( <i>H. Rießmann</i> ) . .	37
Klimek, G., Klimek, M.: Discovering Curves and Surfaces with Maple ( <i>W. Barth</i> ) . .	45
Koosis, P.: Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin ( <i>N. Jacob</i> ) . . . . .	17
Laumon, J.: Cohomology of Drinfeld Modular Varieties, Part I and II; Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence ( <i>U. Stuhler</i> ) . . . . .	27
Lesch, M.: Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods ( <i>E. Schrohe</i> ) . . . . .	59
Lorentz, G. G.: Mathematics from Leningrad to Austin, Selected Works in Real, Functional and Numerical Analysis ( <i>G. Schmeißer</i> ) . . . . .	33
Lorentz, G., Golitschek, M., v. Makovoz, Y.: Constructive Approximation ( <i>G. Nürnberger</i> ) . . . . .	12
Mandelbrot, B.: Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk ( <i>M. Schweizer</i> ) . . . . .	32
McKean, H., Moll, V.: Elliptic Curves: Function Theory, Geometry, Arithmetic ( <i>H.-G. Rück</i> ) . . . . .	26
Motohashi, Y.: Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function ( <i>S. J. Patterson</i> ) . . .	35
Temam, R.: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics ( <i>A. Mielke</i> ) . . . . .	54
Triebel, H.: Fractals and spectra related to Fourier analysis and function spaces ( <i>D. Edmunds</i> ) . . . . .	57
Vasconcelos, W. V.: Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry ( <i>E. Sernesi</i> ) . . . . .	44
Visintin, A.: Models of Phase Transitions ( <i>J. Sprekels</i> ) . . . . .	11
Witting, H., Müller-Funk, U.: Mathematische Statistik II ( <i>A. Janssen</i> ) . . . . .	38

## Inhalt Band 101, Heft 4

### 1. Abteilung

<b>E. Novak:</b> Numerische Verfahren für Hochdimensionale Probleme und der Fluch der Dimension .....	151
<b>P. J. McKenna, K. S. Moore:</b> Mathematics arising from suspension bridge dynamics: recent developments .....	178

### 2. Abteilung

Bapat, R. B., Raghavan, T. E. S.: Nonnegative Matrices and Applications ( <i>L. Elsner</i> ) .....	43
Vasconcelos, W. V.: Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry ( <i>E. Sernesi</i> ) .....	44
Klimek, G., Klimek, M.: Discovering Curves and Surfaces with Maple ( <i>W. Barth</i> ) ..	45
Andradas, C., Bröcker, L., Ruiz, J. M.: Constructible Sets in Real Geometry ( <i>C. Scheiderer</i> ) .....	46
Graham, R. L., Nešetřil, J. (Eds): The Mathematics of Paul Erdős I and II ( <i>M. Aigner</i> ) .....	51
Diestel, R.: Graph Theory	
Diestel, R.: Graphentheory ( <i>H. J. Prömel</i> ) .....	52
Janson, S.: Gaussian Hilbert Spaces ( <i>P. Imkeller</i> ) .....	53
Temam, R.: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics ( <i>A. Mielke</i> ) .....	54
Gliklikh, Y.: Global Analysis in Mathematical Physics, Geometry and Stochastic Models ( <i>B.-W. Schulze</i> ) .....	55
Böttcher, A., Karlovich, Y. I.: Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators ( <i>H. Triebel</i> ) .....	56
Triebel, H.: Fractals and spectra related to Fourier analysis and function spaces ( <i>D. Edmunds</i> ) .....	57
Lesch, M.: Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods ( <i>E. Schrohe</i> ) .....	59

## **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

**G. Nebe:** Faktorisieren ganzer Zahlen

---

### **Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen,  
Templergraben 55, 52056 Aachen  
email: krieg@rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund,  
Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund  
email: gather@omega.statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg,  
86135 Augsburg  
email: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln  
email: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität  
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen  
email: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität,  
Ernst-Abbe-Platz 1-4, 07740 Jena  
email: triebel@minet.uni-jena.de

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810,  
NL-2160 SZ Lisse/Holland



# Numerische Verfahren für Hochdimensionale Probleme und der Fluch der Dimension

E. Novak, Erlangen

## 1 Einführung

Viele hochdimensionale Probleme sind schwierig, der Rechenaufwand der naheliegenden Verfahren wächst exponentiell mit der Dimension. Dies gilt für Probleme der numerischen Integration, für Probleme der Approximation bzw. Rekonstruktion von Funktionen, für das Problem der globalen Optimierung und für viele Integralgleichungen und partielle Differentialgleichungen. Es gilt *nicht* für Probleme der konvexen Optimierung und für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. So ist die optimale Konvergenzordnung bei der Integration von  $C^k$ -Funktionen einer Variablen  $n^{-k}$  und mit Hilfe von Produktformeln erhält man in der Dimension  $d > 1$  leicht Verfahren der Ordnung  $n^{-k/d}$ . Diese Konvergenzordnung ist für großes  $d$  sehr schlecht aber optimal, siehe Satz 5.

Wir fragen also nach der Güte von *optimalen* Verfahren und bemerken bereits hier, daß dies nur Sinn macht in Bezug auf eine *vorgegebene* Funktionenklasse  $F_d$  von Funktionen von  $d$  Variablen: hat man über  $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbf{R}$  keine *a priori Information*, so nützt die Berechnung von noch so vielen Funktionswerten  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  nichts; jeder Wert des Integrals bleibt möglich.

Gewisse hochdimensionale Probleme sind *prinzipiell* schwierig, der Rechenaufwand von optimalen Verfahren wächst exponentiell mit der Dimension. Ob ein Problem dem *Fluch der Dimension* unterliegt, hängt von den betrachteten Funktionenklassen ab, da gewisse hochdimensionale Probleme durchaus effizient gelöst werden können. Der Begriff der *optimalen Konvergenzordnung* spielt eine Rolle, ist aber für sich genommen zu schwach, um das Phänomen des Fluchs der Dimension (ein Ausdruck, der auf [6] zurückgeht) zu erfassen.

Wir werden einige klassische Ergebnisse aus der Theorie der optimalen numerischen Methoden vorstellen. Die meisten Ergebnisse sind jedoch aus den letzten Jahren und manche sind noch unveröffentlicht. Diese Arbeit versteht sich als eine Einführung. Wir beschränken uns auf solche Ergebnisse, die sich leicht beschreiben lassen. Beweise werden nur skizziert oder ganz weggelassen. Insbesondere möchte ich folgende Fragen diskutieren:

- Was ist ein hochdimensionales Problem und warum sind solche Probleme wichtig?

- Was ist ein numerisches Verfahren? Können wir Aussagen über *alle* numerischen Verfahren machen? Was ist ein optimales Verfahren?
- Wie beweist man *untere Schranken* für beliebige numerische Verfahren?

Wir werden Probleme kennenlernen, für die man exponentielle untere Schranken beweisen kann und andere, für die es polynomiale Algorithmen gibt. Ein solcher *Existenzbeweis* für polynomiale Algorithmen kann allerdings abstrakt oder konstruktiv sein, so daß wir drei verschiedene Situationen unterscheiden:

- Probleme, die dem Fluch der Dimension unterliegen (exponentielle untere Schranken)
- Probleme, die dem Fluch der Dimension nicht unterliegen (*Existenz* von polynomialen Algorithmen)
- Probleme, die dem Fluch der Dimension nicht unterliegen (*Konstruktion* von polynomialen Algorithmen).

Ein Problem rutscht von der zweiten in die dritte Klasse, wenn es gelingt, entsprechende Algorithmen zu konstruieren. Man muß auch zugeben, daß die Unterscheidung zwischen abstrakten und konstruktiven Existenzbeweisen fließend verläuft: nämlich dann, wenn die Konstruktion einer Methode zwar bloß endlich viele Rechenschritte erfordert, wenn aber gleichzeitig dieses endlich so groß ist, daß sich die Konstruktion praktisch nicht durchführen läßt. Deswegen interessieren wir uns besonders für *einfache* Konstruktionen und werden an geeigneter Stelle sagen, was wir darunter verstehen, siehe Bemerkung 21. Bei den klassischen Algorithmen, die auf Tensorprodukten beruhen, wächst die Rechenzeit exponentiell mit der Dimension. Höchstens mit neuen Algorithmen gelingt es, die Rechenzeit polynomial in der Dimension zu beschränken.

Insbesondere für den Beweis von unteren Schranken muß man das Berechenbarkeitsmodell spezifizieren. In der Numerischen Mathematik tendiert man dazu, das *real number model* zu benutzen: gerechnet wird mit reellen Zahlen und man abstrahiert zunächst von Rundungsfehlern. Um allgemeine numerische Probleme (mit Funktionen  $f$  aus einer vorgegebenen Klasse  $F_d$ ) behandeln zu können, gehen wir von einer *Orakelmaschine* aus. Das Orakel liefert uns Funktionswerte oder allgemeiner  $L(f)$  für gewisse lineare Funktionale  $L \in \Lambda_d$ . Dazu mehr in Abschnitt 3.

Im Unterschied zur diskreten Komplexitätstheorie, bei der von vielen Problemen nur *vermutet* wird, daß sie schwer sind (im Sinne der Existenz exponentieller unterer Schranken), können wir bei vielen stetigen Problemen solche unteren Schranken *beweisen*.

Ein Reiz der vorgestellten Theorie besteht in den zahlreichen Zusammenhängen zu klassischen Fragen der Approximationstheorie, Stochastik und Zahlentheorie.<sup>1</sup> Wer sich nur von einem unmittelbaren Nutzen überzeugen lassen will, möchte an die vielen Anwendungen denken, von denen wir im nächsten Abschnitt nur ein paar wenige Revue passieren lassen.

<sup>1</sup> Insbesondere der Begriff der *Diskrepanz* aus der Theorie der Gleichverteilung ist ein Begriff mit vielen Bezügen zu den unterschiedlichsten Gebieten der Mathematik: Sobolev-Räume, Zufallsfelder, Kombinatorik, algebraische Geometrie, numerische Integration und Komplexitätstheorie. Entsprechende Literatur werden wir später nennen.

## 2 Hochdimensionale numerische Probleme

Bei einem numerischen Problem (im Sinne dieser Arbeit) möchte man eine Näherung von  $S_d(f)$  berechnen. Dabei ist  $S_d : F_d \rightarrow G_d$  eine Abbildung,  $F_d$  eine Menge von Funktionen von  $d$  (reellen) Variablen und  $G_d$  ein normierter Raum. Als Näherung berechnen wir Linearkombinationen

$$(1) \quad g = \sum_{k=1}^m c_k g_{i_k}$$

oder, formaler, einen Output der Form

$$\text{out}(f) = [i_1, c_1, i_2, c_2, \dots, i_m, c_m],$$

mit  $i_k \in \mathbf{N}$  und  $c_k \in \mathbf{R}$ , den wir mit dem Vektor  $g$  identifizieren. Der Fehler ist dann  $e = \|S_d(f) - g\|$  und wir werden annehmen, daß ein  $g$  berechnet werden soll mit  $e \leq \varepsilon$ . Dabei ist  $\varepsilon > 0$  die vorgegebene *Fehlertoleranz*.

Von einem *hochdimensionalen Problem* spricht man dann, wenn  $d$  groß ist. Wir werden sehen, daß die Rechenkosten häufig exponentiell mit dieser Anzahl  $d$  von Variablen wachsen. Daher sind Probleme mit  $d = 5$  oder  $d = 10$  oft schon sehr schwer und können als hochdimensional gelten. Wir beschränken uns auf wenige Beispiele.

- Die *Schrödinger-Gleichung* für  $m > 1$  Teilchen ergibt ein  $d = 3m$ -dimensionales Problem.
- Die Berechnung von *hochdimensionalen Integralen* und von *Pfadintegralen* (z.B. von Integralen bezüglich des Wiener-Maßes) spielt in vielen Anwendungen eine Rolle, insbesondere in der Quantenphysik und in der Finanzmathematik. Die Lösung vieler Differentialgleichungen kann mit Hilfe von Pfadintegralen angegeben werden, Ausgangspunkt ist die klassische *Feynman-Kac-Formel*. Ähnliche Probleme ergeben sich bei der *Simulation von stochastischen Prozessen*. Siehe [23, 40, 67, 81, 84, 87].
- In der *globalen Optimierung* ist das Minimum einer Funktion gesucht. Solche Probleme gibt es in vielen Anwendungen, etwa in der Mustererkennung und der Bildverarbeitung, siehe [94], oder bei der Modellierung und Vorhersage der Geometrie von Eiweißmolekülen, siehe [41]. Sogenannte „Abkühlungsstrategien“ (simulated annealing), „genetische“ Algorithmen, Glättungstechniken und andere stochastische Algorithmen wurden entwickelt und teilweise mit großem Erfolg eingesetzt, siehe [9] und [71]. Die Arbeiten [44, 49] enthalten Fehlerabschätzungen für klassische Funktionenräume.

Es ist *nicht* so, daß die Dimensionalität eines Problems eine mathematische Invariante ist. Schließlich kann man jede stetige Funktion  $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbf{R}$  nach dem *Superpositionssatz von Kolmogorov* in der Form

$$(2) \quad f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^{2d+1} g(\lambda_1 \varphi_i(x_1) + \dots + \lambda_d \varphi_i(x_d))$$

mit stetigen Funktionen  $g$  und  $\varphi_i$  von einer Variablen (wobei nur  $g$  von  $f$  abhängt) darstellen. Siehe Kapitel 17 von [35] für eine Darstellung des 13. Hilbertschen Pro-

blems und seiner Geschichte. In unserem Zusammenhang ist ein Problem gegeben durch  $(S_d, F_d, G_d, \Lambda_d)$ , nicht durch  $d$  allein. Die Funktionenklassen  $F_d$  beschreiben häufig eine gewisse Glattheit, die sich bei der Darstellung (2) nicht von  $f$  auf  $g$  überträgt.

### 3 Numerische Verfahren

Das übliche Vorgehen der Numerischen Mathematik besteht darin, daß immer neue Algorithmen vorgeschlagen werden, die mit den bekannten Verfahren verglichen werden. Maßstab sind sowohl theoretische Eigenschaften als auch numerische Ergebnisse. Dieser Prozeß führt zu besseren Algorithmen und zu oberen Schranken für den Fehler bzw. den nötigen Rechenaufwand. Man benötigt auch untere Schranken und ein präzises Berechenbarkeitsmodell, wenn man gewisse sehr natürliche Fragen beantworten will:

- Wann sind adaptive Verfahren besser als *alle* nichtadaptiven?
- Wann sind *Monte-Carlo-Verfahren* (d.h. randomisierte Algorithmen) besser als *alle* deterministischen Methoden?
- Welche hochdimensionalen Probleme sind *prinzipiell* schwierig?
- Brauchen wir *unstetige* Vergleichsoperationen zur Lösung eines vorgegebenen Problems?

Wir verwenden das einfachste Berechenbarkeitsmodell der Arithmetik, indem wir die vier Grundrechenarten (mit reellen Zahlen) zulassen und dazu noch Sprünge im Programm, die vom Ergebnis eines Vergleichs der Form  $(a \leq b)$ ? abhängen. Solche Maschinen nennt man *algebraische RAMs* (random access machines). Aufgrund der wichtigen Arbeit [7] spricht man auch vom BSS-Modell. Für einen Überblick siehe [8] und [38]. Insbesondere wegen der (unstetigen) Vergleichsoperation, die im Modell exakt ausgeführt wird, sind reelle Maschinen sicherlich nur eine Abstraktion der Wirklichkeit und nicht immer angemessen. Dies wird in den Arbeiten [91] und [98] diskutiert. Alternativ könnte man auch das klassische bit number model (z.B. die Turing-Maschine) zugrundelegen, siehe [10, 90].

Wir benötigen (zusätzlich zur algebraischen RAM) ein *Orakel* zur Berechnung von Funktionswerten. Input für viele numerische Berechnungen sind ja nicht  $n$ -Tupel von reellen Zahlen (wie in der algebraischen Komplexitätstheorie, siehe [12]), sondern Funktionen. Wir nehmen an, daß einzelne Funktionswerte (oder allgemeiner Werte von linearen Funktionalen wie etwa Fourier- oder Wavelet-Koeffizienten, wobei die Funktionale aus einer vorgegebenen Klasse  $\Lambda_d$  sind) berechnet werden können. Damit erhält man die folgende Liste der möglichen Operationen einer *algebraischen RAM mit Orakel*:

- Input:  $f \in F_d$  und reelle Parameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$
- Arithmetische Operationen: die vier Grundrechenarten (mit reellen Zahlen)
- Bedingte Sprünge, die vom Ergebnis eines Vergleichs  $(a \leq b)$ ? abhängen
- Aufruf des Orakels: berechne  $L(f)$  für ein  $L \in \Lambda_d$
- Im Fall von randomisierten Algorithmen: Aufruf eines Zufallszahlengenerators  $\text{RAN} \in [0, 1]$  oder eines Generators für zufällige Bits  $\text{COIN} \in \{0, 1\}$ .
- Output:  $\text{out}(f) = [i_1, c_1, i_2, c_2, \dots, i_m, c_m]$ , wird mit  $g \in G_d$  gemäß (1) identifiziert.

Dabei kann, je nach Aufgabenstellung, die *Basisfolge*  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $G_d$  fest vorgegeben sein oder frei vom Designer des Algorithmus wählbar sein.

Dieses Berechenbarkeitsmodell wird seit Jahrzehnten mehr oder weniger explizit benützt, aber selten präzise beschrieben. Auch wir verzichten hier auf diese Formalitäten und verweisen den interessierten Leser auf [45]. Weitere Aspekte dieses Modells werden in [57–59] untersucht. Will man auch parallele Algorithmen untersuchen, so muß man das Modell erweitern, siehe [27].

Die *Kosten* einer Berechnung kann man einfach dadurch messen, daß man die Anzahl der Operationen zählt und eine (geeignet gewichtete) Summe betrachtet. Häufig ignoriert man Input- und einfachste Kopierbefehle und setzt die Kosten 1 für die arithmetischen Operationen und die Vergleichsoperation fest. Orakelaufrufe entsprechen oft komplizierten Berechnungen oder gar physikalischen Messungen, die viel teurer sein können als einfache arithmetische Operationen. Daher legen wir ihre Kosten als  $c > 0$  fest und stellen uns meistens vor, daß  $c$  viel größer als 1 ist.

Gelegentlich sind die Rechenkosten irrelevant, weil sie nur einmal anfallen, und man möchte die Anzahl der auszurechnenden reellen Zahlen minimieren. So ein Fall, der einer *Datenkompression* entspricht, kann leicht durch eine entsprechende Definition der Kosten modelliert werden, siehe [58].

Wir studieren in dieser Übersicht das *worst case setting*, d.h. den maximalen Fehler von Algorithmen und die maximalen Kosten. Man kann auch das *average case setting* betrachten und zum Beispiel die optimale Rekonstruktion von *zufälligen Funktionen* untersuchen. Dieses Problem wird auch in der *Statistik* studiert. Manche Ergebnisse gelten ähnlich im worst case wie im average case setting. Teilweise gibt es allerdings sehr erhebliche Unterschiede, siehe [68] für eine umfassende Übersicht. Das folgende typische Beispiel mag der Motivation dienen. Gegeben sei eine Operatorgleichung

$$(Au)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

auf einer beschränkten Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , etwa eine Integralgleichung oder eine Randwertaufgabe für eine partielle Differentialgleichung. Wir nehmen an, daß  $A$  linear und bijektiv ist und daß wir Funktionswerte von  $f \in F_d$  berechnen können (oder irgendwie gegeben haben). Wir wollen die Lösung  $u$  ausrechnen und erlauben einen Fehler  $\varepsilon$ , gemessen in der Norm eines Raumes  $G_d$ .

Dieses Problem ist ein Beispiel für die folgende Aufgabe: Berechne eine Approximation von  $S_d(f)$ , wobei der Operator

$$S_d : X_d \rightarrow G_d$$

linear ist und  $f \in F_d \subset X_d$ , es gilt  $S_d = A^{-1}$ . Oft ist  $F_d$  eine Kugel in einem Sobolev-Raum  $X_d$  und  $G_d$  ist auch ein Sobolevraum, im einfachsten Fall etwa  $G_d = L_2(\Omega)$ . Häufig werden  $S_d$  und  $f \in F_d$  mit einer finiten Elementmethode diskretisiert.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Die Lösung von Operatorgleichungen wird im folgenden keine große Rolle spielen. Ich möchte nur verweisen auf [11, 18, 20, 24, 26, 39, 61, 83, 92, 93]. Die Komplexität von Operatorgleichungen ist im wesentlichen bestimmt durch die  $n$ -te Weite (im Sinne von Gelfand) der Lösungsmenge.

Entsprechend beruhen numerische Methoden auf einer *a priori* (oder globalen) Information  $f \in F_d$  und der berechneten (oder lokalen) Information

$$(3) \quad N(f) = (L_1(f), L_2(f), \dots, L_n(f)) \in \mathbf{R}^n,$$

mit stetigen linearen Funktionalen  $L_i \in \Lambda_d$ , entsprechend unserer Annahme also

$$N(f) = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)).$$

Ein Informationsoperator  $N : F_d \rightarrow \mathbf{R}^n$  heißt *nichtadaptiv*, falls die Funktionale  $L_i$  bzw. die *Stützstellen*  $t_i$  fest gewählt sind, d.h. nicht von  $f \in F_d$  bzw. den vorher evtl. schon berechneten Werten  $f(t_1), \dots, f(t_{i-1})$  abhängen. Allgemeiner sind *adaptive Verfahren*, bei denen erst im Lauf der Rechnung festgelegt wird, welche Stützstellen noch dazugenommen werden sollen. Man kann hoffen, im Verlauf der Berechnung von  $L_1(f), \dots, L_{i-1}(f)$  über  $f$  zu lernen, um den Fehler durch eine geschickte Wahl von  $L_i$  zu verkleinern.

Der Fehler einer Abbildung  $\varphi \circ N$  mit  $N$  wie in (3) und  $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow G_d$  ist gegeben durch

$$e(\varphi \circ N, f) = \|S_d(f) - \varphi(N(f))\|,$$

der maximale Fehler ist

$$e(\varphi \circ N, F_d) = \sup_{f \in F_d} \|S_d(f) - \varphi(N(f))\|.$$

Wir definieren nun die  $\varepsilon$ -Komplexität eines Problems in einer Weise, die unabhängig von Skalierungsfaktoren ist. Damit meinen wir folgendes. Für die meisten Probleme gibt es einen trivialen Algorithmus. Technisch gesehen ist es der beste Algorithmus, der keinerlei Information über  $f \in F_d$  benützt, also die beste konstante Abbildung  $f \mapsto c \in G_d$ . Der Fehler dieses Algorithmus ist

$$e_0 := \inf_{c \in G_d} \sup_{f \in F_d} \|S_d(f) - c\|$$

und stimmt überein mit dem Radius der Lösungsmenge  $S_d(F_d)$ . Ist  $S_d$  linear und  $F_d$  die Einheitskugel eines Raumes  $X_d$ , so ist  $e_0$  einfach die Norm von  $S_d$ . Wir betrachten den maximalen Fehler relativ zu  $e_0$  und gelangen so zu der folgenden Definition.

**Definition 1.** Die  $\varepsilon$ -Komplexität eines Problems ist definiert durch die minimalen (worst case) Kosten eines Algorithmus  $\varphi \circ N$  in der Klasse aller Algorithmen mit

$$e(\varphi \circ N, F_d) \leq \varepsilon e_0.$$

Die  $\varepsilon$ -Komplexität hängt ab von  $S_d, F_d, G_d$  und  $\Lambda_d$ , außerdem von der Folge der  $g_i$ . Deshalb schreiben wir  $\text{comp}(\varepsilon, S_d, F_d, G_d, \Lambda_d, (g_i)_{i \in \mathbf{N}})$ . Wenn die  $g_i$  frei gewählt werden können, erhalten wir

$$(4) \quad \text{comp}(\varepsilon, S_d, F_d, G_d, \Lambda_d) = \inf_{(g_i)_{i \in \mathbf{N}}} \text{comp}(\varepsilon, S_d, F_d, G_d, \Lambda_d, (g_i)_{i \in \mathbf{N}}). \quad \square$$

Wir betrachten nun für  $F_d$  immer eine Klasse von Funktionen und für  $\Lambda_d$  die Klasse der Punktauswertungen,  $L(f) = f(t)$  für alle  $f$ . Auch  $(S_d, F_d, G_d)$  wird

häufig aus dem Zusammenhang ersichtlich sein und wir betrachten die durch (4) gegebene Komplexität. Sie hängt dann nur noch von  $d$  und  $\varepsilon$  ab und wird  $\text{comp}(\varepsilon, d)$  geschrieben.

In (3) betrachten wir eine Information mit *fester Kardinalität*. Allgemeinere Algorithmen, bei denen die Kardinalität  $n = n(f)$  von einer *Stoppregel* abhängt, sind für die in dieser Arbeit studierten Probleme nicht besser. Daher werden sie in dieser Übersicht keine Rolle spielen.

Nichtadaptive Verfahren lassen sich leichter parallelisieren. Sie lassen sich auch leichter analysieren. Deswegen ist der folgende Satz, der Ergebnisse von Smolyak, Bakhvalov, Gal, Micchelli, Traub und Woźniakowski zusammenfaßt, bemerkenswert. Er behandelt eine *Standardsituation* der Numerik, nämlich Fehlerabschätzungen für *lineare Probleme* mit Hilfe einer *Norm von  $f$* . Er zeigt insbesondere, daß adaptive Methoden für lineare Probleme auf symmetrischen und konvexen Mengen kaum besser sind als nichtadaptive, siehe [2, 46, 83].

Häufig genügt es sogar, lineare Verfahren zu betrachten. Zum Beweis dieser Tatsache benützt man Ergebnisse aus der Theorie der  $s$ -Zahlen oder  $n$ -ten Weiten, siehe [36, 63, 64, 65].

**Satz 2.** *Gegeben sei ein linearer Operator  $S_d : X_d \rightarrow G_d$  und  $F_d$  sei die Einheitskugel von  $X_d$ . Sei  $\varphi \circ N$  ein beliebiges adaptives Verfahren, das für  $f = 0 \in F_d$  die Information*

$$N^0(f) = [L_1^0(f), L_2^0(f), \dots, L_n^0(f)]$$

*benützt. Dann gibt es ein nichtadaptives Verfahren der Form  $\varphi^* \circ N^0$  mit*

$$e(\varphi^* \circ N^0, F_d) \leq 2e(\varphi \circ N, F_d).$$

*Daher ist der Fehler von adaptiven Verfahren mindestens halb so groß wie der von (optimalen) nichtadaptiven. Ist überdies  $X_d$  ein Hilbertraum oder ist  $G_d$  ein Raum mit der metric extension property<sup>3</sup>, so kann man auf den Faktor zwei verzichten und überdies  $\varphi^* \circ N^0$  linear wählen,*

$$\varphi^* \circ N^0(f) = \sum_{i=1}^n a_i L_i^0(f). \quad \square$$

In der Situation von Satz 2 gibt es Beispiele, bei denen adaptive Verfahren (etwas) besser sind als nichtadaptive, siehe [33]. Alle Voraussetzungen des Satzes sind wesentlich. So nehmen wir an, daß  $F_d$  konvex und symmetrisch ist. Die Menge  $F_d$  beschreibt die *a priori Information* über das Problem. Oft weiß man, daß  $f$  gewisse Glattheitseigenschaften hat und dieses Wissen läßt sich in der Form  $f \in F_d$  ausdrücken. Wenn das a priori Wissen zu einer Menge führt, die nicht konvex oder nicht symmetrisch ist, kann man Satz 2 nicht anwenden. Adaptive Verfahren können dann sehr viel besser sein als nichtadaptive. Dasselbe gilt für *nichtlineare* Probleme, siehe die Übersicht [46].

<sup>3</sup> zum Beispiel der Raum der beschränkten Funktionen auf einer Menge mit der sup-Norm

Die Idee hinter dem Beweis von Satz 2 ist, daß eine nichtadaptive Information, die gut ist für  $0 \in F_d$ , auch für jedes andere  $f \in F_d$  gut ist. Dies gilt für *jedes* lineare Problem und *jede* Norm. Allerdings gibt dieses Ergebnis keinen Hinweis darauf, *welche* nichtadaptive Information optimal ist. Insbesondere ist es *nicht* so, daß naheliegende Informationen (wie äquidistante Gitterpunkte oder uniforme Zerlegungen) immer gut sind. Tatsächlich gibt es viele wichtige Beispiele, bei denen äquidistante Stützpunkte sehr schlecht sind. Wir betonen diese Tatsache, weil in der Literatur gelegentlich äquidistante Stützstellen (oder eine uniforme Zerlegung) verglichen werden mit einer guten adaptiven Methode und dann fälschlich geschlossen wird, daß eine adaptive Methode besser ist als *alle* nichtadaptiven Methoden.

**Bemerkung 3.** Für viele Probleme gibt es optimale Algorithmen, die linear sind, siehe Satz 2. Dann ist die Komplexität im wesentlichen bestimmt durch die minimale Anzahl  $n$  von Orakelaufrufen. Wir definieren  $\text{card}(\varepsilon, d)$  durch

$$\min\{n \mid \text{es gibt } \varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow G_d \text{ und } N \text{ wie in (3) mit } e(\varphi \circ N, F_d) \leq \varepsilon e_0\}.$$

Sind lineare Algorithmen optimal, so gilt

$$c \cdot \text{card}(\varepsilon, d) \leq \text{comp}(\varepsilon, d) \leq (c + 2) \cdot \text{card}(\varepsilon, d).$$

Deshalb wird es im folgenden genügen, die Größen  $\text{card}(\varepsilon, d)$  zu studieren und man kann diese Zahlen mit der Komplexität (nahezu) *identifizieren*.  $\square$

## 4 Untere Schranken

Das wichtigste Problem der theoretischen Informatik (nach Ansicht von Steve Smale eines der drei wichtigsten Probleme der Mathematik überhaupt, siehe [76]<sup>4</sup>) bezieht sich auf die Klasse der Probleme, für die ein *polynomialer Algorithmus* existiert. Solche Probleme nennt man häufig *tractable* im Gegensatz zu den *intractable problems*, für die kein polynomialer Algorithmus existiert. Wir benützen die folgende Definition.

**Definition 4.** Ein Problem, gegeben durch eine Folge  $(S_d, F_d, G_d, \Lambda_d)$ , heißt *tractable*, falls

$$\text{comp}(\varepsilon, d) \leq K \cdot \varepsilon^{-q} \cdot d^p$$

mit gewissen Konstanten  $K, q, p > 0$ ; sonst heißt es *intractable*.  $\square$

Diese Definition lehnt sich an die übliche Begriffsbildung für diskrete Probleme an, man beachte aber, daß wir das *real number model* zugrundelegen.<sup>5</sup> Im Be-

<sup>4</sup> „In fact, included are what I believe to be the three greatest open problems of mathematics: the Riemann Hypothesis, the Poincaré Conjecture, and „Does  $P = NP$ ?““

<sup>5</sup> Manche Probleme lassen sich im diskreten Berechnungsmodell der Turing-Maschine und im real number model untersuchen. Welches Modell angemessen ist, hängt von der Anwendung ab. Ein Problem kann im einen Modell tractable sein und im anderen intractable, da sich die Voraussetzungen bezüglich Rechenkosten und Problemgröße erheblich unterscheiden. Bekanntlich ist das Problem der Linearen Optimierung im Turing-Modell tractable. Ob dies auch im real number model gilt, ist ein wichtiges offenes Problem.



reich der Numerischen Mathematik (in Bezug auf das real number model mit Orakel) geht sie auf Woźniakowski zurück, siehe [96, 97]. Verschiedene klassische Probleme sind intractable, es gilt aber  $\text{comp}(\varepsilon, d) \leq C_d \cdot \varepsilon^{-q_d}$  für jedes  $d$ . Man sagt dann auch, daß so ein Problem dem *Fluch der Dimension* unterliegt.

Ist man sich erst einmal über den Begriff des Algorithmus im klaren, dann liegt es auf der Hand, daß man verschiedene untere Schranken beweisen kann, indem man die verschiedenen Rechenoperationen betrachtet:

- Man kann die Anzahl der benötigten Aufrufe des Orakels untersuchen und erhält damit Schranken für die *Informationskosten*.
- Man kann kombinatorische oder arithmetische Überlegungen anstellen und die Anzahl der benötigten Rechenoperationen untersuchen, d.h. die *arithmetischen Kosten*.
- Topologische Betrachtungen ermöglichen eine Abschätzung der Anzahl der nötigen Vergleichsoperationen, man spricht auch von der *topologischen Komplexität*. Wir werden darauf in dieser Arbeit nicht weiter eingehen und verweisen nur auf [28, 57, 74, 85].
- Mit Hilfe gewisser Begriffe der Approximationstheorie (*beste m-Term Approximation*, siehe [16]) kann man abschätzen, wieviele reelle Zahlen ausgerechnet werden müssen. Man kann hier von der *Output-Komplexität* sprechen, siehe [58].

Welche Abschätzungsmethode zu den besten unteren Schranken führt, hängt vom Problem ab. Überraschend häufig sind die Gesamtkosten von optimalen Algorithmen nur wenig größer als die Informationskosten; mit Satz 2 und Bemerkung 3 haben wir eine wichtige Klasse von Problemen mit dieser Eigenschaft bereits kennengelernt. Daher hat sich für diese Untersuchungen neben dem Begriff der *analytischen Komplexitätstheorie* auch der Begriff *Information-Based Complexity* eingebürgert, siehe [83] und die neue Einführung [84].

## 5 Probleme, die dem Fluch der Dimension unterliegen

In gewissen Fällen folgt aus klassischen Ergebnissen über die optimale Konvergenzordnung in Verbindung mit Satz 2 bereits, daß ein vorgelegtes Problem dem Fluch der Dimension unterliegt. Das folgende Ergebnis von Bakhvalov (aus dem Jahr 1959, siehe [1]) ist recht einfach zu beweisen, zumindest der Fall  $d = 1$  eignet sich ausgezeichnet für eine einführende Veranstaltung in die Numerik.<sup>6</sup>

**Satz 5.** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $X_d$  der Raum  $C^k([0, 1]^d)$  mit der Norm

$$\|f\| = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Wir betrachten das Integrationsproblem

$$S_d(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$$

<sup>6</sup> Bisher spielen untere Schranken (nicht nur) in der Ausbildung kaum eine Rolle.

auf der Einheitskugel  $F_d$  von  $X_d$ . Dann gibt es positive Konstanten  $c_{k,d}$  und  $C_{k,d}$  mit

$$c_{k,d} \cdot \varepsilon^{-d/k} \leq \text{comp}(\varepsilon, d) \leq C_{k,d} \cdot \varepsilon^{-d/k}. \quad \square$$

**Beweisidee:** Aus Satz 2 folgt, daß es genügt, Quadraturformeln

$$(5) \quad Q_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(t_i)$$

zu betrachten. Für die oberen Schranken reicht es, Produktformeln (etwa Tensorprodukte der Gauß-Formeln oder der Clenshaw-Curtis-Formeln) zu wählen. Für die unteren Schranken betrachte man ein beliebiges  $Q_n$  mit  $2n \approx \ell^d$ , wobei  $\ell \in \mathbb{N}$ , und die entsprechende Zerlegung von  $[0, 1]^d$  in  $\ell^d$  kleine Würfel mit Seitenlänge  $\ell^{-1}$ . Dann enthalten mindestens  $\approx n$  der kleinen Würfel keine Stützstelle und damit kann  $Q_n(f)$  auch nicht vom Verhalten von  $f \in F_d$  auf diesen Teilwürfeln abhängen. Man kann nun zwei Funktionen  $f_1, f_2 \in F_d$  konstruieren, die sich nur auf den Teilwürfeln ohne Stützstellen unterscheiden und für die

$$S_d(f_1) - S_d(f_2) \geq 2\varepsilon$$

gilt. Wegen  $Q_n(f_1) = Q_n(f_2)$  folgt

$$e(Q_n, F_d) \geq \varepsilon$$

und daraus die Behauptung, siehe z.B. [44] für die Details. □

**Bemerkung 6.** Wir wollen diesen typischen Satz und das Beweisschema kommentieren. Zunächst folgt, daß das Problem intractable ist im Sinne der Definition 4. Für jedes  $d$  erhält man die Rate  $\text{comp}(\varepsilon, d) \asymp \varepsilon^{-d/k}$  in einer konstruktiven Weise, man kann entsprechende Produktformeln explizit hinschreiben. Allerdings benötigen (nichttriviale) Produktformeln mindestens  $2^d$  Stützstellen, so daß man schon bei  $d = 40$  kaum noch von einer *sinnvollen Konstruktion* sprechen kann.

Bei genauerer Analyse wird man feststellen, daß sich die Konstanten  $C_{k,d}$  von den Konstanten  $c_{k,d}$  sehr unterscheiden, ein Verhältnis

$$\frac{C_{k,d}}{c_{k,d}} \approx 5^{d-1}$$

ist schon für kleine  $k$  realistisch. Daraus folgt, daß Satz 5 zwar die Kosten bei *festen*  $k$  und  $d$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gut wiedergibt, aber kaum etwas aussagt über die Frage, wie  $\text{comp}(\varepsilon, d)$  mit der *Dimension*  $d$  wächst. In vielen Anwendungen spielt der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  kaum eine Rolle, häufig reicht eine bescheidene Genauigkeit. Die klassischen Fehlerabschätzungen erweisen sich also als recht unbefriedigend; wir wollen wissen, wie  $\text{comp}(\varepsilon, d)$  von  $\varepsilon$  und von  $d$  abhängt. Dieses Problem studieren wir im folgenden für Funktionenklassen, die eng mit verschiedenen Begriffen der Diskrepanz gekoppelt sind. □

Mit der *Koksma-Hlawka-Ungleichung* kann man den Fehler  $e(Q_n, F_d)$  für gewisse  $F_d$  durch die Diskrepanz ausdrücken, siehe [29, 42]. Für Punkte  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]^d$  ist die  $L_2$ -Diskrepanz gegeben durch

$$\text{disc}_2(\{t_1, \dots, t_n\}) = \left( \int_{[0,1]^d} \left( x_1 \cdots x_d - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,x]}(t_i) \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dabei bezeichnet  $1_{[0,x]}$  die Funktion, die 1 ist auf dem Quader  $\{y \mid 0 \leq y_i < x_i, i = 1, 2, \dots, d\}$  und 0 außerhalb. Die  $L_2$ -Diskrepanz drückt aus, wie gut man im quadratischen Mittel das Volumen eines Quaders  $[0, x] \subset [0, 1]^d$  durch das Verhältnis  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,x]}(t_i)$  der in ihm enthaltenen Punkte schätzen kann.

Wir wollen auch allgemeine Quadraturformeln (5) betrachten und definieren ihre  $L_2$ -Diskrepanz als

$$\text{disc}_2(Q_n) = \left( \int_{[0,1]^d} \left( x_1 \cdots x_d - \sum_{i=1}^n a_i 1_{[0,x]}(t_i) \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Als nächstes definieren wir spezielle Sobolevräume  $X_d$ . Für  $d = 1$  sei

$$X_1 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f(1) = 0, f \text{ ist abs. stetig}, f' \in L_2\}$$

mit der Norm  $\|f\| = \|f'\|_{L_2}$ . Für  $d > 1$  betrachten wir das  $d$ -fache *Tensorprodukt*

$$(6) \quad X_d = X_1 \otimes \dots \otimes X_1 \quad \text{mit} \quad \|f\| = \|f^{(1,1,\dots,1)}\|_{L_2}.$$

Wie immer sei  $F_d$  die Einheitskugel von  $X_d$ . Dann folgt aus der Koksma-Hlawka-Ungleichung, daß

$$\text{disc}_2(Q_n) = e(Q_n, F_d).$$

Außerdem ist  $\text{disc}_2(Q_n)$  auch gleich dem durchschnittlichen Fehler von  $Q_n$  bezüglich des Maßes, das vom Brownschen Blatt auf  $C([0, 1]^d)$  induziert wird, siehe [95]. Berühmte Sätze von Roth und Frolov [21, 69, 70] besagen, daß

$$\inf_{t_i} \text{disc}_2(\{t_1, \dots, t_n\}) \asymp n^{-1} \cdot (\log n)^{(d-1)/2}.$$

Insbesondere ist die Konvergenzordnung kaum abhängig von  $d$ , für das Integrationsproblem  $S_d(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$  auf  $F_d$  gilt

$$(7) \quad \text{card}(\varepsilon, d) \leq C_{d,\delta} \cdot \varepsilon^{-1-\delta}, \quad \delta > 0.$$

Zum Begriff der Diskrepanz siehe [4, 5, 17, 34, 42, 43] und Bemerkung 12.

Aufgrund von (7) könnte man vermuten, daß auch die Komplexität nur schwach von  $d$  abhängt und insbesondere, daß ein Fluch der Dimension hier nicht vorliegt. Diese Vermutung ist falsch, wie in [99] gezeigt wird. Es gilt nämlich folgende *exponentielle* untere Schranke für die  $L_2$ -Diskrepanz (mit gleichen Gewichten  $a_i = 1/n$ ) oder allgemeiner für Quadraturformeln  $Q_n$  mit positiven Gewichten.

**Satz 7.** *Betrachte das Integrationsproblem  $S_d(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$  auf den durch (6) definierten Räumen. Für beliebige  $d \in \mathbf{N}$  und Quadraturformeln  $Q_n$  mit positiven Gewichten  $a_i$  gilt*

$$(8) \quad e(Q_n, F_d) \geq e_0 \cdot \left( 1 - \left( \frac{8}{9} \right)^d n \right)_+^{1/2}. \quad \square$$

Zum Beweis benützt man Techniken für Hilberträume mit reproduzierendem Kern, wobei nur wesentlich ist, daß der Kern

$$K(x, t) = \prod_{\ell=1}^d (1 - \max(x_\ell, t_\ell))$$

von  $X_d$  (punktweise) positiv ist. Diese Techniken führen auch für sehr kleine Räume von analytischen Funktionen zu einem ähnlichen Ergebnis. In [48] wird ein zu Satz 7 analoges Ergebnis für den Raum

$$X_d^\infty = \{f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbf{R} \mid \|f\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}_0^d} \|D^\alpha f\|_2^2 < \infty\}$$

bewiesen. Man beachte, daß für  $X_d^\infty$  jede Konvergenzordnung erreichbar ist, es gilt

$$\text{card}(\varepsilon, d) \leq C_{d,k} \cdot \varepsilon^{-1/k}$$

für jedes  $k > 0$ . Dennoch gilt wieder eine exponentielle untere Schranke der Form (8).

**Bemerkung 8.** Diese Ergebnisse zeigen, daß der Begriff der *optimalen Konvergenzordnung* zu schwach ist, um das Phänomen des Fluchs der Dimension zu erfassen.

Der Beweis von Satz 7 funktioniert nur für Quadraturformeln mit *positiven* Gewichten. Untere Schranken, die nur für gewisse Methoden gelten, sehen wir als unbefriedigend an, es sind noch keine Schranken für die Komplexität. Tatsächlich benützen gewisse hocheffiziente Quadraturformeln (vom Smolyak-Typ, siehe Abschnitt 7) auch negative Gewichte und es war zunächst unklar, ob mit diesen Formeln polynomiale Algorithmen möglich sind. Dieses Problem wurde in [60] gelöst:

**Satz 9.** *Betrachte wieder das Integrationsproblem  $S_d(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$  auf den durch (6) definierten Räumen. Dann gilt:*

$$\text{card}(\varepsilon, d) \text{ ist nicht beschränkt durch } C \varepsilon^{-\gamma} d^\beta,$$

d.h. die  $L_2$ -Diskrepanz ist nicht tractable im Sinne von Definition 4. □

Der Beweis beruht darauf, daß der Tensorprodukt-Hilbertraum  $X_d$  eine Zerlegbarkeitseigenschaft besitzt. Der Raum  $X_1$  besitzt zwei nichttriviale orthogonale Unterräume  $X_{(0)}$  und  $X_{(1)}$ , so daß

$$f(x) = 0 \quad \text{für } x \notin D_{(0)}, f \in X_{(0)},$$

und

$$f(x) = 0 \quad \text{für } x \notin D_{(1)}, f \in X_{(1)},$$

mit disjunkten Mengen  $D_{(0)}$  und  $D_{(1)}$  positiven Maßes. Viele Hilberträume haben diese Eigenschaft und entsprechend allgemein ist dieser Zugang. Allerdings ist auch klar, daß Hilberträume von analytischen Funktionen diese Eigenschaft *nicht* besitzen. Deshalb ist noch unklar, ob z.B. für die Räume  $X_d^\infty$  der Fluch der Dimension gilt.

## 6 Ein abstrakter Existenzsatz: polynomiale Schranken für die Stern-Diskrepanz

Wir betrachten jetzt die Stern-Diskrepanz

$$\text{disc}^*({t_1, \dots, t_n}) = \sup_{x \in [0,1]^d} \left| x_1 \cdots x_d - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,x)}(t_i) \right|,$$

wobei  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]^d$ , und entsprechend die Stern-Diskrepanz  $\text{disc}^*(Q_n)$  von beliebigen Quadraturformeln  $Q_n$ . Mit Hilfe der Koksma-Hlawka-Ungleichung läßt sich dieser Begriff wieder als Fehler von  $Q_n$  interpretieren,

$$\text{disc}^*(Q_n) = e(Q_n, F_d),$$

allerdings muß dazu der Sobolevraum  $X_d$  (und damit seine Einheitskugel  $F_d$ ) modifiziert werden. Wir betrachten jetzt für  $d = 1$

$$X_1 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f(1) = 0, f \text{ ist abs. stetig}, f' \in L_1\}$$

mit der Norm  $\|f\| = \|f'\|_{L_1}$ . Für  $d > 1$  betrachten wir das  $d$ -fache Tensorprodukt

$$(9) \quad X_d = X_1 \otimes \dots \otimes X_1 \quad \text{mit} \quad \|f\| = \|f^{(1,1,\dots,1)}\|_{L_1}.$$

Es ist bekannt, daß

$$(10) \quad \inf_{t_i} \text{disc}^*({t_1, \dots, t_n}) \leq C_d \cdot n^{-1} \cdot (\log n)^{(d-1)}$$

und man vermutet, daß diese Ordnung optimal ist. Insbesondere ist die Konvergenzordnung wieder nahezu unabhängig von  $d$ , für das Integrationsproblem  $S_d(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$  auf  $F_d$  gilt

$$(11) \quad \text{card}(\varepsilon, d) \leq C_{d,\delta} \cdot \varepsilon^{-1-\delta}, \quad \delta > 0.$$

Aufgrund von Satz 2 gilt

$$\text{card}(\varepsilon, d) = \inf\{n \mid \text{disc}^*(Q_n) \leq \varepsilon \text{ für ein } Q_n\},$$

tatsächlich gelten unsere oberen Schranken von Satz 13 auch für die Stern-Diskrepanz mit gleichen Gewichten  $1/n$ .

**Bemerkung 10.** Mancher Leser wird an dieser Stelle verwundert sein. Satz 9 besagt, daß das Problem der  $L_2$ -Diskrepanz *nicht* tractable ist. Dabei geht es um die Frage, wie gut man *im Durchschnitt* das Volumen eines Quaders  $[0, x) \subset [0, 1]^d$  durch das Verhältnis  $\sum_{i=1}^n 1_{[0,x)}(t_i)$  der in ihm enthaltenen Punkte schätzen kann.

In diesem Abschnitt fragen wir, ob die Stern-Diskrepanz tractable ist. Dabei geht es um die Frage, wie gut man *im worst case* das Volumen eines Quaders  $[0, x) \subset [0, 1]^d$  durch das Verhältnis  $\sum_{i=1}^n 1_{[0,x)}(t_i)$  der in ihm enthaltenen Punkte schätzen kann. Dies scheint schwieriger zu sein und man wird vielleicht erwarten, daß dieses Problem ebenfalls dem Fluch der Dimension unterliegt.

Es ist aber so, daß wir in Definition 1 nicht *absolute* Fehler betrachten, sondern wir fordern bei der  $\varepsilon$ -Komplexität, daß der Fehler beschränkt ist durch  $\varepsilon e_0$ . Nun ist zwar bei der Stern-Diskrepanz  $e_0 = 1$  für alle  $d$ , so daß dieser Normie-

rungsfaktor hier nicht wesentlich ist. Bei der  $L_2$ -Diskrepanz gilt aber  $e_0 = 3^{-d/2}$ , anschaulich: die meisten Teilquader von  $[0, 1]^d$  sind sehr klein, daher ist die Schätzung „das Volumen beträgt  $0^d$ “ bei hoher Dimension *im Durchschnitt* ziemlich gut.

Würde man den Normierungsfaktor bei der  $L_2$ -Diskrepanz weglassen, dann wäre das Problem tractable, siehe die Arbeiten [37, 66, 86, 88].  $\square$

**Bemerkung 11.** Gibt es  $n = 3^d$  Punkte mit  $\text{disc}^*({t_1, \dots, t_n}) \leq 1/3$ , gilt also  $\text{card}(1/3, d) \leq 3^d$ ?

Dies war vor kurzem noch unbekannt, siehe [34, 82]. Wir werden sehen (Satz 13, Bemerkung 17), daß  $\text{card}(1/3, d)$  viel langsamer wächst als  $3^d$ . Wieder zeigt sich, daß günstige Aussagen über die Konvergenzordnung wie (11) wenig bedeuten für die Komplexität in Abhängigkeit von der Dimension.

Man mag überrascht sein über die Tatsache, daß es so schwer ist, den (bescheidenen) Fehler von  $\varepsilon = 1/3$  zu erreichen und kann sich zunächst fragen, wie viele Punkte man braucht, wenn man mit einem äquidistanten Gitter arbeitet – sicher die naheliegendste Konfiguration überhaupt. Seien also  $d, \ell \in \mathbb{N}$ , wir betrachten die  $n = \ell^d$  Punkte  $G_{d,\ell}$  mit Koordinaten der Form  $k/\ell$ , wobei  $k = 0, 1, \dots, \ell - 1$ . Dann gilt

$$\text{disc}^*(G_{d,\ell}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^d,$$

siehe [42]. Um also für ein (festes)  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  eine Stern-Diskrepanz  $\text{disc}^*(G_{d,\ell}) \leq \varepsilon$  zu erzielen, braucht man ungefähr

$$n_G(\varepsilon, d) \approx \left(\frac{1}{-\log(1 - \varepsilon)} d\right)^d$$

Punkte, man wähle  $\ell \approx (-\log(1 - \varepsilon))^{-1} d$ . Diese Zahl wächst also sogar superexponentiell in  $d$ , für  $\varepsilon = 1/3$  erhält man

$$n_G(1/3, d) \approx (2,47 d)^d. \quad \square$$

**Bemerkung 12.** Ich kann und will hier nicht die bekannten Konstruktionen von Punktmengen mit kleiner Stern-Diskrepanz diskutieren und verweise auf [17, 34, 42, 43]. Aber ich möchte wenigstens die einfachsten Punktmengen angeben, mit denen man die Schranke (10) zeigen kann. Sei  $b \geq 2$  eine natürliche Zahl und

$$i = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(i) b^j, \quad d_j(i) \in \{0, 1, \dots, b-1\}$$

die Entwicklung von  $i \in \mathbb{N}$  bezüglich der Basis  $b$ . Dann ist die *Van der Corput-Folge*  $(\gamma_b(i))_{i \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$\gamma_b(i) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(i) b^{-j-1}.$$

Aus naheliegenden Gründen spricht man auch von der „Spiegelung am Dezimal-komma“. Seien nun  $b_1, \dots, b_{d-1}$  die ersten  $d-1$  Primzahlen und sei  $n \in \mathbb{N}$  gege-

ben. Dann ist die  $d$ -dimensionale Hammersley-Folge der Länge  $n$  gegeben durch

$$t_i = (\gamma_{b_1}(i), \dots, \gamma_{b_{d-1}}(i), i/n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hammersley hat 1960 mit diesen Punkten die Schranke (10) bewiesen. □

Das folgende Resultat aus [56] ist (zumindest für die Autoren der Arbeit) überraschend.

**Satz 13.** Die Stern-Diskrepanz ist tractable, es gelten obere Schranken der Form<sup>7</sup>

$$\inf\{n \mid \text{disc}^*(t_1, \dots, t_n) \leq \varepsilon \text{ für gewisse } t_i\} \leq C_\delta \cdot \varepsilon^{-2-\delta} \cdot d^2$$

für jedes  $\delta > 0$ . □

**Beweisidee:** Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1. Teil: Analog zur  $L_2$ -Diskrepanz betrachten wir für gerades  $p$  die entsprechende  $L_p$ -Diskrepanz,

$$\text{disc}_p(\{t_1, \dots, t_n\}) = \left( \int_{[0,1]^d} \left( x_1 \cdots x_d - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,x]}(t_i) \right)^p dx \right)^{1/p}.$$

Wir berechnen das  $p$ -te Mittel von  $\text{disc}_p(\{t_1, \dots, t_n\})$ , d.h. das Integral

$$\text{av}_p(n, d) = \left( \int_{[0,1]^{nd}} \text{disc}_p(t_1, \dots, t_n)^p dt \right)^{1/p}, \quad t = (t_1, \dots, t_n)$$

und erhalten nach einigen Umformungen

$$(12) \quad \text{av}_p(n, d)^p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (-n)^{-j} \sum_{k=0}^j (k+p-j+1)^{-d} \cdot \#(j, k, n).$$

Hierbei sei  $\#(j, k, n)$  die Anzahl der Abbildungen von  $\{1, \dots, j\}$  nach  $\{1, \dots, n\}$  mit der Eigenschaft, daß das Bild genau  $k$  Elemente enthält. Diese Zahlen sind in der Kombinatorik gut bekannt, man kann sie auch mit den Stirling-Zahlen  $s(k, i)$  erster Art und den Stirling-Zahlen  $S(j, k)$  zweiter Art ausdrücken, es gilt

$$\#(j, k, n) = \sum_{i=0}^k s(k, i) S(j, k) n^i = \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^j.$$

Durch Umordnen der Terme folgt, daß  $\text{av}_p(n, d)^p$  ein Polynom in  $n^{-1}$  ist,

$$\text{av}_p(n, d)^p = \sum_{r=0}^p C(r, p, d) \cdot n^{-r},$$

wobei  $C(r, p, d)$  gegeben ist durch den Ausdruck

$$(-1)^r \sum_{i=0}^{p-r} \binom{p}{r+i} (-1)^i \sum_{k=i}^{i+r} (p+1-r+k-i)^{-d} s(k, i) S(i+r, k).$$

<sup>7</sup> Stefan Heinrich hat (im Juni 1999) die obere Schranke noch verbessert, seine Schranke ist von der Form  $C \varepsilon^{-2} d (\log d - \log \varepsilon)$ .

Aus den Definitionen folgt, daß  $C(p, p, d)$  verschwindet. Wir zeigen sogar, daß

$$C(r, p, d) = 0 \quad \text{für alle } r = 0, \dots, p/2 - 1.$$

Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 14.** *Es sei  $p = 2m$  eine ganze natürliche Zahl. Dann gilt für  $r = 0, \dots, m - 1$  und  $j = 0, \dots, r$*

$$\sum_{k=0}^{p-r+j} \binom{p}{r+k-j} (-1)^k s(k, k-j) S(k-j+r, k) = 0.$$

Obwohl diese Aussage einen rein kombinatorischen Charakter hat, haben wir keinen einfachen (Induktions-) Beweis gefunden. Wir beweisen das Lemma mit Hilfe des Satzes vom iterierten Logarithmus in der Fassung von [32]. Damit kann man dann die folgende obere Schranke für  $av_p(n, d)$  beweisen.

**Lemma 15.** *Für gerades  $p$  und  $d \in \mathbf{N}$  gilt*

$$av_p(n, d)^p = \sum_{r=p/2}^{p-1} C(r, p, d) \cdot n^{-r}.$$

Außerdem gilt

$$|C(r, p, d)| \leq \frac{(r+1)(4p)^p}{(p+1-r)^d},$$

und

$$av_p(n, d) \leq 4\sqrt{2} p (1+p/2)^{-d/p} n^{-1/2} \left( \sum_{i=0}^{p/2-1} n^{-i} \left( \frac{1+p/2}{1+p/2-i} \right)^d \right)^{1/p}.$$

2. Teil: Im allgemeinen ist  $\|f\|_\infty$  nicht nach oben beschränkt durch eine Funktion von  $\|f\|_p$ . Man kann sich aber überlegen, daß im Fall der Diskrepanzfunktion solche Ungleichungen gelten, es ergibt sich folgendes.

Zunächst betrachten wir eine Diskrepanz mit optimalem Gewicht, wir definieren für  $(t_1, \dots, t_n) \in [0, h]^{dn}$

$$d_\infty(t_1, \dots, t_n) = \inf_{c>0} \sup_{x \in [0,1]^d} \left| x_1 \cdots x_d - c \cdot \sum_{i=1}^n 1_{[0,x)}(t_i) \right|.$$

Wir beweisen Schranken für

$$\text{disc}(n, d) := \inf_{(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^{nd}} d_\infty(t_1, \dots, t_n)$$

und zeigen, daß die optimalen Gewichte  $c$  anstelle von  $1/n$ , die wir aus beweistechnischen Gründen benötigen, nur eine kleine Verbesserung bringen. Definiere

$$A_p^d(\varepsilon) = \int_{((1-\varepsilon)^{1/d}h, h)} (\varepsilon \cdot h^d - h^d + y_1 \cdots y_d)^p dy$$



und

$$B_p^d(\varepsilon) = \int_{[h,1]} (1 - y_1 \cdots y_d)^p dy,$$

wobei  $h = (1 + \varepsilon)^{-1/d}$ . Mit diesen Größen erhält man folgendes.

**Lemma 16.** Sei  $d \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon = \text{disc}(n, d) \in (0, 1)$  und  $h = (1 + \varepsilon)^{-1/d}$ . Dann gilt für alle geraden  $p$

$$av_p(n, d) \geq \min(A_p^d(\varepsilon), B_p^d(\varepsilon))^{1/p}.$$

Jetzt muß man noch untere Schranken für die Größen  $A_p^d(\varepsilon)$  und  $B_p^d(\varepsilon)$  zeigen und dann  $p$  optimal (in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  und  $d$ ) wählen, um den Beweis von Satz 13 zuende zu führen.  $\square$

**Bemerkung 17.** Die Beweisskizze zeigt, daß wir die *probabilistische Methode*, d.h. Mittelwertargumente, benutzen. Dieses Beweismittel liefert hier sehr gute Ergebnisse. Es ist jetzt eine große Herausforderung, ähnlich gute obere Schranken mit *konstruktiven* Methoden zu erhalten.

Wir haben numerische Experimente gemacht, wobei wir die exakte Formel (12) für  $av_p(n, d)$  und Lemma 16 benützt haben. Für  $\varepsilon = 1/3$  erhält man z.B.

$$\begin{aligned} \text{card}(1/3, 5) &\leq 148, \\ \text{card}(1/3, 10) &\leq 310, \\ \text{card}(1/3, 20) &\leq 637, \\ \text{card}(1/3, 40) &\leq 1293. \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse sind erstaunlich wenn man bedenkt, daß vor kurzer Zeit noch unklar war, ob  $3^d$  Punkte für einen Fehler  $\varepsilon = 1/3$  ausreichen.  $\square$

**Bemerkung 18.** Man kann jetzt fragen, ob  $\text{card}(\varepsilon, d)$  für festes  $\varepsilon$  überhaupt von der Dimension  $d$  abhängt. In der Arbeit [56] werden auch untere Schranken bewiesen. Für  $\varepsilon \geq 1/2$  genügen die zwei Punkte  $t_1 = (0, \dots, 0)$  und  $t_2 = (1, \dots, 1)$ , da

$$\text{disc}^*({t_1, t_2}) = 1/2.$$

Für jedes  $\varepsilon < 1/2$  gilt dagegen

$$\text{card}(\varepsilon, d) \geq C_\varepsilon \log d,$$

d.h. die Anzahl der Punkte muß mit  $d$  wachsen, und zwar mindestens wie  $\log d$  und höchstens wie  $d \log d$ .  $\square$

**Bemerkung 19.** In den Anwendungen hat man es oft mit Funktionen  $f$  zu tun, die von vielen Variablen abhängen,  $d$  ist groß. Häufig ist es jedoch so, daß  $f$  von manchen Variablen „stark“ abhängt und von anderen nur „schwach“. Klassische Verfahren können so eine a priori Information kaum ausnützen, es gibt höchstens die Möglichkeit, manche Variablen völlig zu ignorieren. Besser ist es, gewichtete Normen zu studieren, siehe die Arbeiten [30, 47, 60, 73, 89, 99].

Wir wollen hier nur eine *gewichtete Version der  $L_2$ -Diskrepanz* diskutieren, analog zu den Räumen (6) und zum Satz 7. Wir betrachten Funktionen mit  $d$  Va-

riablen, das Gewicht der  $i$ -ten Variablen sei  $w_i$ , es gelte

$$w_1 \geq w_2 \geq \dots > 0.$$

Für  $d = 1$  betrachten wir

$$X_1 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f(1) = 0, f \text{ ist abs. stetig}, f' \in L_2\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_w^2 = f(0)^2 + w^{-1} \|f'\|_{L_2}^2$$

und bezeichnen diesen Raum mit  $X_{1,w}$ . Für  $d > 1$  betrachten wir dann das Tensorprodukt

$$X_d = X_{1,w_1} \otimes \dots \otimes X_{1,w_d}$$

mit der Norm

$$\|f_1 \otimes \dots \otimes f_d\|_{X_d} = \|f_1\|_{X_{1,w_1}} \cdots \|f_d\|_{X_{1,w_d}}.$$

Es sei wieder  $F_d$  die Einheitskugel von  $X_d$  und wir betrachten das Integrationsproblem

$$S_d(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx.$$

Wir wissen schon (Satz 9), daß dieses Problem im Fall *gleicher Gewichte* intractable ist. Allgemeiner gilt:

- Es ist tractable genau dann, wenn  $\limsup_{d \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d w_j / \log d < \infty$ , siehe [60, 73].
- Für die Komplexität gilt eine dimensionsunabhängige obere Schranke der Form

$$\text{card}(\varepsilon, d) \leq C \cdot \varepsilon^{-2}$$

genau dann, wenn  $\sum_{j=1}^{\infty} w_j < \infty$ , siehe [60, 73].

- Gilt  $\sum_{j=1}^{\infty} w_j^{1/2} < \infty$ , so gilt eine obere Schranke der Form

$$\text{card}(\varepsilon, d) \leq C_\delta \cdot \varepsilon^{-1-\delta}, \quad \text{für } \delta > 0,$$

siehe [30]. Alle bisher genannten oberen Schranken werden mit der *probabilistischen Methode* bewiesen, konstruktive Methoden sind bisher nicht bekannt.

- Gilt sogar  $\sum_{j=1}^{\infty} w_j^{1/3} < \infty$ , so kann man die obere Schranke

$$\text{card}(\varepsilon, d) \leq C_\delta \cdot \varepsilon^{-1-\delta}, \quad \text{für } \delta > 0$$

konstruktiv mit einem Verfahren vom Smolyak-Typ erhalten, siehe [89].

Bei der probabilistischen Methode wird zum Beispiel der (worst case) Fehler  $e(Q_n, F_d)$  von Methoden

$$Q_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i)$$

gemittelt über alle  $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^{nd}$ , entsprechend der Berechnung von  $\text{av}_p(n, d)$  (für  $p = 2$ ) im Beweis von Satz 13. Es ist dann klar, daß ein  $Q_n$  existiert, dessen Fehler höchstens so groß ist wie dieser Mittelwert.  $\square$

## 7 Konstruktion polynomialer Algorithmen

Die bekannten *Konstruktionen* von polynomialen Algorithmen beruhen auf der Methode von Smolyak (1963) beziehungsweise auf verschiedenen Modifikationen dieser Methode, siehe auch [3, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 49–54, 62, 66, 67, 77, 78, 79, 81, 86, 89, 93]. Selbst diese lange Liste ist sehr unvollständig, weil ähnliche Methoden (unter Bezeichnungen wie *Blending-Methode* oder *dünne Gitter-Methode* oder *Boolesche Methode* oder auch *hyperbolic cross points method*) in verschiedenem Zusammenhang studiert wurden.

Wir wollen die Methode für die numerische Integration

$$S_d(f) = \int_{[-1,1]^d} f(x) dx$$

präsentieren, obwohl in den genannten Arbeiten auch allgemeinere Probleme studiert werden wie die Interpolation (und optimale Rekonstruktion) und die Lösung von Operatorgleichungen. Gegeben seien für  $d = 1$  Quadraturformeln<sup>8</sup>

$$U^i(f) = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i f(t_j^i).$$

Dabei sei  $m_{i+1} > m_i$  und zum Beispiel

$$(17) \quad m_1 = 1 \quad \text{und} \quad m_i = 2^{i-1} + 1 \quad \text{für } i > 1.$$

Für  $d > 1$  sind *Tensorproduktmethoden* gegeben durch

$$(U^{i_1} \otimes \dots \otimes U^{i_d})(f) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \dots \sum_{j_d=1}^{m_{i_d}} a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_d}^{i_d} f(t_{j_1}^{i_1}, \dots, t_{j_d}^{i_d}).$$

Man benötigt zur Auswertung dieser Formel

$$n = \prod_{\ell=1}^d m_{i_\ell}$$

Funktionswerte. Die Methode von Smolyak ist eine geschickte Linearkombination von solchen Tensorprodukten, mit der man das Ziel verfolgt, nur wenige Funktionswerte benutzen zu müssen, insbesondere wenn  $d$  groß ist. Sie ist gegeben durch

$$A(q, d) = \sum_{q-d+1 \leq |i| \leq q} (-1)^{q-|i|} \cdot \binom{d-1}{q-|i|} \cdot (U^{i_1} \otimes \dots \otimes U^{i_d}),$$

wobei  $q \geq d$ . Wählt man speziell die Clenshaw-Curtis-Formeln

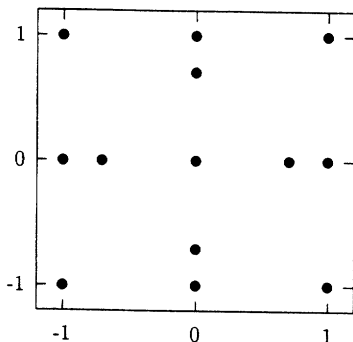
$$U^i(f) = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i f(t_j^i)$$

<sup>8</sup> Die  $a_j^i$  sind also reelle Zahlen. Wenn man Interpolationsprobleme oder Operatorgleichungen lösen will, dann kann man ähnlich vorgehen, die  $a_j^i$  sind dann Funktionen.

mit (17) und den Stützstellen

$$t_j^i = -\cos \frac{\pi(j-1)}{m_i-1}$$

(bzw.  $t_1^1 = 0$ ), so gelangt man zu der Methode, die in [50] und in verschiedenen anderen Arbeiten untersucht wurde. Man benützt hier für  $d = 1$  nicht-äquidistante Stützstellen und die Stützstellen von  $U^i$  werden von  $U^{i+1}$  mitbenützt. Beide Eigenschaften wirken sich günstig auf die Fehlerabschätzungen und auf die Stabilität der Methode aus. Wir zeigen die Stützstellen von  $A(4, 2)$ .



$A(4, 2)$ , 13 Stützstellen

**Satz 20.** Die  $A(q, d)$  sind für viele Klassen von Funktionen fast optimal, siehe [50, 51]. Für die in (6) und in (9) definierten Räume gilt

$$e(A(q, d), F_d) \leq n^{-1} \cdot (\log n)^{2(d-1)},$$

wobei  $n$  die Anzahl der Stützstellen von  $A(q, d)$  ist. Die Gewichte von  $A(q, d)$  sind relativ klein, es gilt  $\|A(q, d)\|_\infty \leq (\log n)^{d-1}$ . Die Formel  $A(k+d, d)$  ist exakt für Polynome vom Grad  $2k+1$  und benötigt für großes  $d$  nur  $n \approx 2^k d^k / k!$  Stützstellen, siehe [52].  $\square$

**Bemerkung 21.** Diese Methode ist konstruktiv in einem sehr starken Sinn. Die Gesamtrechnenzeit ist in jeder Dimension proportional zur Anzahl der Stützstellen, die zusätzlichen Rechnungen (z.B. zur Berechnung der Binomialkoeffizienten) fallen kaum ins Gewicht.

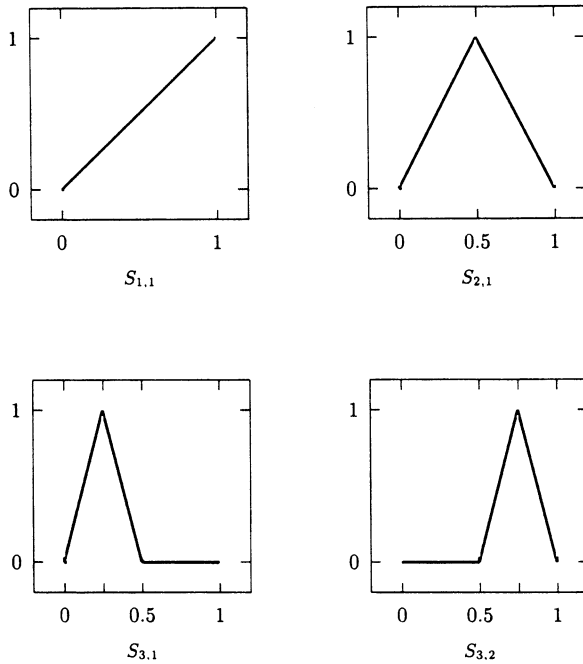
Es gibt auch „konstruktive“ obere Schranken, zum Beispiel konstruktive Versionen des Satzes von Tchakalov<sup>9</sup>, die so aufwendig sind, daß sie (ab etwa  $d = 4$ ) praktisch nicht durchgeführt werden können.  $\square$

**Bemerkung 22.** Explizite Fehlerabschätzungen (die keine unbekanntenen Konstanten enthalten) für Smolyak-Konstruktionen werden in [86] bewiesen. Der Witz an diesen Konstruktionen und Fehlerabschätzungen besteht darin, daß man

<sup>9</sup> Dieser Satz besagt folgendes. Sei  $V(d, k)$  der Raum der Polynome in  $d$  Variablen vom Grad maximal  $k$ . Dann existiert eine Quadraturformel mit positiven Gewichten, die auf  $V(d, k)$  exakt ist, wobei die Anzahl der Stützstellen höchstens so groß ist wie die Dimension von  $V(d, k)$ . Für eine konstruktive Version siehe [14].

lediglich gute Methoden (und Fehlerabschätzungen) für den eindimensionalen Fall  $d = 1$  benötigt. Alles andere liefert dann die Smolyak-Konstruktion und die entsprechenden *allgemeingültigen* Fehlerabschätzungen für *Tensorproduktprobleme*. In verschiedenen Arbeiten wird die Methode modifiziert, siehe die eingangs aufgezählten Arbeiten.  $\square$

Zum Abschluß dieser Arbeit diskutieren wir die Berechnung von *Wiener-Integralen*, wiederum mit einer Methode, die Ideen von Smolyak aufgreift und modifiziert, siehe [54, 79]. Wir beginnen mit der *Lévy-Ciesielski-Zerlegung* des Wiener-Maßes mit Hilfe von *Schauder- oder Hut-Funktionen*.



Die Schauder-Funktionen  $S_{j,k}$  sind definiert für  $k = 1, \dots, m(j)$ , wobei  $m(j) = 2^{j-2}$  für  $j \geq 2$  und  $m(1) = 1$ . Betrachte standardnormalverteilte unabhängige Zufallsvariablen  $Y_{j,k}$  und Varianzen  $\sigma^2(1) = 1$ ,  $\sigma^2(j) = 2^{-j}$  für  $j \geq 2$ . Dann sei für  $d = 2^{s-1}$

$$W^{(d)} = \sum_{j=1}^s \sigma(j) \sum_{k=1}^{m(j)} Y_{j,k} \cdot S_{j,k}$$

die  $s$ -te Lévy-Ciesielski-Approximation an das Wiener-Maß. Für  $s \rightarrow \infty$  würde man schwache Konvergenz gegen das Wiener-Maß erhalten. Wir approximieren nun Wiener-Integrale

$$E(f) = \int_{C[0,1]} f(x) dW(x)$$

durch die endlichdimensionalen Erwartungswerte oder Integrale  $E(f(W^{(d)}))$ . Dabei kann man die Ideen von Bemerkung 19 benutzen, weil der Einfluß der Variablen  $Y_{j,k}$  mit steigendem  $j$  fällt.

Wir benutzen eine Modifikation der Smolyak-Methode von der Form

$$A(q, d) = \sum_{q-d+1 \leq |i| \leq q} (-1)^{q-|i|} \cdot \binom{d-1}{q-|i|} \cdot (U^{i_1-\beta_1} \otimes \dots \otimes U^{i_d-\beta_d}),$$

wobei die  $\beta_j \in \mathbf{N}_0$  so gewählt werden, daß die Anzahl der Stützstellen von  $U^{i-\beta_j}$  ungefähr  $\sigma(j)$  mal so groß ist wie die Anzahl der Stützstellen von  $U^i$ . Schließlich definieren wir Quadraturformeln für das Wiener-Maß durch

$$A(s)(f) = A(s-1+d, d)(f \circ W^{(d)}).$$

**Bemerkung 23.** Man berechnet Wiener-Integrale meist mit *Monte-Carlo-Methoden* oder auch mit zahlentheoretischen Methoden, sog. *Quasi-Monte-Carlo-Methoden*, bei denen Folgen kleiner Diskrepanz benutzt werden. Diese Methoden sind recht zuverlässig, aber langsam. Insbesondere können sie die (evtl. vorhandene) Glattheit des Integranden nur schlecht ausnützen.

Bei genügend glatten Integranden ist die neue Methode überlegen, in [79] werden *worst case* Fehlerabschätzungen für eine Klasse von analytischen Funktionen bewiesen. Wir zeigen Rechenergebnisse von Achim Steinbauer (Erlangen) für den Test-Integranden

$$f(x) = \cos\left(\int_0^1 x(t) dt\right).$$

Verglichen wird das neue Verfahren  $A(s)$  mit der Monte-Carlo-Methode (MC) und der idealisierten Monte-Carlo-Methode (durchgezogene Linie)<sup>10</sup>, außerdem mit einer Quasi-Monte-Carlo-Methode (QMC), bei der mit Hilfe der Sobol-Folge Pfade in naiver Weise erzeugt werden. Schließlich bezeichnet QMC-LC eine Quasi-Monte-Carlo-Methode, bei der die Pfade mit Hilfe der Lévy-Ciesielski-Zerlegung erzeugt werden, siehe auch [40]. Gezeigt wird jeweils ein „typisches“ Rechenergebnis. Das tatsächliche Ergebnis hängt bei den Methoden MC, QMC und QMC-LC vom Startwert bei den Zufallszahlen ab, es kann daher auch besser oder schlechter sein.

Abgetragen ist die Anzahl der gültigen Ziffern, d.h. die Größe

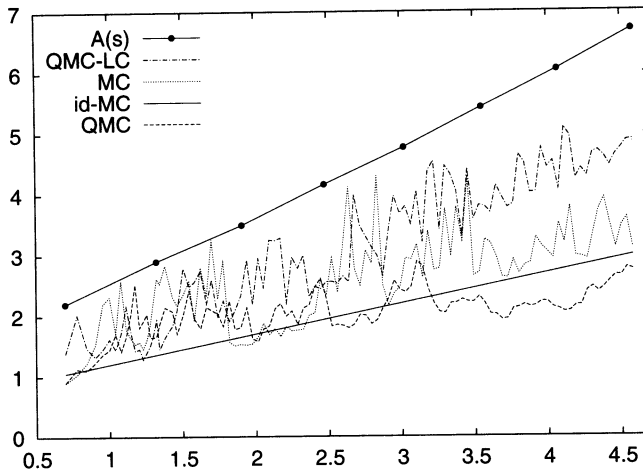
$$-\log_{10} \frac{|S(f) - S_n(f)|}{|S(f)|}$$

im Verhältnis zu  $\log_{10} n$ , wobei  $n$  die Anzahl der Pfade (=Stützstellen) ist,  $S(f)$  der wahre Erwartungswert und  $S_n(f)$  der berechnete Näherungswert.  $\square$

## 8 Schlußbemerkung

Ich habe manche Probleme nur angedeutet und oft nur wichtige Spezialfälle von allgemeineren Resultaten genannt. Für Interessierte habe ich deshalb viele An-

<sup>10</sup> Hier wird als Fehler die Streuung aufgetragen.



regungen für die weitere Lektüre gegeben. Besonders hinweisen möchte ich noch auf die aktuelle Einführung [84]. Sie enthält sehr viele motivierende Beispiele, Anregungen und offene Probleme, allerdings kaum Beweise.

Ich danke meinen Freunden und Kollegen Klaus Meer, Knut Petras, Klaus Ritter, Achim Steinbauer und Henryk Woźniakowski. Sie haben eine erste Version der Arbeit gelesen und Hinweise zur Verbesserung gegeben. Besonders danke ich Herrn Triebel für die Ermunterung zu dieser Arbeit.

## Literatur

- [1] N. S. Bakhvalov (1959): On approximate computation of integrals. *Vestnik MGU, Ser. Math. Mech. Astron. Phys. Chem.* **4**, 3–18. [Russisch]
- [2] N. S. Bakhvalov (1971): On the optimality of linear methods for operator approximation in convex classes of functions. *USSR Comput. Maths. Math. Phys.* **11**, 244–249.
- [3] V. Barthelmann, E. Novak, K. Ritter (1998): High dimensional polynomial interpolation on sparse grids. *Adv. in Comput. Math.*, erscheint.
- [4] J. Beck, W. Chen (1987): *Irregularities of Distribution*. Cambridge University Press.
- [5] J. Beck, V. T. Sós (1995): Discrepancy theory. In: *Handbook of Combinatorics*, R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, eds., Elsevier Science.
- [6] R. Bellman (1957): *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton NJ.
- [7] L. Blum, M. Shub, S. Smale (1989): On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines. *Bull. of the AMS* **21**, 1–46.
- [8] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, S. Smale (1998): *Complexity and Real Computation*. Springer, New York.
- [9] C. G. E. Boender, H. E. Romeijn (1995): Stochastic methods. In: *Handbook of global optimization*. R. Horst, P. M. Pardalos (eds.), Kluwer, pp. 829–869.
- [10] V. Brattka, P. Hertling (1998): Feasible real random access machines. *J. Complexity* **14**, 490–526.
- [11] H.-J. Bungartz, M. Griebel (1999): A note on the complexity of solving Poisson's equation for spaces of bounded mixed derivatives. *J. Complexity*, erscheint.
- [12] P. Bürgisser, M. Clausen, A. Shokrollahi (1998): *Algebraic Complexity Theory*. Springer-Verlag.

- [13] R. Cools, E. Novak, K. Ritter (1999): Smolyak's construction of cubature formulas of arbitrary trigonometric degree. *Computing* **62**, 147–162.
- [14] P. J. Davis (1967): A construction of nonnegative approximate quadratures. *Math. Comp.* **21**, 578–582.
- [15] F.-J. Delvos, W. Schempp (1989): *Boolean Methods in Interpolation and Approximation*. Pitman Research Notes in Mathematics Series **230**, Longman, Essex.
- [16] R. A. DeVore (1998): Nonlinear approximation. *Acta Numerica* **7**, 51–150.
- [17] M. Drmota, R. F. Tichy (1997): *Sequences, Discrepancies and Applications*. Lecture Notes in Mathematics **1651**, Springer.
- [18] E. G. D'yakonov (1996): *Optimization in Solving Elliptic Problems*. CRC Press, Boca Raton.
- [19] K. Frank, S. Heinrich (1996): Computing discrepancies of Smolyak quadrature rules. *J. Complexity* **12**, 287–314.
- [20] K. Frank, S. Heinrich, S. Pereverzev (1996): Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes. *J. Complexity* **12** (1996), 17–34.
- [21] K. K. Frolov (1980): Upper bounds on the discrepancy in  $L_p$ ,  $2 \leq p < \infty$ . *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **252**, 805–807.
- [22] A. C. Genz (1986): Fully symmetric interpolatory rules for multiple integrals. *SIAM J. Numer. Anal.* **23**, 1273–1283.
- [23] Th. Gerstner, M. Griebel (1998): Numerical integration using sparse grids. *Num. Algorithms* **18**, 209–232.
- [24] M. Griebel, M. Schneider, Ch. Zenger (1992): A combination technique for the solution of sparse grid problems. In: *Iterative Methods in Linear Algebra*, Beauwens R. and de Groen P. (eds.), Elsevier, North-Holland, pp. 263–281.
- [25] S. Heinrich (1993): Random approximation in numerical analysis. In *Proc. of the Functional Analysis Conf., Essen 1991*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. (K. D. Bierstedt et al., eds.), vol 150, Marcel Dekker, New York, pp. 123–171.
- [26] S. Heinrich (1998): Monte Carlo complexity of global solution of integral equations. *J. Complexity* **14**, 151–175.
- [27] S. Heinrich, J.-D. Kern (1991): Parallel information-based complexity. *J. Complexity* **7**, 339–370.
- [28] P. Hertling (1996): Topological complexity with continuous operations. *J. Complexity* **12**, 315–338.
- [29] F. J. Hickernell (1998): A generalized discrepancy and quadrature error bound. *Math. Comp.* **67**, 299–322.
- [30] F. J. Hickernell, H. Woźniakowski (1999): Integration and approximation in arbitrary dimension. Preprint.
- [31] C. Katscher, E. Novak, K. Petras (1996): Quadrature formulas for multivariate convex functions. *J. Complexity* **12**, 5–16.
- [32] J. Kiefer (1961): On large deviations of the empiric d.f. of vector chance variables and a law of the iterated logarithm. *Pacific J. Math.* **11**, 649–660.
- [33] M. A. Kon, E. Novak (1990): The adaption problem for approximating linear operators. *Bull. of the AMS* **23**, 159–165.
- [34] G. Larcher (1998): Digital point sets: analysis and application. In: P. Hellekalek, G. Larcher, eds., *Lecture Notes in Statistics* **138**, 167–222. Springer Verlag.
- [35] G. G. Lorentz, M. v. Golitschek, Y. Makovoz (1996): *Constructive Approximation. Advanced Problems*. Springer Grundlehren 304, Springer Verlag.
- [36] P. Mathé (1990):  $s$ -numbers in information-based complexity. *J. Complexity* **6**, 41–66.
- [37] J. Matoušek (1998): The exponent of discrepancy is at least 1.0669. *J. Complexity* **14**, 448–453.
- [38] K. Meer, C. Michaux (1997): A survey on real structural complexity theory. *Bull. Belg. Math. Soc.* **4**, 113–148.
- [39] J. M. Melenk (1999): On  $n$ -widths for elliptic problems. Preprint der ETH-Zürich.
- [40] W. J. Morokoff (1998): Generating quasi-random paths for stochastic processes. *SIAM Review* **40**, 765–788.
- [41] A. Neumayer (1997): Molecular modeling of proteins and mathematical prediction of protein structure. *SIAM Review* **39**, 407–460.



- [42] H. Niederreiter (1992): *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM, Philadelphia.
- [43] H. Niederreiter, C. Xing (1998): Nets,  $(t, s)$ -sequences, and algebraic geometry. In: P. Hellekalek, G. Larcher, eds., *Lecture Notes in Statistics* **138**, 267–302. Springer Verlag.
- [44] E. Novak (1988): *Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis*. Lecture Notes in Mathematics **1349**, Springer.
- [45] E. Novak (1995): The real number model in numerical analysis. *J. Complexity* **11**, 57–73.
- [46] E. Novak (1996): On the power of adaption. *J. Complexity* **12**, 199–237.
- [47] E. Novak (1999): Intractability results for positive quadrature formulas and extremal problems for trigonometric polynomials. *J. Complexity*, erscheint.
- [48] E. Novak (1999): Is there a curse of dimension for integration? Eleventh Int. Conf. on Domain Decomposition Methods. C.-H. Lai, P. E. Bjørstad, M. Cross, O. B. Widlund, eds., erscheint.
- [49] E. Novak, K. Ritter (1996): Global optimization using hyperbolic cross points. In: State of the art in global optimization: computational methods and applications. C. A. Floudas, P. M. Pardalos (eds.), Kluwer, Dordrecht, 19–33.
- [50] E. Novak, K. Ritter (1996): High dimensional integration of smooth functions over cubes. *Numer. Math.* **75**, 79–97.
- [51] E. Novak, K. Ritter (1997): The curse of dimension and a universal method for numerical integration. Multivariate approximation and Splines, G. Nürnberger, J. W. Schmidt, G. Walz (eds.), ISNM **125**, Birkhäuser, 1997, pp. 177–188.
- [52] E. Novak, K. Ritter (1997): Simple cubature formulas with high polynomial exactness. *Constructive Approximation*, erscheint.
- [53] E. Novak, K. Ritter, R. Schmitt, A. Steinbauer (1997): On an interpolatory method for high dimensional integration. *J. Comput. Appl. Math.*, erscheint.
- [54] E. Novak, K. Ritter, A. Steinbauer (1998): A multiscale method for the evaluation of Wiener integrals. *Approximation Theory IX, Volume 2*: C. K. Chui, L. L. Schumaker (eds.), 251–258.
- [55] E. Novak, I. H. Sloan, H. Woźniakowski (1997): Tractability of tensor product linear operators. *J. Complexity* **13**, 387–418.
- [56] E. Novak, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski (1999): Polynomial upper bounds for the star-discrepancy. Preprint.
- [57] E. Novak, H. Woźniakowski (1996): Topological complexity of zero finding. *J. Complexity* **12**, 380–400.
- [58] E. Novak, H. Woźniakowski (1998): Complexity of linear problems with a fixed output basis. *J. Complexity*, erscheint.
- [59] E. Novak, H. Woźniakowski (1999): On the cost of uniform and nonuniform algorithms. *Theoretical Computer Science* **219**, 301–318.
- [60] E. Novak, H. Woźniakowski (1999): Intractability results for integration and discrepancy. Preprint.
- [61] S. V. Pereverzev (1996): *Optimization of Methods for Approximate Solution of Operator Equations*. Nova Science, New York.
- [62] K. Petras (1999): On the Smolyak cubature error for analytic functions. Preprint.
- [63] A. Pietsch (1987): *Eigenvalues and  $s$ -Numbers*. Cambridge University Press. Cambridge.
- [64] A. Pinkus (1985):  *$n$ -Widths in Approximation Theory*. Springer, Berlin.
- [65] A. Pinkus (1986):  $n$ -widths and optimal recovery. In: *Approximation Theory*, C. de Boor, ed., Proc. of Symp. in Applied Math. **36**, AMS, 51–66.
- [66] L. Plaskota (1999): The exponent of discrepancy of sparse grids is at least 2.1933. Preprint.
- [67] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski (1999): A new algorithm and worst case complexity for Feynman-Kac path integration. Preprint.
- [68] K. Ritter (1999): *Average Case Analysis of Numerical Problems*. Erscheint in der Reihe *Lecture Notes in Mathematics* des Springer Verlags.
- [69] K. F. Roth (1954): On irregularities of distributions. *Mathematika* **1**, 73–79.
- [70] K. F. Roth (1980): On irregularities of distributions IV. *Acta Arithm.* **37**, 67–75.

- [71] S. Schäffler (1995): Unconstrained global optimization using stochastic integral equations. *Optimization* **35**, 43–60.
- [72] I. H. Sloan, H. Woźniakowski (1997): An intractability result for multiple integration. *Math. Comp.* **66**, 1119–1124.
- [73] I. H. Sloan, H. Woźniakowski (1998): When are quasi-Monte Carlo algorithms efficient for high dimensional integrals? *J. Complexity*, **14**, 1–33.
- [74] S. Smale (1987): On the topology of algorithms. *J. Complexity* **3**, 81–89.
- [75] S. Smale (1990): Some remarks on the foundations of numerical analysis. *SIAM Review* **32**, 211–220.
- [76] S. Smale (1998): Mathematical problems for the next century. *Math. Intell.* **20**, 7–15.
- [77] S. A. Smolyak (1963): Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Sov. Math. Doklady* **4**, 240–243.
- [78] F. Sprengel (1997): Interpolation and wavelets on sparse Gauss-Chebyshev grids. In: *Multivariate Approximation*, W. Haussmann et al., eds., *Math. Res.* **101**, pp. 269–286, Akademie Verlag, Berlin.
- [79] A. Steinbauer (1999): Quadrature formulas for the Wiener measure. *J. Complexity*, erscheint.
- [80] V. N. Temlyakov (1994): *Approximation of Periodic Functions*. Nova Science, New York.
- [81] S. Tezuka (1998): Financial applications of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods. In: *Random and Quasi-random point sets*. P. Hellekalek, G. Larcher (eds.), *Lecture Notes in Statistics* **138**, Springer-Verlag.
- [82] E. Thiérmard (1999): Computing bounds for the star discrepancy. Preprint.
- [83] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Information-Based Complexity*. Academic Press, Boston, 1988.
- [84] J. F. Traub, A. G. Werschulz, *Complexity and Information*. Cambridge University Press, 1998.
- [85] V. A. Vassiliev (1996): Topological complexity of root-finding algorithms. In: *The Mathematics of Numerical Analysis*, J. Renegar, M. Shub, S. Smale (eds.), *Lectures in Applied Mathematics* **32**, AMS, pp. 831–856.
- [86] G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski (1995): Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems. *J. Complexity* **11**, 1–56.
- [87] G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski (1996): On tractability of path integration. *J. Math. Phys.* **37**, 2071–2088.
- [88] G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski (1997): The exponent of discrepancy is at most 1.4778.... *Math. Comp.* **66**, 1125–1132.
- [89] G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski (1999): Weighted tensor-product algorithms for linear multivariate problems. *J. Complexity*, erscheint.
- [90] K. Weihrauch (1995): A simple introduction to computable analysis. *Informatik-Berichte der Fernuniversität Hagen* **171-2**.
- [91] K. Weihrauch (1998): A refined model of computation for continuous problems. *J. Complexity* **14**, 102–121.
- [92] A. G. Werschulz (1991): *The Computational Complexity of Differential and Integral Equations*. Oxford University Press, Oxford.
- [93] A. G. Werschulz (1996): The complexity of the Poisson problem for spaces of bounded mixed derivatives. In: *The Mathematics of Numerical Analysis* (J. Renegar, M. Shub, S. Smale, eds.), *Lect. in Appl. Math.* **32**, pp. 895–914, AMS, Providence.
- [94] G. Winkler (1995): *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*. Springer Verlag.
- [95] H. Woźniakowski (1991): Average case complexity of multivariate integration. *Bull of AMS (new series)* **24**, 185–191.
- [96] H. Woźniakowski (1994): Tractability and strong tractability of linear multivariate problems. *J. Complexity* **10** (1994), 96–128.
- [97] H. Woźniakowski (1994): Tractability and strong tractability of multivariate tensor product problems. *J. of Computing and Information*, **4**, 1–19.
- [98] H. Woźniakowski (1998): Why does information-based complexity use the real number model? *Theoretical Computer Science*, erscheint.

- [99] H. Woźniakowski (1999): Efficiency of quasi-Monte Carlo algorithms for high dimensional integrals. Erscheint in Proceedings of MCQMC conference, Claremont, USA, 1998, H. Niederreiter and J. Spanier, eds.

Erich Novak  
Mathematisches Institut  
Universität Erlangen-Nürnberg  
Bismarckstr. 1 1/2  
D-91054 Erlangen  
novak@mi.uni-erlangen.de

*(Eingegangen 1.7.1999)*

## Mathematics arising from suspension bridge dynamics: recent developments

P. J. McKenna, Cork, Ireland, K. S. Moore, Ann Arbor, MI, USA

### 1 Introduction

Since the late eighties, there has been a resurgence in interest in the mathematics arising from large oscillations in early suspension bridges. Recent progress in nonlinear analysis has given new insights into this phenomenon and has raised new research problems for present-day mathematicians. The goal of this paper is to give a brief survey of the progress over the last several years.

The older accounts of suspension bridge oscillations, which can be found in [1] and [2], describe the original behaviour of early bridges such as the Golden Gate, (now completely re-designed) and the Tacoma Narrows. Here are some of the phenomena that they describe:

1. the bridges were prone to large-scale oscillation, both torsional and purely vertical
2. occurrence of this large-scale oscillation is dependent on initial conditions and can be started by a single gust [18]
3. large vertical oscillations could rapidly change, virtually instantaneously, to torsional oscillation
4. these bridges exhibit localised travelling wave behaviour
5. for small oscillation, the observed behaviour is almost perfectly linear.

Earlier papers in the mathematical literature focussed on the periodic vertical oscillation and the travelling waves, [11,14,15]. Since these were *prima facie* evidence of nonlinearity, these papers concentrated on developing a simple mathematical model which exhibited these behaviours; thus, they concentrated the simple model equation

$$(1) \quad u_{tt} + u_{xxxx} + bu^+ = W_0.$$

Here, the function  $u(x, t)$  represents the downward deflection of the beam from the *unloaded* state  $u \equiv 0$ . The two main forces are the cables, which obey a one sided Hooke's law, holding the beam up, and the force of gravity which is pushing it down.

To study periodic solutions, we impose hinged-end boundary conditions on the beam of length  $L$ ; to study travelling wave solutions, we search for homoclinic

solutions of equation (1) on the real line. The first of these approaches is found in [11,15], the second in [14].

These early papers left two lines of development open. First, as they were largely qualitative, there was no attempt to match the historical behaviour of suspension bridges, specifically, the large amplitude torsional oscillations which preceded the collapse of the Tacoma Narrows Bridge in 1940. Moreover, two of the most fascinating behaviours observed at Tacoma Narrows were not studied, namely, the dramatic change from vertical to torsional motion and the changing nodal structure of the torsional oscillations.

Substantial progress has been made on these questions in the last several years. In the second section we summarise recent results for a simple ordinary differential equation model for the torsional motion. These results suggest the existence of large amplitude periodic torsional solutions and cast surprising light on the transition from vertical to torsional motion.

In the third section we describe recent results on the partial differential equation extension of the simpler model. We present numerical and theoretical evidence of the existence of multiple periodic torsional solutions. We observe that the qualitative properties such as amplitude, frequency, and nodal structure of the computed solutions match the behaviour observed at Tacoma Narrows.

The other line of development that was left open was in connection with the discovery of the new class of travelling wave solutions to (1).

Whenever one discovers a new class of travelling waves, it is natural to wonder if they have new unexplained stability and interaction properties. It is precisely this type of question which leads to the development of large new areas of mathematical theory such as the field of solitons.

As a result of extensive numerical experimentation over several years, we now have considerable information on the properties of these waves. As one might have hoped, they present a wealth of intriguing new behaviours, which are so far lacking in mathematical foundation. We describe some of these in the fourth section.

## 2 The ordinary differential equation model

This model was derived in [12], where more details can be found. We view a horizontal cross section of the roadbed as a rod of length  $2l$  suspended by cables; see Figure 1 of [12]. Let  $y(t)$  be the downward deflection at time  $t$  of the center of gravity of the rod from the unloaded state and let  $\theta(t)$  be the torsional deflection at time  $t$  from horizontal.

The equations describing the dynamics of the model are

$$(2) \quad (1/3)ml^2\ddot{\theta} = (Kl) \cos \theta((y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+)$$

$$(3) \quad m\ddot{y} = -K((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + mg.$$

Here  $m$  is the mass per unit length of the rod,  $l$  is half the width of the roadbed,  $K$  is the Hooke's constant for a unit length of the cable. If we choose these constants according to the historical record, [1], and add small damping and some forcing term, we find that  $m = 2000$ ,  $l = 6$  and  $K = 1000$ , [12]. Small damping

should be approximately  $\delta = 0.01$  for these type of structures, so if we add a forcing term  $f(t)$  only in the torsional direction, we end up with the coupled system

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} = -0.01\dot{\theta} + (0.2) \cos \theta [(y - 6 \sin \theta)^+ - (y + 6 \sin \theta)^+] + f(t) \\ \ddot{y} = -0.01\dot{y} - (0.2)[(y - 6 \sin \theta)^+ + (y + 6 \sin \theta)^+] + g \end{array} \right\}$$

Notice that, if we assume that there is no torsional motion, the equations simplify to a single nonlinear equation for the vertical motion, namely

$$(5) \quad \ddot{y} = -0.01\dot{y} - (0.4)(y)^+ + g$$

whereas if we assume that the cables never lose tension (i.e., that  $y \pm l \sin \theta \geq 0$ ), we obtain the uncoupled equations

$$(6) \quad \ddot{\theta} = -0.01\dot{\theta} - (2.4) \cos \theta \sin \theta + f(t)$$

for the torsional motion and

$$(7) \quad \ddot{y} = -0.01\dot{y} - (.4)y + g$$

for the vertical motion.

Finally, if we assume that the torsional oscillations are small, we obtain the linear equation for torsional motion

$$(8) \quad \ddot{\theta} = -0.01\dot{\theta} - 2.4\theta + f(t).$$

This is the point at which the discussion starts in the engineering literature,[18].

As one makes progressively greater assumptions on the oscillations, and thereby simplifies the equations, one must consider whether some of the phenomena natural to the problem are being lost. Of course, this is the central dilemma of almost all applied mathematics; how much can one simplify a problem before it is simplified out of physical reasonability?

The recent results which we summarise here partially answer this question. First, linearising the pendulum equation (6) removes large amplitude periodic solutions whose frequency and amplitude match the behaviour observed at Tacoma Narrows before its collapse.

Second, the decoupling of the two equations by the assumption that the cables never lose tension removes the most remarkable property of that system, namely that large vertical oscillations with tiny torsional perturbations can give rise to instability of the vertical motion into the torsional dimension, thereby providing an explanation for the instantaneous transition to torsional motion observed before the Tacoma Narrows collapse.

We illustrate these results with two examples. First we examine the response of (6) under small periodic forcing of the form  $f(t) = \lambda \sin(\mu t)$ . We choose  $\lambda$  sufficiently small to produce the appropriate behaviour near equilibrium and for this experiment we take  $\mu = 1.2$  to approximately match the period of the torsional oscillations observed at Tacoma Narrows on the day of its collapse. Of course, if we solve the linear equation (8), the effect of any initial condition will decay over time and the long term behaviour will depend entirely on the forcing term.

This is not the case for solutions the nonlinear equation (6). In the top graph of figure 1, we see that under small torsional initial displacement, after large time, the span settles down to small amplitude periodic oscillation, as expected.

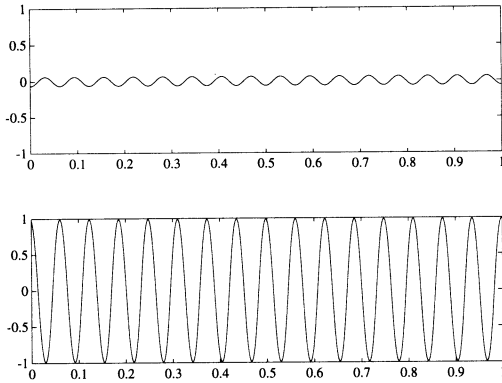


Fig. 1 Eventual behaviour of the trigonometrically correct oscillator combining a large torsional push (bottom) or small (top), both with a small torsional forcing term

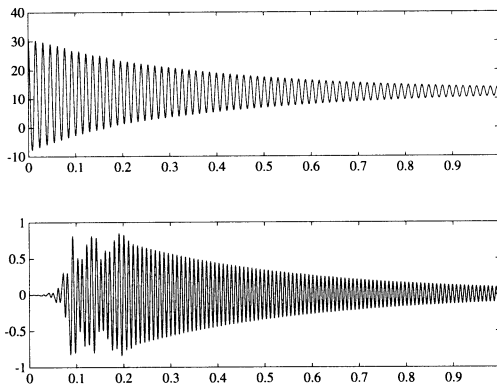


Fig. 2 If the vertical initial displacement is sufficiently large that the cables slacken, a sudden transition to large amplitude torsional motion occurs

However, the bottom graph shows that the effect of a larger initial push does not decay; even after large time the span is oscillating periodically with large amplitude. We note that the amplitude and frequency of this solution match the behaviour of the Tacoma Narrows. We found similar numerical evidence of multiple periodic solutions for  $\mu$  ranging from 1.1 to about 1.5; see [12,13,16] for details. Moreover, the existence of multiple periodic weak solutions to undamped equations of the form (6) was proven in [13].

In our second example we examine solutions to the coupled system (4). We note first that if the torsional forcing and initial conditions are zero, under any vertical initial conditions there is no torsional response and the vertical oscillations eventually die down. If we introduce tiny torsional forcing and initial conditions and vertical initial conditions which are small enough that the cables never slacken, then the torsional and vertical motions remain uncoupled and small amplitude torsional oscillation results. However, under the same tiny torsional forcing and initial conditions, if the vertical impulse is sufficiently large that the cables lose tension for several periods, then large amplitude torsional oscillation results; see figure 2.

Because the motion is unstable in the vertical direction, the tiny torsional displacement combines with the large vertical displacement to induce torsional oscillation of about one radian.

### 3 The partial differential equation model

In the previous section, we considered the torsional and vertical motions of a horizontal cross section of the main span of a suspension bridge. In this section, we extend the analysis of section 2 to the entire length of the span. We treat the span as a beam of length  $L$  and width  $2l$  suspended by cables which, as in section 2, resist elongation according to Hooke's law, but do not resist compression.

Let  $\theta(x, t)$  be the angular deflection at time  $t$  of the horizontal cross section located at position  $x$  along the length of the span and let  $y(x, t)$  be the downward displacement from the unloaded state at time  $t$  of the center of the cross section. Then the vertical and torsional motions satisfy

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{tt} - \varepsilon \theta_{xx} = \frac{3K}{ml} \cos \theta [(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+] - \delta \theta_t + \lambda f(x, t) \\ y_{tt} + \varepsilon y_{xxxx} = -\frac{K}{m} [(y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+] - \delta y_t + g \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = y(0, t) = y(L, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(L, t) = 0 \end{array} \right\}$$

where  $\delta$  is a damping constant,  $\varepsilon$  is a physical constant related to the density and the shear modulus of elasticity of the beam,  $f(x, t)$  is the external torsional force, and  $g, K$ , and  $m$  are as defined in section 2. The boundary conditions reflect the fact that the ends of the span are hinged.

If we choose the physical constants according to the data on the Tacoma Narrows Bridge, [1], impose initial conditions, and solve the initial value problem numerically, our findings are consistent with the results in section 2, specifically, that even in the presence of tiny torsional initial displacement and forcing, a large vertical impulse can yield the dramatic change from vertical to torsional motion that was observed at Tacoma Narrows on the day of its collapse.

Assume now that the cables remain in tension; i.e., that  $y \pm l \sin \theta \geq 0$ . Then the equations in (9) become uncoupled and the torsional motion satisfies the damped, forced Sine-Gordon equation

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{tt} - \varepsilon \theta_{xx} = -\frac{6K}{m} \cos \theta \sin \theta - \delta \theta_t + \lambda f(x, t) \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \end{array} \right\}.$$

In [16], we proved the existence of multiple periodic weak solutions to undamped equations of this form. To study the structural and dynamic properties of the periodic solutions, we choose the physical constants in accordance with the historical data [1], which yields

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{tt} - .01 \theta_{xx} = -2.4 \cos \theta \sin \theta - .01 \theta_t + \lambda f(x, t) \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \end{array} \right\}.$$

For a cross section similar to the Tacoma Narrows bridge, wind tunnel experiments indicate that aerodynamic forces should induce approximately sinusoidal oscillations of amplitude three degrees [17], so in our numerical study of (11) we



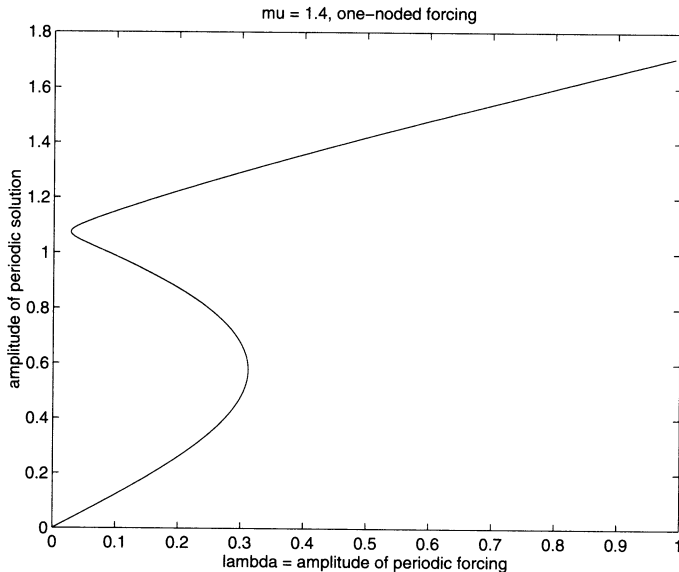


Fig. 3 Bifurcation from single to multiple periodic solutions occurs for small  $\lambda$

take  $\lambda f(x, t) = \lambda \sin(\mu t)\rho(x)$  where  $\lambda \in [0, 0.06]$  is chosen to produce the appropriate behaviour near equilibrium and the frequency  $\mu$  is chosen to match the frequency of the oscillations observed at Tacoma Narrows on the day of the collapse. The frequency of the torsional motion was approximately one cycle every 4 or 5 seconds, so we take  $\mu \in [1.2, 1.6]$ .

The motion observed on the day of the collapse was, for the most part, a one-noded motion (i.e., no torsional displacement in the middle of the span). Occasionally, the motion changed to no-noded twisting and back again to one-noded, [1]. Thus, we choose

- $\rho(x) = 1$
- $\rho(x) = \sin(\frac{2\pi x}{L})$  or
- $\rho(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$ .

In [16] we studied the bifurcation properties of periodic solutions to (11) under external forcing of the form described above. Using numerical continuation methods, we found that bifurcation from a single periodic solution to multiple periodic solutions occurs for small  $\lambda = \underline{\lambda}$ . For example, in figure 3 we see that if  $\lambda < \underline{\lambda} \approx .027$ , a unique periodic solution exists. However, if  $\lambda > .027$ , there are three periodic solutions, one of small amplitude and two of large amplitude.

For fixed  $\lambda > \underline{\lambda}$ , as in section 2, we found that whether a small or large amplitude solution occurs depends only on the initial torsional displacement and velocity of the span. Moreover, we saw that a slight change in the initial conditions could yield dramatic changes in the long term behaviour of the span. For example, let

$$\lambda f(x, t) = .06 \sin(1.4t) \sin(\frac{2\pi x}{L}).$$

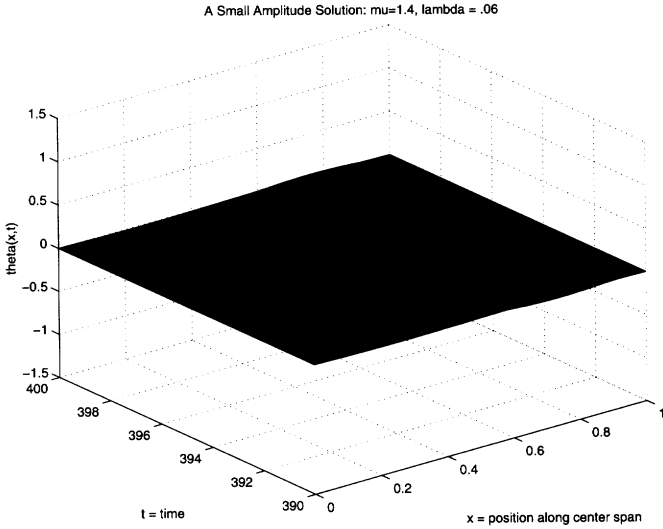


Fig. 4 Long term response to the initial conditions (12)

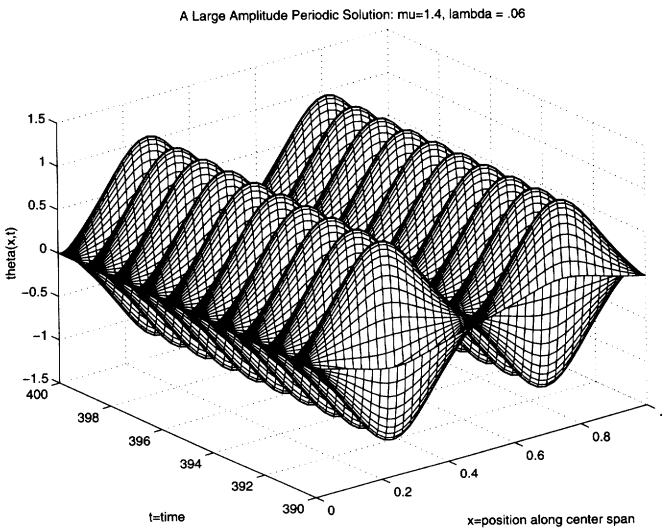


Fig. 5 Long term response to the initial conditions (13)

If we impose the initial conditions

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, 0) = 0.9 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\ \theta_t(x, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

and solve the initial value problem (11), (12) numerically, we see that, despite the large initial displacement, eventually the motion of the span settles down to small amplitude periodic oscillation (approximately 0.072 radians, see figure 4).

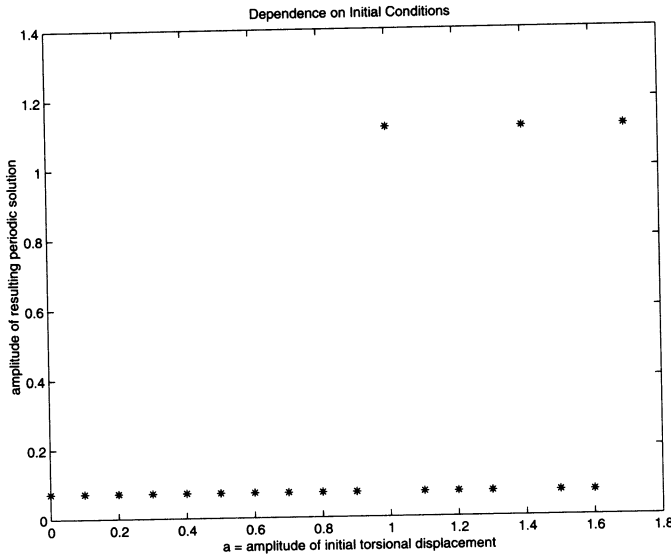


Fig. 6 A slight change in the amplitude of the initial displacement can yield a dramatic change in the resulting periodic solution

If we increase the amplitude of the initial displacement slightly to

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, 0) = 1.0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\ \theta_t(x, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

we expect the same long term behaviour. However, in figure 5 we see that this is not the case. After large time (390 periods of the forcing term), the amplitude of the periodic oscillations is approximately 1.117 radians. We note that the amplitude, frequency, and nodal structure of this solution are consistent with the behaviour observed at Tacoma Narrows on the day of its collapse. An animation of this type of solution can be viewed at the second author's homepage; the address appears at the end of this paper.

It is tempting to conjecture that a “small” initial displacement will yield a small amplitude periodic solution while a “large” initial displacement will yield a large amplitude periodic solution. However, in figure 6 we see instead that the amplitude of the periodic solution depends on the amplitude of the initial displacement in an unpredictable and nonintuitive way. Similar results for a simple ODE model of the vertical motion of the span were obtained in [10].

In our final experiment, we demonstrate that a slight perturbation in the forcing term  $f(x, t)$  yields a solution whose nodal structure changes. Recall that such a phenomenon was observed at Tacoma Narrows. We begin with a large initial displacement

$$\begin{aligned} \theta(x, 0) &= 1.4 \sin(2\pi x) \\ \theta_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

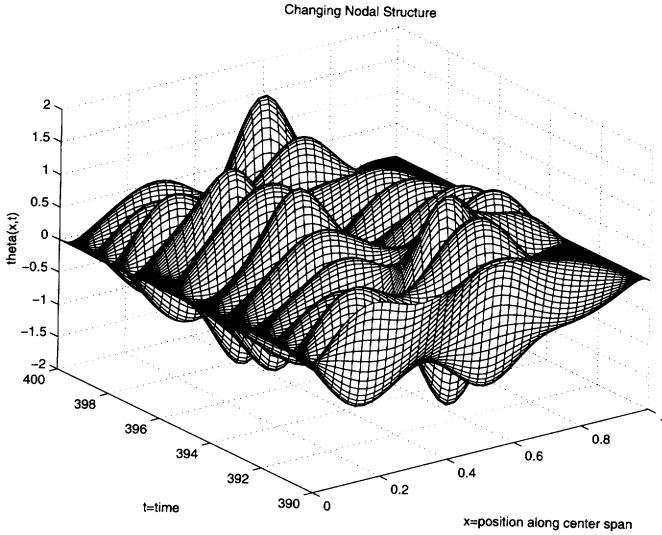


Fig. 7 The long term response to one-noded forcing with a slight no-noded perturbation

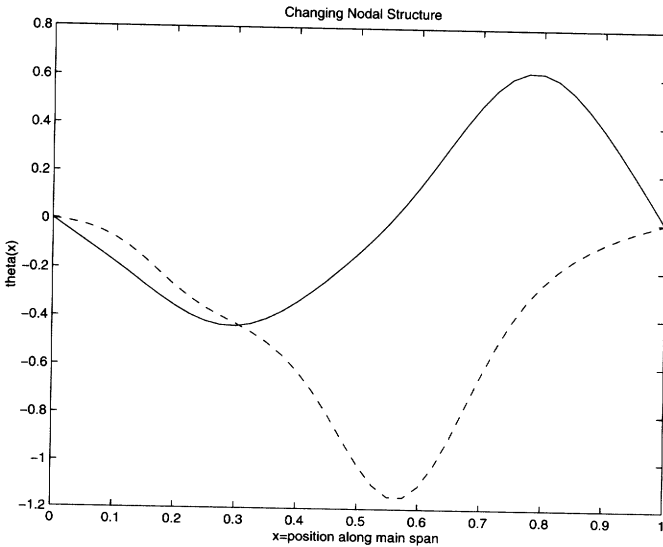


Fig. 8 The solution pictured in figure 7 is sometimes one-noded (solid) and sometimes no-noded (dashed)

and apply forcing of the form

$$\lambda f(x, t) = \lambda \sin(\mu t) [\sin(2\pi x) + .01 \sin(\pi x)].$$

We see in figure 7 that a complicated motion results. Figure 8 shows the angular displacement along the length of the span at two different points in time; the solid curve describes a one-noded twist while the dashed curve has no nodes.

## 4 Travelling waves in nonlinearly supported beams

We now turn to what may be the most mathematically interesting phenomenon which has arisen in connection with suspension bridges. Localised travelling waves of several nodes have been reported on the Golden Gate bridge. For a full account, see [14].

For the purposes of modeling these waves, the bridge was viewed as an infinitely long beam being pulled down by the constant force of gravity and suspended by cables which, as in the previous sections, do not resist compression but resist elongation according to Hooke's Law. This led to the model

$$(14) \quad u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0,$$

where the restoring force  $f(u)$  has the general shape

$$(15) \quad f(u) = (u^+ - 1), \quad \text{where } u^+ = \begin{cases} u, & u > 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

and  $u(x, t)$  gives the downward deflection of the beam from the unloaded state  $u \equiv 0$ .

Since  $u \equiv 1$  is an equilibrium, travelling wave solutions will have the form  $u(x, t) = 1 + y(x - ct)$ , where  $y$  satisfies the ordinary differential equation

$$(16) \quad y'''' + c^2 y'' + f(y + 1) = 0.$$

The first progress on solutions of equation (16) was in [14], where the piecewise nonlinearity of (15) was studied. Here, for a range of  $c$  which was strictly included in  $(0, \sqrt{2})$ , explicit localised, multi-node solutions were constructed.

While the paper [14] represented a first step on this problem, it left many questions unanswered. The main questions were:

- Did solutions exist for more general nonlinearities  $f$ ?
- Did they exist for all  $c$  in the interval  $(0, \sqrt{2})$ ?
- How many solutions were there? (The calculations of [14] suggested infinitely many).
- Were all or some of these solutions stable when used as initial conditions for the initial value problem (14) and were there ways of distinguishing the stable and unstable solutions?
- Did these solutions have interesting properties as waves?

Over the last several years, significant progress has been made on all of these questions and we will briefly summarise it here.

The first progress was reported in [7], where the existence of solutions was proven for all  $c \in (0, \sqrt{2})$ . The proof, which relied on the mountain pass theorem and the ideas of concentrated compactness, was valid for the piecewise nonlinearity  $f(u) = u^+ - 1$  and some more general nonlinearities which closely resembled it.

Also in [7], the properties of this new type of wave were studied for the first time using simple explicit finite-difference techniques. These results suggested some interesting interaction properties for the waves but, since the nonlinearity was not smooth, there was some doubt about the validity of the numerical experiments.

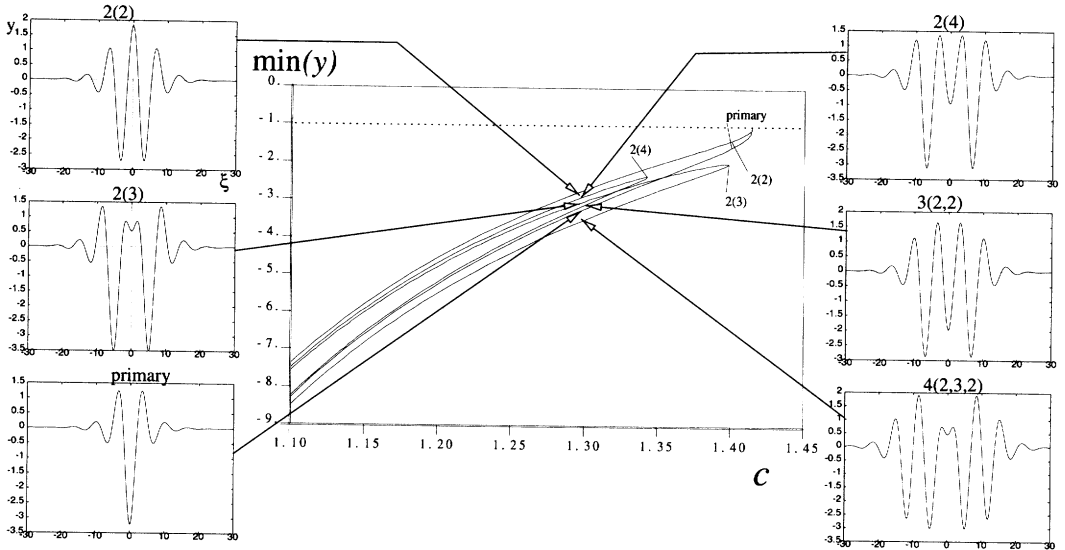


Fig. 9 Homoclinic solutions to zero of the ODE (16) with the nonlinearity (15) for  $c^2$  close to 2. Only the primary and simplest three multi-through solutions are depicted

This led the authors to consider the more smooth nonlinearity

$$(17) \quad f(u) = \exp(u - 1) - 1.$$

This nonlinearity has the same behaviour at the origin and at  $-\infty$  and the same basic shape as the original nonlinearity but, of course, it's much smoother, so one might feel more confidence in the numerical results. However, the growth at  $+\infty$  was more than was allowed for in the existence theorem.

This led to the investigation of an intermediate nonlinearity

$$(18) \quad f(u) = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon} (u + \sqrt{u^2 + \varepsilon})}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}} - \sqrt{1 + \varepsilon},$$

which was smooth but resembled more closely the shape of the piecewise nonlinearity (15). However, the exponential nonlinearity showed the most intriguing interaction properties, as we shall document later.

#### 4.1 Existence of homoclinic solutions

The first observation is that the global picture of the solution set is remarkably independent of the exact form of the nonlinearity. This is illustrated in figure 9 where the global bifurcation picture is shown for solutions to (18) with nonlinearity (17), corresponding to solitary wave solutions to (16) with the piecewise-linear  $f$ .

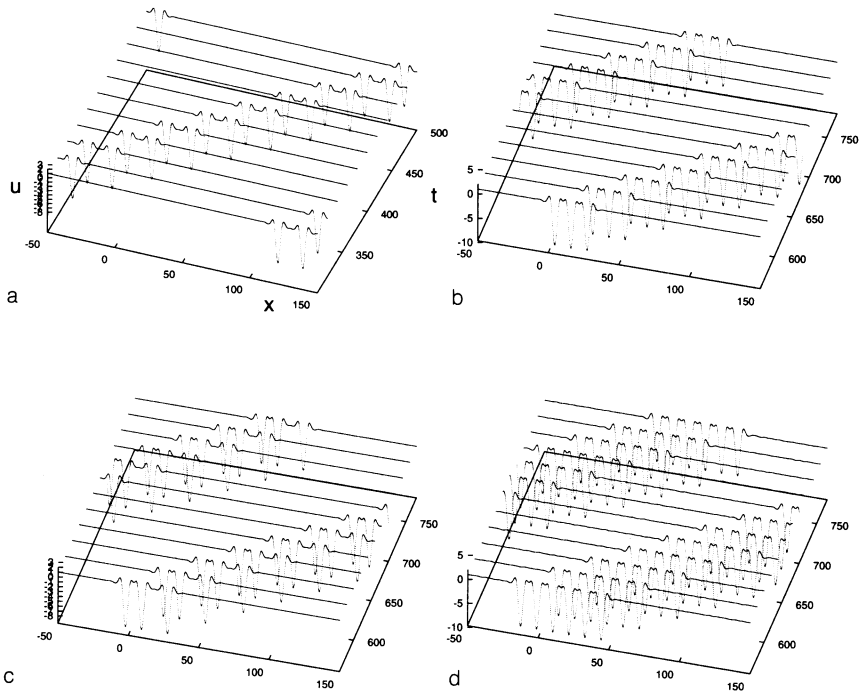


Fig. 10 Simple and complicated stable solutions; numerical solutions to (14) with nonlinearity (17) using the fixed grid method with initial conditions for  $c = 1.1$  which are exact solitary waves that appear to be stable: (a) the  $2(5)$ ; (b) the  $3(3, 3)$ ; (c) the  $3(3, 5)$  (note this is an asymmetric wave); and (d) the  $6(3, 3, 3, 3, 3)$ . In each case the solution is plotted after a time interval which is sufficient for any transient instabilities to develop

To classify these solutions, we follow Champneys & Toland [5] who studied (18) with  $f = y - y^2$ . For  $c$  sufficiently small we can label the multi-trough solutions by strings of integers  $\mathbf{n}(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$  where  $\mathbf{n}$  counts the number of troughs (approximate copies of the primary) and the  $m_i$  count the number of half-oscillations between the troughs. In Figure 9, we see the different families of solutions and their dependence on the wave speed  $c$ . Representative solutions from different parts of the bifurcation curves are shown in the insets. The global picture is almost the same for the nonlinearities (17) and (18). It should be noted that all solutions shown are obtained numerically; see [20] for details.

We note also that, although solutions have been proved to exist for the nonlinearity (15), the existence for the exponential nonlinearity (17) remains unproved. It seems that there are an infinite number of isolated branches corresponding to solutions with more oscillations.

### 4.2 Stable solutions

We note first that some of these waves are remarkably stable. This is shown for a variety of waves in Figure 10. The several waves of different levels of complex-

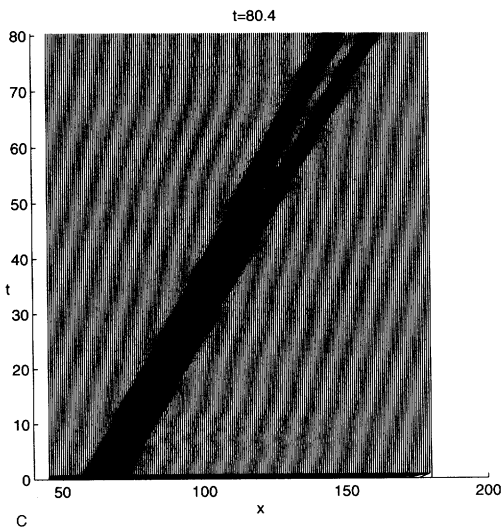
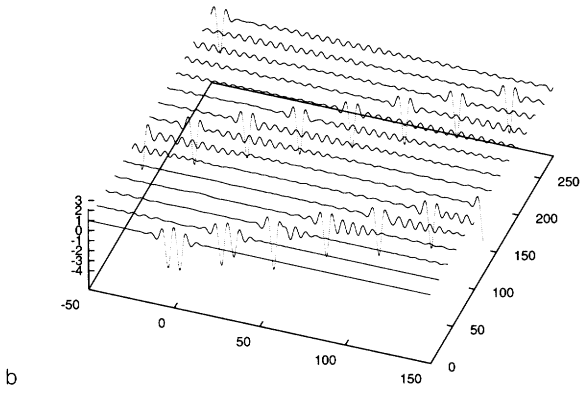
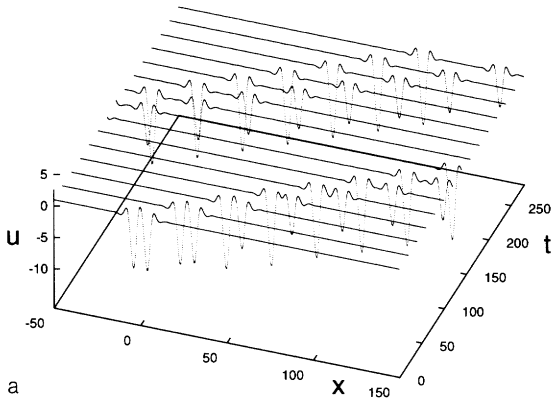


Figure 11



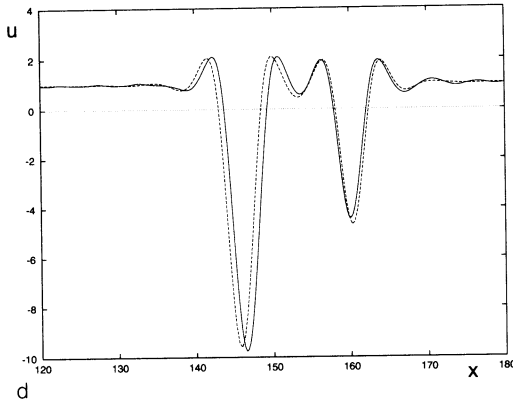


Fig. 11 (a), (b) Some complicated waves spontaneously decompose into simpler ones; solutions to (17) using the fixed grid method with initial conditions appropriate to the  $2(2)$  solitary wave for (a)  $c = 1.1$  and (b)  $c = 1.3$ . (c) Grid from the moving-mesh method with 601 grid points using the same initial data as (a) showing fission of solitary wave  $2(2)$  with  $c = 1.1$  into two simpler waves with different wave speeds. (b) Comparisons between solutions at  $t = 80.4$  using the fixed grid method (solid line) and the moving grid method (dashed line)

ity are shown to remain intact for extremely long time intervals, in spite of the fact that a simple explicit finite-difference solver was used. In [20], two methods were used, the other being a more sophisticated moving grid method.

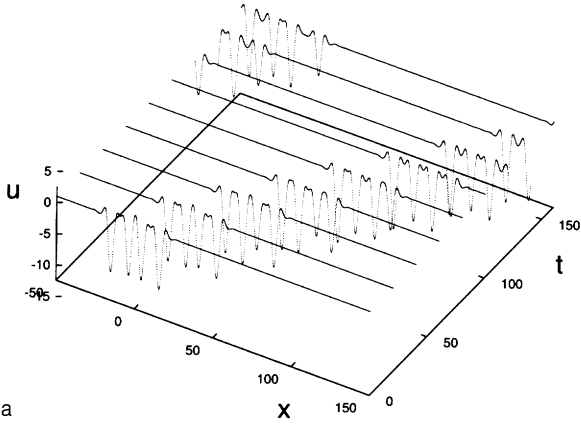
This led to the following

**Conjecture 1.** *For a range of  $c$  less than  $\sqrt{2}$ , there are infinitely many stable solitary wave solutions of the partial differential equation (14) with the nonlinear (17). In particular, in the notation of [5]  $2(2m + 1)$  waves are stable for  $m = 1, 2, 3, \dots$*

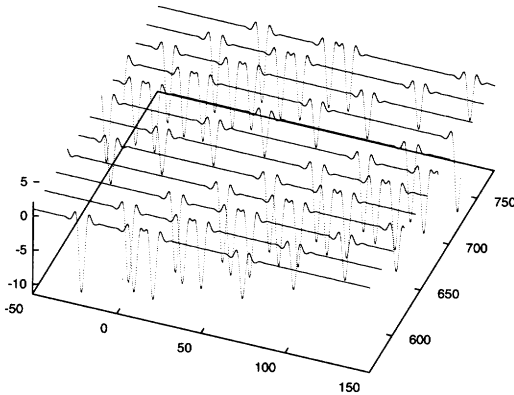
### 4.3 Types of instability: fission of larger waves

As documented in [20], when more complicated waves become unstable, they often do so in a striking manner: instead of losing their shape completely, they slowly decompose into more elementary travelling waves of different speeds, sometimes with and sometimes without additional radiation. Figures 11 and 12 show this behaviour, as well as evidence that the phenomenon is independent of the numerical solver used; they compare solutions obtained via a sophisticated moving grid method and the results of the explicit scheme. A more complete description is given in [20].

The relationship between the original unstable wave and the two simpler waves with their different wave speeds is still not understood and remains a subject of current research. Moreover, other types of instabilities were also observed and our understanding of the types of instabilities remains incomplete.

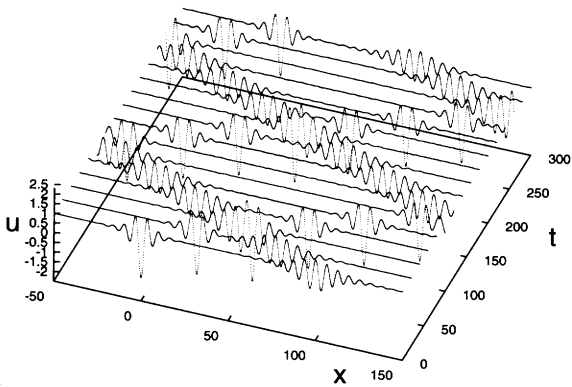


a



b

Fig. 12 Fission, with initial conditions (for  $c = 1.1$ ) (a) appropriate to the  $4(3, 2, 3)$  wave; (b) the same solutions as (a) plotted after 550 time units



a

Figure 13

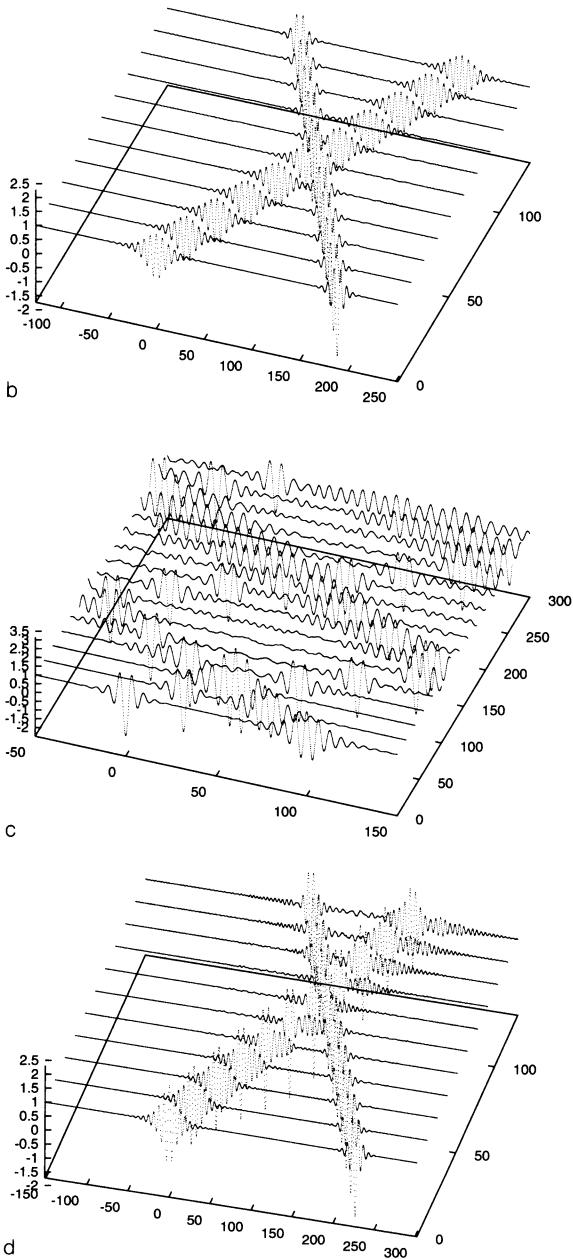


Fig. 13 Passage of primary solitary wave solutions to (14) with  $|c|=1.354$  and  $1.4$  through each other. (a), (b) With the exponential nonlinearity (17), using respectively the fixed and moving grid methods. (c), (d) With the piecewise linear term (15) using respectively the fixed and moving grid methods. Moving grid computations were performed using 2001 grid point

It is worth remarking that versions of this type of instability were observed for all three nonlinearities, the exponential, piecewise linear, and its smoothed approximation.

#### 4.4 Interaction of two waves

A final unexpected behaviour was observed for the exponential nonlinearity alone. When two waves of small amplitude (i.e., with wave speeds not too far from  $\sqrt{2}$ ) meet when travelling in opposite directions, they pass through each other with almost no interaction. This is entirely different from the situation where one wave catches up with another. Figure 13 shows this interaction for the exponential nonlinearity (top) and the piece-wise nonlinearity (bottom).

Two comments on this phenomenon are in order. First, this behaviour does not occur when the wave speed is farther away from  $\sqrt{2}$ , and waves interact in a more destructive way, with more radiation. Second, this passing through behaviour does not occur when a faster wave catches up with a slower one. In that case, the waves interact to form one large wave with additional radiation. As of now, there is no theoretical understanding of these interactions.

## 5 Concluding remarks

So far, in the developments in this area, we have seen some remarkable results in ordinary differential equations, partial differential equations, and nonlinear waves, but open questions remain.

Recall that in the study of travelling waves, smoothing the nonlinear term made the observed phenomena richer and more puzzling. We wonder how the results of sections 2 and 3 change if we smooth the nonlinear term in the systems (4) and (9) which model the coupled vertical and torsional motions.

The properties of the nonlinear waves are intriguing and may be important in understanding how large nonlinear waves can spontaneously decompose into simpler ones, while similar ones remain completely stable. One might hope that a theoretical understanding of this phenomenon may shed light into why some atoms (large localised nonlinear waves) can spontaneously decompose while others of quite similar composition remain stable.

On a more philosophical note, whenever one derives any partial differential equation model, one makes a large number of symmetrising (and therefore simplifying) assumptions. Already in the literature, there is interest in whether reducing the number of dimensions of a problem can cause a loss of important behaviour by, for example, breaking the dimension of solitary waves, [9]. These results show how, even in the ordinary differential equation situation, even the simple and natural assumption of uncoupling the vertical and torsional components can inadvertently cause important properties of the physical situation to be lost.

Thus, we believe that the problems covered in this paper will be the source of significant mathematical progress in the coming years.

## References

- [1] *Amann, O.H., von Karman, T., and Woodruff, G.B.*: The Failure of the Tacoma Narrows Bridge, Federal Works Agency, 1941.
- [2] *Bleich, F. McCullough, C.B., Rosecrans, R., and Vincent, G.S.*, The Mathematical Theory of Suspension Bridges. U.S. Dept. of Commerce, Bureau of Public Roads, 1950.
- [3] *Castellani, A.*, Safety Margins of suspension bridges under seismic conditions, *ASCE Journal of Structural Engineering* 113 (1987)1600–1616.
- [4] *Castellani, A., and Felotti, P.A.*, A note on lateral vibration of suspension bridges, *ASCE Journal of Structural Engineering* 112 (1986) 2169–2173.
- [5] *Champneys, A.R. and Toland, J.F.*: Bifurcation of a plethora of multi-modal homoclinic orbits for autonomous Hamiltonian systems. *Nonlinearity* 6 (1993) 665–772.
- [6] *Champneys, A.R., and McKenna, P.J.*, On solitary waves of a piecewise-linear suspension bridge model, *Nonlinearity* 10 (1997), no. 6, 1763–1782
- [7] *Chen, Y., and McKenna, P.J.*, Numerical variational methods for approximating traveling waves in a nonlinearly suspended beam, *J. Differential Equations* 136 (1997), no. 2, 325–355.
- [8] *Chen, Y., and McKenna, P.J.*, Travelling Waves in a nonlinearly suspended beam: some computational results and four open questions, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 355 (1997), no. 1732, 2175–2184.
- [9] *Hařagus, M. and Kirchgässner, K.*, Breaking the dimension of solitary waves, in progress in partial differential equations: the Metz surveys, Longman (Harlow) (1996),216–228.
- [10] *Humphreys, L.D. and Shammas, R.*, Large periodic oscillations in suspension bridges: finding unpredictable behavior in a simple ordinary differential equation, *The College Mathematics Journal*, to appear.
- [11] *Lazer, A.,C. and McKenna, P.J.*, Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis, *SIAM Review* 32 (1990) 537–578.
- [12] *P.J. McKenna*: Large torsional oscillations in suspension bridges revisited: fixing an old approximation, *The American Mathematical Monthly*, 106, (1999) 1–18.
- [13] *McKenna, P.J., and Moore, K. S.*, Multiple periodic solutions to a suspension bridge ordinary differential equation, pre-print.
- [14] *McKenna, P.J., and Walter, W.*, Travelling waves in a suspension bridge, *Siam J. of Applied Math*, 50, (1990), 703-15.
- [15] *McKenna, P.J., and Walter, W.*, Nonlinear oscillations in a suspension bridge, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 98 (1987), 167–177.
- [16] *Moore, K.S.*, Large amplitude torsional oscillations in a nonlinearly suspended beam: a theoretical and numerical investigation, Dissertation, University of Connecticut, 1999.
- [17] *Scanlan, R.H. and Tomko, J. J.*, Airfoil and bridge deck flutter derivatives, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng. Eng. Mech. Division*, EM6, (1971), 1717–1737,
- [18] *Scanlan, R.H.*, The action of flexible bridges under wind II: buffeting theory, *J. Sound and Vibrations* bf 60 (1978) 201–211.
- [19] *Yew, A. C. and Champneys, A. R. and McKenna, P. J.*, Multiple solitary waves due to second-harmonic generation in quadratic media, *J. Nonlinear Sci.*, 9, 33–52.
- [20] *Champneys, A. R., McKenna, P. J. and Zegele, P.A.*: Solitary waves in nonlinear beam equations; stability, fission and fusion, to appear, *Nonlinear Dynamics*.

P.J. McKenna  
 Department of Applied Mathematics  
 University College, Cork, Cork  
 Ireland  
 mckennaj@symphony.ucc.ie

(Eingegangen 30. 9. 99)

K.S. Moore  
 Department of Mathematics  
 University of Michigan  
 Ann Arbor, Michigan 48104  
 U.S.A.  
 ksmoore@math.lsa.umich.edu  
<http://www.math.uconn.edu/~kmoore>



## Buchbesprechungen

**Bapat, R. B., Raghavan, T. E. S., Nonnegative Matrices and Applications** (Encycl. Math. and its Appl. 64), Cambridge University Press 1997, 336 S., \$ 70,-

Matrizen mit nichtnegativen Elementen, deren Theorie vor etwa hundert Jahren in Arbeiten von Perron, Frobenius und Markov erstmals behandelt wurde, sind immer noch aktuelle Forschungsobjekte.

Das liegt unter anderem daran, dass diese Matrizen in vielen Anwendungen auftauchen und es damit auch immer neue Fragestellungen gibt. Ein sehr gutes Beispiel dafür ist das vorliegende Buch von Bapat und Raghavan. Man ist versucht, diese Neuerscheinung mit anderen, nicht besonders alten Monographien auf diesem Gebiet zu vergleichen, wie etwa dem Buch „Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences“ (Neueste Auflage 1994) von Berman-Plemmons oder Seneta's Buch „Non-negative Matrices“ von 1973.

Dabei stellt man schnell fest, dass der Durchschnitt der behandelten Themen gar nicht so groß ist. Natürlich behandeln alle den Satz von Perron-Frobenius, Markov-Ketten sowie stochastische und doppelstochastische Matrizen, aber damit sind die Gemeinsamkeiten schon fast ausgeschöpft. Im vorliegenden Buch werden insbesondere die Beziehungen zur Spieltheorie und der mathematischen Wirtschaftstheorie betont, Gebiete, auf denen die Autoren selbst arbeiten.

Zur näheren Beschreibung des Inhaltes seien nun die Kapitelüberschriften angegeben:

1. Perron-Frobenius theory and matrix games.
2. Doubly stochastic matrices.
3. Inequalities.
4. Conditionally positive definite matrices.
5. Topics in combinatorial theory.
6. Scaling problems and their applications.
7. Special matrices in economic models.

Das Buch wendet sich an höhere Studenten sowie Wissenschaftler mit Kenntnissen in linearer Algebra. Man sollte aber auch etwas lineare Optimierung beherrschen, um einige Abschnitte zu verstehen. So werden ein Teil der Aussagen des Satzes von Perron-Frobenius mit Hilfe des von Neumannschen Minmaxsatzes für Zweipersonen-Nullsummenspiele bewiesen. Das ist sicher ungewöhnlich und erschwert etwas die Benutzung dieses Buches für eine Vorlesung im Grundstudium, eröffnet aber auch neue und interessante Perspektiven.

Trotzdem können Teile des Buches als Grundlage einer Vorlesung dienen, die sich an Studenten mit Grundkenntnissen in linearer Algebra wendet. Dabei helfen sicher auch die vielen Übungen mit teilweise unorthodoxen (indischen) Beispielen.

Wie oben angedeutet, findet man in diesem Buch Themen, die in Monographien über Matrixtheorie selten oder gar nicht behandelt werden. Ich möchte erwähnen: Distanz-Matrizen, Hilberts projektive Metrik und Hopfsche Ungleichung, ein Beweis der bekannten Vermutung von van der Waerden über Permanenten doppelstochastischer Matrizen, Matrizen über der max-plus-Algebra und ihre Eigenwerte, die aus der Theorie der „discrete event systems“ stammen, und viele Matrizenklassen, die in der Spieltheorie vorkommen.

Der Text ist sauber geschrieben, die meisten Ergebnisse werden bewiesen. Am Ende der Kapitel finden sich weitere Hinweise zur Literatur und zu verwandten Ergebnissen, wobei man über deren Vollständigkeit gelegentlich geteilter Meinung sein kann.

Insgesamt nehmen eigene Ergebnisse der Autoren einen großen Raum ein. Dadurch ist das Buch kein Lehrbuch und auch keine Monographie im engeren Sinne, wo man doch die Behandlung eines abgeschlossenen Teilgebiets erwartet. So passen eigentlich einige sehr interessante Abschnitte über positiv definite Matrizen in den Kapiteln 3 und 4 nicht direkt hinein. Andererseits wird keine Vollständigkeit angestrebt. Diese sehr persönlich gefärbte Themenauswahl macht aber auch den Charme des Buches aus, das ich den Lesern, die sich über einige neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der nichtnegativen Matrizen informieren wollen, sehr empfehlen kann. Ich selbst habe das Buch mit viel Gewinn gelesen.

Bielefeld

L. Elsner

**Vasconcelos, W. V., Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry**, Berlin u. a.: Springer 1997, 394 S., DM 118,-

The book under review is published by Springer in a new series under the heading "Algorithms and Computation in Mathematics".

The Table of Contents suggests that this is a book on computer algebra not at an introductory level, but assuming a more advanced point of view.

The link between this volume and computer algebra is explained in the introduction (page 1): "Our aim is to describe theoretical and practical issues in some basic constructions in algebraic geometry and commutative algebra, and how in turn they may affect effective implementation by symbolic computation programs".

The basic constructions considered are those for the radical of an ideal, primary decomposition, integral closure and ideal transform computations.

A closer look shows that the author has no intention of comprehensiveness in his project. Rather his general strategy seems to see how deep one can go by making a systematic use of homological algebra. In other words, his aim is to explore the computational possibilities offered by a strictly homological point of view.

A typical instance of the above strategy is given in chapter 5 (Nullstellensätze), where constructive methods to compute the radical of an ideal are considered. Vasconcelos, going through the theory of jacobian ideals of an ideal (or of an algebra), shows how to reduce the radical problem to the problem of finding regular sequences inside an ideal.

The connection between the theoretical and the effective sides of the subject is developed in the first two chapters. Chapter one is a quick overview of the main fundamental algorithmic tools of computer algebra: the so called *Gröbner basics*, the division algorithms and how they can be used for the computation of syzygies and Hilbert functions. Chapter 2 describes some fundamental tools and techniques which are used for manipulations and constructions in polynomial rings, notably elimination techniques, Nöther normalization, Fitting ideals, flatness.

The bulk of the book consists of chapters 3 to 9. Each of them is devoted to one fundamental topic: Primary Decomposition, Artin Algebras, Nullstellensätze, Integral Closure, Ideal Transforms, Cohomology (written by D. Eisenbud), Graded Modules.

The volume ends with three interesting appendices, Appendix A has the purpose of supplementing the basic Commutative Algebra reference [1] with topics of everyday use. Appendix B, by J. Herzog, gives a detailed and fairly general treatment of Hilbert functions. Appendix C, by D. Eisenbud, D. Grayson and M. Stillman, is a useful and concrete introduction to the computer software package *Macaulay 2*.

I would describe this book as a sophisticated notebook, with plenty of suggestions, examples and cross references, reporting on the work of Vasconcelos himself and of many others. It can perhaps be viewed as a finished and carefully carried out version of the article [2], where the structure of this book was only sketched. It is a welcome new



and deep exploration into commutative algebra and its relations with algebraic geometry. It is full of results, from simple tricks to more elaborate constructions, all having in common a computational and constructive nature. It will be a gold mine especially for those commutative algebraists who share with Vasconcelos the taste for a homological point of view.

- [1] Atiyah M. F. – Macdonald I. G.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, Reading, 1969.
- [2] Vasconcelos W.: “Constructions in Commutative Algebra”, in *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, edited by D. Eisenbud and L. Robbiano, Symposia Mathematica, vol. 34 (1993), p. 151–197.

Rom

E. Sernesi

**Klimek, G., Klimek, M., Discovering Curves and Surfaces with Maple**, Berlin u. a.: Springer 1997, 217 S., DM 86,–

MAPLE V ist sicher eines der momentan populärsten Computer-Algebra-Pakete. In diesem Buch werden die graphischen Möglichkeiten von MAPLE V (Release 3 oder 4) beschrieben. Obwohl ich nur Release 2 und kein Windows installiert habe, liefen die meisten Beispielprogramme und produzierten teilweise sehr hübsche, farbige Bilder. Mit einer Ausnahme: Als Standardbeispiel für eine Fläche wird häufig das Blatt des japanischen Ahorns verwendet. Das zeichnete mein Computer etwas gestaucht, leider nicht so elegant wie im Buch.

Dieses Buch ist sicher sehr nützlich, wenn man die Graphik von MAPLE benutzen möchte. Verständliche Beispielprogramme und umfassende Dokumentation führen sehr benutzerfreundlich in alle Facetten des Teilpakets „plots“ von MAPLE ein. Damit kann man

- parametrisierte ebene Kurven,
- implizit gegebene ebene Kurven,
- parametrisierte Raumkurven,
- parametrisierte Flächen im Raum,
- implizit gegebene Flächen im Raum

zeichnen. Dieses Buch erläutert das Beleuchtungs- und das Farbmodell, welches MAPLE verwendet. Außerdem werden Perspektive und geometrische Transformationen erklärt. Damit ist es ein Buch für einen mathematisch interessierten Leser, mathematische Vorbildung wird kaum vorausgesetzt. Das Buch ist verständlich für einen Abiturienten oder Studenten der Anfangssemester.

Als Beispiele werden u. a. Parametrisierungen des Ahorn-Blattes (was bei mir nicht recht funktionierte), einer Birnen- und einer Apfel-Oberfläche, sowie mehrerer optisch eindrucksvoller Phantasiefächen in geschlossener Form (im wesentlichen durch Winkelfunktionen) verwendet. Das erinnert etwas an eine um die (letzte) Jahrhundertwende populäre Disziplin: das Nachmodellieren von natürlichen Strukturen (etwa Blatt-Umrissen) durch mathematische Gleichungen. Wie die Autoren auf ihre Gleichungen kamen, das wäre sicherlich interessant zu wissen, wird aber mit keinem Wort erwähnt.

Das Schwergewicht des „plots“-Teilpakets von MAPLE liegt sicherlich auf dem Gebiet der computergraphischen Visualisierung, und nicht auf der Mathematik. Die Bilder entstehen als Diskretisierung, deren Feinheit man vorgeben kann. Brauchbar ist dies für parametrisierte Kurven oder Flächen, und solange man die Feinheit der Diskretisierung nicht zu anspruchsvoll wählt. In dem Buch wird darauf hingewiesen, daß die Berech-

nung der Bilder, so wie sie vorgestellt werden, auf einem 486 PC durchaus eine Stunde dauern kann (ich habe einen 386). Dafür wird in dem abschließenden Paragraphen des Buches beschrieben, wie man diskretisierte, also von Dreiecken begrenzte, Flächen in das public domain Rendering-Programm POV-Ray exportieren kann.

Zum Zeichnen von implizit (durch Gleichungen) gegebenen Kurven oder Flächen ist MAPLE weniger geeignet. Ich selbst habe die Erfahrung gemacht, daß es schneller geht, ein einfaches Programm zum Zeichnen solcher Kurven selbst zu schreiben, als MAPLE dazu zu bringen, für etwas komplizierte Kurven ein Bild in befriedigender Auflösung zu zeichnen. Das Buch enthält auch sehr abschreckende Bilder davon, was passiert, wenn MAPLE implizite Flächen zeichnet. Der Computer-graphische Diskretisierungs-Ansatz ist dazu nicht geeignet.

Solange man sich aber im Rahmen der graphischen Möglichkeiten von MAPLE bewegen will, ist dieses Buch sicher ideal. Das heißt also: Das Schwergewicht liegt auf der mathematischen Modellierung von Kurven und Flächen, deren Gestalt anschaulich gegeben ist. Weniger sinnvoll ist die Verwendung zur Untersuchung mathematischer Kurven oder Flächen, deren Gleichung man kennt, und deren Gestalt man verstehen möchte.

Hält man sich in diesem Rahmen, ist das Buch äußerst nützlich und informativ. Durch die anschaulichen und funktionierenden Beispiele nimmt es dem Leser auch sehr schnell die Scheu vor dem graphischen Teil des Systems MAPLE. Das Buch ist sicher hervorragend geeignet, den Leser in diesen Teil von MAPLE einzuführen.

Erlangen

W. Barth

**Andradas, C., Bröcker, L., Ruiz, J.M., Constructible Sets in Real Geometry** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Volume 33), Berlin u.a.: Springer 1996, ix + 270 S, DM 158.00

Stellen wir uns einen algebraisch-geometrisch durchaus bewanderten Mathematiker vor, der jedoch keine spezielle Verbindung zur reellen algebraischen Geometrie hat. Er bekommt dieses Buch in die Hand und beginnt, darin zu blättern. Es wird ihm wohl hin und wieder Vertrautes entgegenblicken, etwa aus der kommutativen Algebra. Aber große Teile des Textes werden ihn möglicherweise so merkwürdig fremd anmuten, daß er sich fragen mag: Wovon handelt dieses Buch eigentlich?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir weiter ausholen. Tatsächlich haben wir hier die kondensierte Darstellung eines Gebietes vor uns, das mit seinen Ergebnissen zu den schönsten Anwendungen der Techniken von reeller Algebra und Geometrie zählt. Die grundlegenden Fragen – und ihre inzwischen vielfach bekannten Antworten! – sind so elementar, daß man sie problemlos jedem Abiturienten erklären kann. Dennoch mußte erst eine ausgefeilte und abstrakte Theorie heranreifen, bis sie angreifbar wurden. Die vorliegende Monographie ist die erste, die eine umfassende Darstellung versucht, und ist verfaßt von führenden Experten, die selbst in der Vergangenheit die Entwicklung in wichtigen Teilen vorangetrieben und gestaltet haben.

Sei  $V$  eine affine algebraische Varietät über  $\mathbf{IR}$ , deren reelle Punkte wir mit  $V(\mathbf{IR})$  bezeichnen. Bekanntlich nennt man eine Teilmenge von  $V(\mathbf{IR})$  semialgebraisch, wenn sie eine boolesche Kombination ( $\cup$ ,  $\cap$ , Komplement) von endlich vielen Mengen des Typs  $\{x \in V(\mathbf{IR}): f(x) > 0\}$  (wir schreiben dafür kurz  $\{f > 0\}$ ) ist, wobei die  $f$  reguläre Funktionen auf  $V$  (d.h.  $f \in \mathbf{IR}[V]$ ) sind. Eine solche Menge heißt basisch offen (bzw. basisch abgeschlossen), wenn sie die Form  $\{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$  (bzw.  $\{f_1 \geq 0, \dots, f_r \geq 0\}$ ) hat, für eine geeignete Wahl von endlich vielen  $f_i \in \mathbf{IR}[V]$ . Eine auf den ersten Blick sicher verblüffende Tatsache ist, daß man für die Darstellung solcher Mengen in  $V(\mathbf{IR})$  mit einer nur durch  $n := \dim(V)$  beschränkten Anzahl von Ungleichungen auskommt. So gibt es

eine (kleinste) natürliche Zahl  $s(n)$ , so daß sich jede basisch offene Menge in  $V(\mathbb{R})$  ( $V$  eine  $n$ -dimensionale affine  $\mathbb{R}$ -Varietät) in der Form  $\{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$  mit  $r \leq s(n)$  und  $f_i \in \mathbb{R}[V]$  schreiben läßt. Selbst im  $\mathbb{R}^n$  würde man dies zunächst kaum vermuten.

Diese für alles weitere grundlegende Beobachtung hat L. Bröcker um 1983 gemacht. Seine Bemerkung betraf nicht nur basisch offene Mengen. Es gibt auch eine (kleinste) Zahl  $\bar{s}(n)$ , so daß jede basisch abgeschlossene Menge in  $V(\mathbb{R})$  in der Form  $\{f_1 \geq 0, \dots, f_r \geq 0\}$  mit  $r \leq \bar{s}(n)$  geschrieben werden kann. Und es gibt weitere Endlichkeitsaussagen ähnlicher Art: Etwa seit Ende der 70er Jahre ist bekannt, daß jede offene semialgebraische Menge die Vereinigung von endlich vielen basisch offenen Mengen ist („Endlichkeitsatz“). Bröcker bemerkte, daß man stets mit  $t(n)$  solchen basisch offenen Mengen auskommt. Ebenso läßt sich jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von  $V(\mathbb{R})$  als Vereinigung von  $\bar{t}(n)$  basisch abgeschlossenen Teilmengen schreiben. Hier sind  $t(n)$  und  $\bar{t}(n)$  geeignete natürliche Zahlen, und  $n = \dim(V)$  wie zuvor.

Diese Aussagen gründen in der reduzierten Theorie der quadratischen Formen, und ich möchte versuchen, zumindest eine grobe Idee von diesem Zusammenhang zu vermitteln. Ist  $K$  ein Körper und  $q$  eine quadratische Form über  $K$ , so hat  $q$  bezüglich jeder Anordnung von  $K$  eine wohldefinierte Signatur (Anzahl der positiven minus Anzahl der negativen Einträge, wenn  $q$  diagonalisiert ist). Bezeichnet  $\text{Spec}_r(K)$  den topologischen Raum aller Anordnungen von  $K$ , so definiert  $q$  also eine mit  $\sigma(q)$  bezeichnete (stetige) Abbildung  $\text{Spec}_r(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ , die globale Signatur von  $q$ . Läßt man auch  $q$  variieren, so erhält man einen Ringhomomorphismus  $\sigma: W(K) \rightarrow C(\text{Spec}_r(K), \mathbb{Z})$ , wobei  $W(K)$  den Witttring der (Äquivalenzklassen von) quadratischen Formen über  $K$  bedeutet. Anfang der 70er Jahre wurde bemerkt (Elman-Lam), daß  $\text{coker}(\sigma)$  stets eine 2-primäre Torsionsgruppe ist. In einer für die weitere Entwicklung grundlegenden Arbeit bestimmte Bröcker 1974 deren Exponenten durch die reellen Stellen von  $K$  und zeigte insbesondere, daß er für einen  $n$ -dimensionalen formal reellen Funktionenkörper über  $\mathbb{R}$  gleich  $2^n$  ist. Dieser Satz hat direkte geometrische Relevanz für Fragen der zuvor geschilderten Art, was jedoch erst später erkannt wurde, als der von Coste-Roy gefundene Begriff des reellen Spektrums zur Verfügung stand. Tatsächlich ist Bröckers Satz äquivalent dazu, daß jede basisch offene Menge  $U$  in  $V(\mathbb{R})$  „generisch“ (d.h. bis auf eine Menge von Dimension  $\leq n-1$ ) von der Form  $\{f_1 > 0, \dots, f_n > 0\}$  ist,  $n = \dim(V)$ . Die Fehlermenge kann nun ihrerseits generisch (bis auf Dimension  $\leq n-2$ ) durch  $n-1$  Ungleichungen beschrieben werden, und so fort. Schließlich kann man aus diesen Beschreibungen von „Strata“ von  $U$  auch eine exakte Beschreibung  $U = \{g_1 > 0, \dots, g_r > 0\}$  von  $U$  gewinnen, wobei man allerdings in der Regel auf  $r = n!$  kommt (mit mehr Aufwand kann man dies verbessern). So erhält man die Endlichkeit von (und eine obere Abschätzung für)  $s(n)$ . Im Fall der anderen erwähnten Invarianten ist der Beweisgang ähnlich.

Diese und ähnliche geometrische Fragen stellen sich nicht nur für semialgebraische Mengen, sondern allgemeiner auf der Ebene der reellen Spektren. Das reelle Spektrum  $\text{Spec}_r(A)$  eines Rings  $A$  ist der topologische Raum aller Anordnungen aller Restklassenkörper von  $A$ . Die konstruierbaren Teilmengen von  $\text{Spec}_r(A)$  sind die endlichen booleschen Kombinationen der Teilmengen  $\{f > 0\}$  ( $f \in A$ ) von  $\text{Spec}_r(A)$ . Die Begriffe der basisch offenen oder basisch abgeschlossenen konstruierbaren Mengen, und die Definition der Invarianten  $s(A)$ ,  $\bar{s}(A)$  usw. ergeben sich in offensichtlicher Weise (jedoch können in dieser Allgemeinheit die Invarianten  $\infty$  sein). Im Fall einer affinen  $\mathbb{R}$ -Varietät  $V$  besteht eine natürliche Bijektion zwischen den semialgebraischen Mengen in  $V(\mathbb{R})$  und den konstruierbaren Teilmengen von  $\text{Spec}_r \mathbb{R}[V]$ , nach dem Stellensatz von Artin-Lang. Eine ganz analoge Beziehung gibt es in der reellen analytischen Geometrie: Ist etwa  $X$  eine kompakte reell-analytische Menge und  $O(X)$  der Ring der globalen analytischen Funktionen, so entsprechen die konstruierbaren Teilmengen von  $\text{Spec}_r O(X)$  genau den „global semianalytischen“ Teilmengen von  $X$ , also den endlichen booleschen Kombina-

tionen von Mengen der Form  $\{x \in X: f(x) > 0\}$  mit  $f \in O(X)$ . Für diese global semianalytischen Mengen kommt man zu denselben Endlichkeitsaussagen wie für semialgebraische Mengen. Das Beweisprinzip ist dasselbe, jedoch muß man zunächst mehr Arbeit als im semialgebraischen Fall investieren, um die Artin-Lang Eigenschaft und die grundlegenden Eigenschaften der reellen Spektren exzellenter Ringe zu etablieren.

Seit Ende der 70er Jahre hat M. Marshall in einer Serie von Arbeiten das Konzept der Anordnungsräume (*spaces of orderings*) entwickelt und damit einen ausgeklügelten axiomatischen Zugang zur reduzierten Theorie der quadratischen Formen gefunden. Das Urbeispiel eines Anordnungsraums entsteht aus einem formal reellen Körper  $K$  als das Paar  $X_K = (\text{Spec}_r(K), G_K)$ , wobei  $G_K$  die Gruppe aller Abbildungen  $\sigma(f): \text{Spec}_r(K) \rightarrow \{\pm 1\}$ ,  $\alpha \mapsto \text{sgn}_\alpha(f)$  ( $f \in K^*$ ) ist (also  $G_K \cong K^*/\{\text{Summen von Quadraten}\}$  nach Artin). Praktisch die gesamte reduzierte quadratische Formentheorie läßt sich auf Anordnungsräume übertragen. Diese haben darüberhinaus den Vorteil großer Flexibilität, was den Übergang zu Unterstrukturen und Erweiterungen betrifft. Die endlichen Anordnungsräume sind rein kombinatorische Strukturen und erlauben eine gut verstandene Klassifikation. Der wichtigste Aspekt der Anordnungsräume sind mächtige lokal-global Prinzipien: Gewisse Arten von Aussagen gelten in einem Anordnungsraum schon dann, wenn sie in jedem endlichen Unterraum gelten. Hierdurch werden viele Schlüsselfragen letztlich auf kombinatorische Probleme reduziert. Eine besonders wichtige Rolle spielt ein spezieller Typ von Anordnungsräumen, die sogenannten Fächer (*fans*); manche Arten von Aussagen gelten schon dann global, wenn sie über jedem endlichen Fächer richtig sind. Hier schließt sich ein Kreis zu Bröckers zuvor erwähnten Ergebnissen von 1974, da die Fächer im Anordnungsraum  $X_K$  auf das engste mit den reellen Stellen von  $K$  zusammenhängen.

Nachdem man auf die Endlichkeit der Invarianten  $s(n)$ ,  $\bar{s}(n)$ ,  $t(n)$  und  $\bar{t}(n)$  aufmerksam geworden war, versuchte man ihre genauere Bestimmung. Ein wichtiger Durchbruch gelang 1988, als insbesondere  $s(n) = n$  und  $\bar{s}(n) = \frac{n}{2}(n+1)$  gezeigt wurde. Das bedeutet also zum Beispiel, daß man jede basisch offene Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$  mit  $n$  Ungleichungen schreiben kann:  $U = \{f_1 > 0, \dots, f_n > 0\}$ . Die Methoden waren nicht auf den semialgebraischen Kontext beschränkt, sondern ließen sich teilweise auf exzellente oder gar auf beliebige Ringe übertragen. Insbesondere gelten die genannten Werte von  $s(n)$  und  $\bar{s}(n)$  auch für global semianalytische Teilmengen einer  $n$ -dimensionalen kompakten analytischen Menge. Anders als zuvor spielte nun Marshalls Theorie der Anordnungsräume eine Schlüsselrolle. Man hat auch qualitative Fragen mit solchen Methoden untersucht, wie zum Beispiel die wichtige Frage nach der Trennbarkeit zweier disjunkter (semialgebraischer, ) Mengen  $A, B$  durch eine (reguläre, ) Funktion  $f$ . (Damit ist gemeint, daß  $f > 0$  auf  $A$  und  $f < 0$  auf  $B$  gelten soll.) Dagegen hat es bei den Invarianten  $t(n)$  und  $\bar{t}(n)$  keine wesentlichen Fortschritte gegeben, bis heute hat man für  $n \geq 3$  nur schlechte obere Schranken.

Diese und verwandte Ergebnisse sind der Hauptgegenstand des Buches. Allgemein gesprochen, liegt all diesen Konstruktionen und Beweisen die Strategie zugrunde, Fragen über konstruierbare Mengen in  $\text{Spec}_r(A)$  zurückzuspielen auf Fragen in den reellen Spektren der Restklassenkörper von  $A$ , und damit auf Fragen, die durch Techniken der reduzierten quadratischen Formen (oder allgemeiner, der Anordnungsräume) angreifbar sind. Was hier vage als „Zurückspielen“ bezeichnet ist, wird in dem vorliegenden Buch zu einem systematischen Kalkül ausgebaut. Seinen begrifflichen Rahmen findet dies im Konzept der Vorzeichenräume (*spaces of signs*), das die Autoren hier einführen und das die Anordnungsräume verallgemeinert. Grob gesprochen dürfen die „Funktionen“ in einem Vorzeichenraum nicht mehr nur die Vorzeichen  $\pm 1$ , sondern auch das Vorzeichen 0 annehmen. Standardbeispiele von Vorzeichenräumen sind die Paare  $(\text{Spec}_r(A), G_A)$ , wo  $A$  ein Ring und  $G_A$  das Monoid aller Abbildungen

$\sigma(f): \alpha \mapsto \operatorname{sgn}_\alpha(f)$  ( $f \in A$ ) von  $\operatorname{Spec}_r(A)$  nach  $\{1, 0, -1\}$  ist. Marshalls Anordnungs-räume ordnen sich als jene Vorzeichenräume ein, in denen die von Null verschiedenen Funktionen nirgends verschwinden.

Alle hier geschilderten (und viele weitere) Fragen über konstruierbare Teilmen-gen reeller Spektren lassen sich in diesen Vorzeichenräumen fassen. In dieser Form wer-den auch die Hauptergebnisse in Ch. V formuliert und bewiesen. Das Kalkül der Vorzei-chenräume dient damit der Vereinheitlichung von Argumenten, die in unterschiedlichen konkreten Situationen gebraucht werden. Das macht die Sprache notgedrungen etwas ab-strakter, aber die Vorteile einer einheitlichen Darstellung liegen auf der Hand. Soweit ich erkennen kann, wird jedoch nicht eine genuin neue Theorie entwickelt, wie das etwa frü-her bei Marshalls Anordnungsräumen der Fall war.<sup>1</sup>

Ich möchte nun näher auf den Inhalt des Buches eingehen. Die Autoren werden gespürt haben, daß Nichtfachleute unter den Lesern einer gewissen Hilfestellung bedür-fen. So beginnen sie mit einem Kapitel *A First Look at Semialgebraic Geometry*, welches die Funktion einer erweiterten Einführung erfüllen soll. Doch macht das Kapitel einen etwas halbherzigen Eindruck: Nach knapper Erinnerung an reell abgeschlossene Körper und Tarski-Prinzip folgt ein Abschnitt „What is semialgebraic geometry?“, der aber kaum mehr als einer Facette dieser Frage gerecht wird. Der nächste Abschnitt „Real spaces“ steckt bereits den abstrakten Grundrahmen für alles weitere ab. Hier wird es schon aus-gesprochen technisch. Wer nicht bereits etwas Vertrautheit mit reellem Spektrum und quadratischen Formen erworben hat, wird daran zu kauen haben. Nicht, weil die Mathe-matik schwierig wäre (es finden sich fast nur Definitionen), sondern weil die Orientierung fehlt, das Wissen darum, woran man hier denken soll. Die dann folgende Liste von Bei-spielen ist es wert, studiert zu werden; alle Beispiele sind instruktiv und gut gewählt. Eine von solchen Beispielen ausgehende schrittweise Hinführung zu den zuvor definierten Strukturen hätte nichtspezialisierten Lesern den Einstieg in diese Materie vielleicht er-leichtern können.

Das zweite Kapitel (*Real Algebra*) bringt unter anderem reelles Spektrum und seine Topologie, Zusammenhang zwischen Spezialisierungen und Bewertungen, reelle Stellensätze, reelles Going-up und Going-down, und strikt reelle Henselisierung. Die Be-weise werden zum größeren Teil ausgeführt, im anderen Fall finden sich präzise Referen-zen.

Die nächsten drei Kapitel (*Spaces of Signs, Spaces of Orderings* und *The Main Results*) bilden im technischen Sinne das Herzstück des Buches. Die Rolle der hier stu-dierten Konzepte ist schon erläutert worden. Ihre Theorie wird systematisch und relativ weit entwickelt. All dieses Material erscheint erstmals in Buchform. Die Hauptschwierig-keit für den Leser dürfte weniger in der Verifikation einzelner Beweisschritte liegen als darin, sich auch mit dem „Herzen“ anzueignen, was hier geschieht. Mancher mag ver-sucht sein, diese Teile erst einmal auf guten Glauben hinzunehmen und zu den Anwen-dungen fortzuschreiten. Für ein erstes Überfliegen mag das legitim sein, doch versäume man nicht, die Lücke zu schließen; man würde sonst den Kern der Theorie verpassen.

Chapter VI (*Spaces of Signs of Rings*) ist vor allem dem Studium von Algebren über Körpern gewidmet. Die zuvor entwickelte Theorie hat gezeigt, daß es für das Stu-

<sup>1</sup> Marshall hat seit Anfang der 90er Jahre ein ähnliches Konzept erarbeitet, das er ab-strakte reelle Spektren (*abstract real spectra*) nennt. Er hat später gezeigt, daß diese Objekte zu den Vorzeichenräumen äquivalent sind. Sein Buch *Spaces of Orderings and Abstract Real Spec-tra* (Lect. Notes Math. 1636, Springer, 1997) enthält neben einer Exposition dieser Theorie auch eine vollständige Einführung in die Anordnungsräume, wobei die Strukturtheorie in bei-den Fällen weiter entwickelt wird als in dem hier besprochenen Buch. Marshalls Lecture Notes bieten somit einen alternativen Zugang zu wesentlichen Teilen des letzteren.

dium der Invarianten  $s, \bar{s}$  usw. vor allem darauf ankommt, die Fächer in den Vorzeichenräumen möglichst gut zu verstehen. Zunächst wird der schon erwähnte enge Zusammenhang zwischen Fächern und reellen Bewertungen dargestellt. Dann wird Bewertungstheorie benutzt, um obere und untere Abschätzungen des Stabilitätsindex bei Körpererweiterungen zu geben. Man muß auch studieren, wie sich Fächer bei Ringen unter Spezialisierung verhalten. So ergeben sich dann Aussagen über die Invarianten von affinen  $k$ -Algebren.

Die beiden letzten Kapitel (*Real Algebra of Excellent Rings* und *Real Analytic Geometry*) sind Anwendungen in der analytischen Geometrie gewidmet, wobei das erste vorbereitenden Charakter hat. Es erklärt zunächst Dinge wie reguläre Homomorphismen, Weierstraßschen Vorbereitungssatz, exzellente Ringe, Artin Approximation, und studiert dann die reellen Spektren exzellenter Ringe. Diese haben die meisten guten Eigenschaften, die man sich wünschen kann (Kurvenauswahllemma, gute Dimensionstheorie und Konstruierbarkeitseigenschaften), und vermeiden Pathologien, die bei allgemeinen reellen Spektren auftreten können. Ch. VIII schließlich bringt die abstrakte Theorie der Vorzeichenräume und die reelle Algebra exzellenter Ringe zu einer Synthese. Nach einer Einführung in die algebraischen Eigenschaften lokaler und globaler analytischer Ringe werden Stellensätze und Hilbert 17 für analytische Funktionen auf einer analytischen Menge  $X$  behandelt, sowie die Fragen der minimalen Beschreibung global semi-analytischer Mengen. Ganz generell gibt es Probleme, wenn  $X$  nicht kompakt ist; jedoch kommen viele der hier erzielten Resultate mit erheblichen Abschwächungen der Kompaktheit von  $X$  aus.

Wie schon erwähnt, gab es bisher noch keine zusammenhängende Gesamtdarstellung dieser Thematik, und so war das Vorhaben der Autoren zweifellos ein ehrgeiziges. Es wäre erstaunlich, wenn sich bei so anspruchsvoller Aufgabe im Ergebnis nicht auch ein paar Schwächen fänden. So scheint es, daß nicht alle Teile des Buches mit gleicher Akribie Korrektur gelesen worden sind. Man stößt durchaus hin und wieder auf falsche Aussagen oder unzureichende Argumente, wobei manche von ihnen zusätzlich mit Druckfehlern garniert sind. (Siehe etwa S. 70, Beweis von 2.6e), oder S. 135, Beweis von 3.2.) Überhaupt war der Druckfehlerteufel recht fleißig. Immer wieder mal fehlen Voraussetzungen, oder andere mathematische Unkorrektheiten haben sich eingeschlichen. Die Verständlichkeit der Darstellung erscheint mitunter durchaus noch verbesserungsfähig. (Nur ein Beispiel: Wer etwa den Begriff der (Krull-) Bewertung eines Körpers noch nicht kennt – zugegeben, das wird für wenige Leser zutreffen –, wird ihn aus der Erklärung auf S. 38 nicht verstehen!) Manchmal geht das bis zur Wortwahl, die hin und wieder das Gemeinte eher verunklart. Spezialisten werden sicher keine Schwierigkeiten haben, solche Steinchen aus dem Weg zu räumen, aber für jemand, der in das Gebiet erst eindringen will, scheint mir das Buch doch eine anspruchsvolle Herausforderung zu sein.

Trotz solcher gewisser Schwächen ist hier ein verdienstvolles, ein wichtiges und ein nützliches Buch entstanden. Wer damit in die Theorie einsteigen will, sollte schon etwas Vertrautheit mit reeller Algebra, reellem Spektrum oder (reduzierten) quadratischen Formen mitbringen. Was aus diesen Gebieten verwendet wird, wird zwar bereit gestellt, aber vielfach nur in Form knapper Zitate; und auch jene Teile des Buches, die im technischen Sinn ohne diese Vorkenntnisse auskommen (etwa die Kapitel III–V), werden mit solchem Hintergrund besser verständlich sein. Für Experten ist das Buch unentbehrlich, da es nicht nur Entwicklungen der letzten zwei Jahrzehnte erstmals in geschlossener Form zusammenfaßt, sondern darüber hinaus auch noch vielfache Ergänzungen und Verbesserungen der originalen Darstellungen enthält. Zu wünschen wäre, daß das Buch nicht nur viele Käufer, sondern auch Leser findet.

**Graham, R. L., Nešetřil, J. (Eds.), The Mathematics of Paul Erdős I and II** (Algorithms and Combinatorics, Vol. 13 und Vol. 14), Berlin u.a.: Springer 1997, 399 S. und 577 S., DM 148,- und DM 148,-

Wie die Herausgeber schreiben, entstand die Idee zu den vorliegenden Bänden, als Paul Erdős 1992 die Ehrendoktorwürde der Karls-Universität in Prag erhielt. Erdős hat die Bände noch gesehen, doch bevor sie publiziert wurden, starb er im Herbst 1996, und so stellen sie in einem gewissen Sinne einen Nachruf und ein Vermächtnis dar.

Paul Erdős war zu Lebzeiten vielleicht der bekannteste Mathematiker – mit Sicherheit aber der verehrteste, man kann schon sagen geliebteste, von den älteren gleichermaßen wie von den jüngeren. Bei seinem letzten Besuch in Berlin konnte ich das wieder staunend beobachten. Der schon sehr fragile alte Mann gewann die Herzen aller Zuhörer im bis zum letzten Platz gefüllten Hörsaal im Flug. Und die Studenten spürten, daß es keine Pose war, wenn er nach dem Vortrag Studenten aus dem ersten Semester fragte: „Und woran arbeiten Sie zur Zeit?“ Es war die Essenz seines Lebens, Fragen zu stellen und Ideen zu verbreiten. Man kann sich keinen großzügigeren Menschen sowohl im persönlichen Leben wie im mathematischen Wirken vorstellen.

Um diese *raison d'être* von Paul Erdős angemessen zu beschreiben, muß jede Würdigung den ungewöhnlichen Lebenslauf aufgreifen ebenso wie sein mathematisches Werk, das neben zahllosen eigenen Pionierarbeiten in der Kunst der Zusammenarbeit gipfelte.

Die beiden vorliegenden Bände spiegeln diese beiden Aspekte auf wunderbare Weise wider. Band I wird eingeleitet von einem glänzenden Essay von Béla Bollobás über Leben und Werk. Es entstehen die Tage des jungen Genies, die Aufenthalte in England und USA, die unselige McCarthy Periode, und schließlich die Jahre des Weltreisenden in *rebus mathematicis*. Berührend ist auch das 1. Kapitel „Early Days“ mit persönlichen Erinnerungen von frühen Weggefährten. Die folgenden Kapitel widmen sich dem mathematischen Werk, gegliedert in 6 Teile: Number Theory, Randomness and Applications, Combinatorics and Graph Theory, Ramsey Theory and Extremal Theory, Geometry, und Infinity. Beiträge von mehr als 70 Autoren, von denen die meisten, manchmal über viele Jahre, mit Erdős publiziert hatten, geben beredtes Zeugnis über den profunden Einfluß, den Erdős bis in die letzten Jahre ausgeübt hatte.

Fast alle Artikel haben ihren Ausgangspunkt in einer Vermutung oder Anregung von Erdős – und so ergibt sich tatsächlich ein mathematisches Vermächtnis, das einen nur staunen läßt.

Paul Erdős Arbeiten umspannen mehr als 6 Jahrzehnte: Zahlentheorie, Analysis, Approximationstheorie, Geometrie, Mengenlehre und Kombinatorik waren seine hauptsächlichen Arbeitsgebiete. Extremale Kombinatorik, Ramseytheorie und vor allem die probabilistische Methode sind ohne ihn nicht denkbar. Die Liste von 1414 Veröffentlichungen (bis 1996) am Ende von Band II gibt eine Ahnung dieses mathematischen Lebens.

So ist kein gewöhnlicher Festband entstanden, den man durchblättert und weglagt. Die sehr schön gestalteten Bände sind ein würdiger Ausdruck des Dankes und der Zuneigung all jener, die das Glück hatten, mit ihm zu arbeiten und ihn zu erleben.

**Diestel, R., Graph Theory**, Berlin u.a.: Springer 1997, 286 S., DM 59,-

**Diestel, R., Graphentheorie**, Berlin u.a.: Springer 1997, 288 S., DM 58,-

Aus dem Vorwort der deutschen Ausgabe des Buches: *Die Zeit scheint daher reif für eine Neubesinnung: „Was sind heute die Grundpfeiler der Graphentheorie, die einer einführenden und doch in die Tiefe zielenden Vorlesung das Fundament geben können?“*

Diese Neubesinnung ist in dem von Reinhard Diestel vorgelegten Band *Graphentheorie* mit größter inhaltlicher wie formaler Sorgfalt geschehen. Das Ergebnis ist, um dies bereits hier vorweg zu nehmen, eine hervorragende und vorbehaltlos zu empfehlende Einführung in eine moderne Graphentheorie.

Kurz zum Formalen. Das Buch ist, wie erwähnt, mit größter Sorgfalt geschrieben. Fehler finden sich im Text so gut wie nicht, die Sprache ist präzise und mit Bedacht gewählt. Die Verweise am Rand des Textes sind zwar gewöhnungsbedürftig, erweisen sich jedoch bei längerem Lesen als nützlich. Sehr sinnvoll für ein deutschsprachiges Lehrbuch ist der englisch-deutsche Index.

Nun zum Inhaltlichen. Ein Blick auf die Kapitelüberschriften (Paarungen; Zusammenhang; Graphen in der Ebene; Färbungen; Flüsse; Teilstrukturen; Ramseytheorie für Graphen; Hamiltonkreise; Zufallsgraphen; Minoren, Bäume und WQO) zeigt, daß in dem Buch Klassisches mit Modernem verbunden werden soll und in gelungener Weise verbunden wird. Es wird eine für jedermann zugängliche Einführung in die Graphentheorie gegeben, die den Leser von der Attraktivität der Graphentheorie durch die Darstellung anspruchsvoller und teilweise recht neuer Ergebnisse zu überzeugen sucht. Dies gelingt dadurch, daß der Autor sich große Mühe bei der Auswahl der Beweise gibt, auch längere Beweise hervorragend motiviert und lückenlos darstellt. Manche Ergebnisse (wie beispielsweise die Existenz endlicher Ramseygraphen) werden mehrmals und auf verschiedene Arten bewiesen. Dies hilft dem Leser beim Verständnis des Ergebnisses und lehrt gleichzeitig wichtige Beweismethodiken.

Jedes Kapitel enthält Übungen und Notizen, beide unverzichtbar für den Lernenden, die einen, um das Gelesene zu festigen, die anderen, um es einzuordnen. Jedoch auch der in der Graphentheorie schon etwas Versiertere wird beide mit Genuß lesen.

Die englische Ausgabe unterscheidet sich nur wenig von der deutschen. Das Kapitel „Teilstrukturen“ wird in zwei Kapitel „Substructures in Dense Graphs“ und „Substructures in Sparse Graphs“ geteilt und es wird beispielsweise der Beweis des Regularitätslemmas aufgenommen. Auch wenn dieser Beweis (nicht nur hier) recht technisch ist, die Wichtigkeit des Ergebnisses für die Graphentheorie läßt die englische Ausgabe hier vollständiger erscheinen. Positiv zu vermerken ist, daß das Buch in Deutsch und in Englisch geschrieben worden ist, und nicht einfach eine Übersetzung aus dem Deutschen ins Englische erfahren hat.

Die Graphentheorie hat in den letzten Jahrzehnten eine Vielschichtigkeit und Tiefe erreicht, die es unmöglich macht, auf 280 Seiten in alle wesentlichen Aspekte einzuführen und alle Facetten zu beleuchten. Die Auswahl, was in den Vordergrund gestellt wird, was am Rande betrachtet wird und was schließlich dem beschränkten Platz geopfert werden muß, ist naturgemäß subjektiv. Die Auswahl, die Reinhard Diestel getroffen hat, und vor allem die Darstellung des ausgewählten Stoffes machen das Buch zu einem hervorragenden Beitrag zur Graphentheorie, der sich in den Kanon der prägenden Lehrbücher einreihen wird.



**Janson, S., Gaussian Hilbert Spaces** (Cambridge Tracts in Mathematics 129), Cambridge University Press 1997, 340 S., £ 40,-

Das Interesse an *Gaußschen Wahrscheinlichkeitsräumen* entwickelte sich aus ganz verschiedenen Anwendungsbereichen über einen bereits sehr langen Zeitraum. Impulse kamen aus der Quantenfeldtheorie, der Quantenstochastik oder nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie, den stochastischen PDGL. Sie bilden den theoretischen Hintergrund beim stochastischen Zugang zum Studium der Glattheit von Verteilungen von Diffusionen im Malliavin-Kalkül, der verwandten Theorie von Gaußschen Maßen auf großen Distributionenräumen im Hida-Kalkül, oder beim Studium der asymptotischen Verteilungen von U-Statistiken. Als Objekt gemeinsamen Interesses kristallisieren sich zufällige Gaußsche Felder heraus, die durch Hilbert-Räume indiziert sind. In all diesen Gebieten existieren inzwischen, z.T. seit langem, gute Monographien, in denen aus dem Blickwinkel der jeweiligen Anwendung Gaußsche W.räume eingeführt und relevante Aspekte untersucht werden. Hier eine Auswahl: Simon (1979), Major (1981), Watanabe (1984), Hida, Kuo, Potthoff, Streit (1993), Meyer (1993), Nualart (1995), Holden, Oksendal, Uboe, Zhang (1997), Malliavin (1997).

Das vorliegende Buch stellt sich der Aufgabe, die Theorie Gaußscher W.räume, soweit sie all diesen Anwendungsbereichen gemeinsam ist, in einem fest umrissenen begrifflichen Rahmen auf relativ elementarem Niveau zu entwickeln, und von diesem Standpunkt aus wichtige Ergebnisse aus vielen dieser Gebiete in sich geschlossen darzustellen. Kapitel 1 bis 5 umfassen den ersten Teil dieses Projekts. Dem zweiten Teil widmet der Autor die restlichen 2/3 des Buches. Hier die Kapitelüberschriften:

1. Gaussian spaces – 2. Wiener chaos – 3. Wick products – 4. Tensor products and Fock space – 5. Hypercontractivity – 6. Variables with finite chaos decomposition – 7. Stochastic integration – 8. Gaussian stochastic processes – 9. Conditioning – 10. Pairs of Gaussian subspaces – 11. Limit theorems for generalized U-statistics – 12. Applications to operator theory – 13. Some operators from quantum physics – 14. The Cameron-Martin shift – 15. Malliavin calculus – 16. Transforms – Appendices.

Experten der verschiedenen Bereiche der Anwendung Gaußscher W.räume werden keine wesentlich neuen Resultate finden. Die Verdienste des Autors liegen auf einem anderen Gebiet. Es ist das erste mir bekannte Buch, dem es gelingt, mit einem gemeinsamen theoretischen Überbau zumindest wichtige Teile so verschiedener und z. T. weit auseinander liegender Bereiche übersichtlich, vergleichsweise elementar und leicht zugänglich darzustellen. Ich kann mir vorstellen, daß dieses Konzept vielen Lesern erste Einblicke in das weite Feld Gaußscher W.räume erleichtert. Daher fand ich die Einschränkung auf Gaußsche Hilberträume konsequent und gut. Dem Leser kommt auch entgegen, daß der Autor die Klarheit seiner Darstellung nicht dem Ehrgeiz opfert, das riesige Gebiet vollständig zu umreißen. So fehlen z. B. die Gross'sche Theorie abstrakter Wiener Räume, die den gewählten Rahmen *konkreter* W.räume sprengen würde. Auch ist nicht die Rede vom für den Malliavin-Kalkül oder den Hida-Kalkül wichtigen analytischen Hilfsmittel der Dirichlet-Formen und darauf aufbauenden Techniken. Den Vorschlag des Autors, den Inhalt der ersten 5 Kapitel zum Gegenstand eines einführenden Kurses zu machen, halte ich für schwer durchführbar: Abstraktion und Klarheit werden mit Trockenheit erkauft, und deshalb ein einführender Kurs ohne einen Blick in eine der in späteren Kapiteln behandelten Anwendungen schwer verdaulich.

Das Buch ist nicht das erste, das den Anspruch erheben kann, in die Theorie Gaußscher Maße auf relativ elementarem Niveau einzuführen (vgl. Malliavin (1993)). Es sollte dennoch einen guten Platz auf dem Buchmarkt behaupten. Durch konsequente und zielstrebige Ausnutzung eines fest umrissenen Konzepts und die Beschränkung auf die damit verfügbaren Methoden hat der Autor eine elementare, geschlossene, gut durchdachte

und sorgfältig aufgeschriebene Einführung in die Theorie Gaußscher Maße geschaffen. Sie bildet außerdem eine gemeinsame Plattform für einen schnellen Einblick in einige der Anwendungsgebiete in Mathematik oder theoretischer Physik, die unabhängigen Wert hat, da einige der Gebiete bislang wenig Interaktion hatten.

Berlin

P. Imkeller

**Temam, R., Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,** 2. Aufl., Berlin u. a.: Springer-Verlag 1997, 648 S., DM 98,-

Gegenüber der ersten Auflage des Buches aus dem Jahre 1988 ist die zweite Auflage um circa 150 Seiten erweitert. Somit liegt auch diesmal wieder ein Buch vor, das neueste Forschungsergebnisse enthält. Es sticht dadurch deutlich aus den vergleichbaren Standardwerken aus den Jahren 1981 bis 1992 (Henry [3], Pazy [4], Hale [2], Babin & Vishik [1]) heraus, und zwar sowohl in Umfang, Aktualität, Tiefe und Anwendungsvielfalt als auch in den Ansprüchen an die Leser.

Doch zunächst soll auf den allgemeinen Inhalt eingegangen werden. Im vorliegenden Werk sind die unendlichdimensionalen dynamischen Systeme durch partielle Differentialgleichungen in der abstrakten Form  $\dot{u} + Au = F(u)$ ,  $u(0) = u_0$ , gegeben. Dabei steht weniger die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen im Vordergrund als vielmehr das qualitative Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ . Wesentliche Konzepte der Theorie der Dynamischen Systeme wie  $\omega$ -Limesmengen, Attraktoren sowie deren Dimensionen und invariante Mannigfaltigkeiten werden hier im unendlichdimensionalen Fall betrachtet und auf konkrete partielle Differentialgleichungen angewendet. Als Beispiele seien hier die Navier-Stokesschen Gleichungen, Reaktionsdiffusionsgleichungen, die nichtlineare Schrödinger- und die Ginzburg-Landau-Gleichung genannt.

Eine Eigenheit des Buches ist der spezielle Zugang zur Existenztheorie, dem das folgende klassische Ergebnis zugrundeliegt: Seien  $V, H$  Hilbert-Räume mit  $V \subset H \subset V'$  und ist  $A : V \rightarrow V'$  ein Isomorphismus mit  $\langle Au, u \rangle_{V' \times V} \geq \alpha \|u\|_V^2$  für ein  $\alpha > 0$  und alle  $u \in V$ . Dann besitzt

$$\dot{u} + Au = f(t), \quad u(0) = u_0$$

für alle  $f \in L^2((0, T), V')$  und  $u_0 \in H$  eine eindeutige Lösung  $u \in H^1((0, T), V') \cap C^0([0, T], H) \cap L^2((0, T), V)$ . Diese Hilbert-Raum-Theorie führt auf diverse Einschränkungen, die manchmal mühsame Auswege erfordern, wie etwa beim globalen Existenzbeweis für die Ginzburg-Landau-Gleichung in Kap. IV.5.2, der mit  $L^p$ -Abschätzungen wesentlich einfacher geführt werden kann.

Der obenbeschriebene Zugang, der auf Galerkin-Approximationen und Energieabschätzungen aufbaut, wird auch in [1] gewählt, aber die anderen Standardwerke [2–4] basieren auf der Theorie der linearen Halbgruppen  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  und der Formel der Variation der Konstanten  $u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$ . Im vorliegenden Buch werden starkstetige bzw. analytische lineare Halbgruppen nicht als eingeständiges Konzept eingeführt, obwohl sie auf Seite 510 implizit definiert und benutzt werden (auf Seite 537 sogar für allgemeine Banach-Räume). Diese Behandlung wird der allgemeinen Bedeutung von „ $(e^{tA})$ “ sicher nicht gerecht, zumal die letzten drei Kapitel ohne die lineare Halbgruppentheorie undenkbar wären.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten im wesentlichen durch zwei große Einschübe. Erstens ist dies die Theorie der Attraktoren für sehr schwach dissipative, nichtlineare Wellengleichungen, nämlich die eindimensionale nichtlineare Schrödinger- und die Korteweg-de Vries-Gleichung mit Anregung und Dämpfung (pp. 239–315). Dabei werden die kürzlich entwickelten Methoden von O. Goubet bzw. I. Moise & R.

Rosa verwendet, die darauf beruhen, daß die Einschränkung der Nichtlinearitäten auf Funktionen, deren erste  $n$  Fourier-Koeffizienten verschwinden, eine Lipschitzkonstante haben, die wie  $n^{-\alpha}$  mit  $\alpha > 0$  abfällt. Weiter wird gezeigt, daß der  $H^1$ -Attraktor sogar in  $H^k$  liegt, wenn die Anregung dies tut. In Kapitel IV.8 werden Evolutionsgleichungen auf unbeschränkten Gebieten betrachtet.

Leider erscheint die Ginzburg-Landau-Gleichung in Kapitel IV.5 unter den dissipativen Wellengleichungen. Dabei handelt es sich doch um eine parabolische Gleichung vom Typ der Reaktionsdiffusionsgleichungen, deren Linearteil eine kompakte Halbgruppe erzeugt. Sonst wäre es wohl kaum möglich in Kapitel VIII.4.4 eine inertielle Mannigfaltigkeit zu konstruieren.

Zweitens wird in den neuen Kapiteln IX und X die Theorie der inertialen und langsamen Mannigfaltigkeiten im Falle nichtselbstadjungierter Linearteile bzw. deren Approximationen behandelt. Die Theorie der approximativen inertialen Mannigfaltigkeiten kann dabei als eine nichtlineare Verallgemeinerung der Galerkin-Verfahren verstanden werden. Anstatt die höheren Spektralmoden gleich 0 zu setzen, werden sie als nichtlineare Funktion der niedrigen Moden angesetzt. Die Güte der diversen Ansätze wird untersucht.

Insgesamt gesehen ist das Buch ein hervorragendes und unverzichtbares Standardwerk für all diejenigen, die am aktuellen Forschungsgeschehen auf dem Gebiet der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen aus Sicht der Dynamischen Systeme teilhaben wollen. Als Vertiefungsliteratur zu Vorlesungen und Seminaren ist das Buch nur dann verwendbar, wenn die entsprechenden Grundlagen sorgfältig gelegt wurden. Das Literaturverzeichnis wurde aktualisiert und damit um neun Seiten erweitert, während der Stichwortindex leider unverändert kurz geblieben ist.

- [1] A.V. Babin, M.I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*. North-Holland, Amsterdam 1992, pp 532. (Russische Ausgabe Moskau 1989.)
- [2] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Mathematical Surveys and Monographs 25, Amer. Math. Soc. 1988, pp 198.
- [3] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lect. Notes Math. Vol. 840, Springer-Verlag, 1981, pp 348.
- [4] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983, pp 279.

Hannover

A. Mielke

**Gliklikh, Y., Global Analysis in Mathematical Physics, Geometric and Stochastic Models** (Appl. Math. Sciences 122), Berlin u. a.: Springer 1997, DM 88,-

Das Buch ist einer breiten Palette von Anwendungen von Methoden der globalen Analysis gewidmet. Hierzu gehen Differentialgeometrie und klassische Mechanik, stochastische Differentialgeometrie und statistische und Quanten-Mechanik, sowie unendlich-dimensionale Differentialgeometrie von Diffeomorphismengruppen und Hydrodynamik. Entsprechend dieser Schwerpunkte besteht das Buch aus drei Teilen. Im ersten Teil geht es um endlich-dimensionale Differentialgeometrie und Mechanik, wo zunächst allgemeine Resultate über die Analysis auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten dargestellt werden. Weiterhin wird der differentialgeometrische Zugang zur klassischen Newtonschen Mechanik beschrieben; die Newtonsche Gleichung ist mittels einer kovarianten Ableitung bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs der Riemannschen Metrik geschrieben. Es werden Integraloperatoren mit Riemannscher Parallelverschiebung eingeführt und zum Studium des qualitativen Verhaltens geometrischer mechanischer Systeme eingesetzt.

Der zweite Teil befaßt sich mit stochastischer Differentialgeometrie und Anwendungen in der Physik. Insbesondere werden Beziehungen zwischen Differentialgeometrie und der Theorie der stochastischen Prozesse dargestellt, basierend auf einem Zugang von Belopolskaya-Dalecky zur Definition von Itô's stochastischen Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten sowie auf Integralen mit Riemannscher Parallelverschiebung, verallgemeinert durch den Autor auf den stochastischen Fall. Weiterhin wird die Langevin-Gleichung studiert; sie beschreibt die Brownsche Bewegung in einem nichtlinearen Konfigurationsraum. Schließlich wird Nelson's stochastische Mechanik behandelt; die entsprechenden Bewegungsgleichungen der stochastischen Mechanik sind eine Verallgemeinerung von Newton's Gleichung, grundsätzlich verschieden von der Verallgemeinerung zur Langevin-Gleichung.

Im dritten Teil wird die (schwache) Differentialgeometrie von Diffeomorphismengruppen kompakter Mannigfaltigkeiten sowie der moderne geometrische Lagrange-Formalismus der Hydrodynamik im Sinne von Arnold, Ebin und Marsden dargestellt. Es werden  $H^s$ -Diffeomorphismen,  $s > \frac{n}{2} + 1$ , studiert, woraus sich dann der Lagrange-Formalismus in natürlicher Weise aus Newton's Gleichung auf solchen Diffeomorphismengruppen als Konfigurationsraum ergibt. Die Bewegung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit ist gegeben durch ein  $C^\infty$ -Vektorfeld auf dem Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit der Diffeomorphismen. Es werden lokale (in der Zeitvariablen) Existenz und Regularität von Lösungen für Mannigfaltigkeiten mit und ohne Rand bewiesen. Methoden der stochastischen Differentialgeometrie werden weiterhin auf die Bewegung viskoser inkompressibler Flüssigkeiten angewendet. Modell-Problem ist die Bewegung in einem  $n$ -dimensionalen flachen Torus. Definiert wird eine Klasse von Prozessen auf der Gruppe Volumen-erhaltender Diffeomorphismen des Torus, deren mathematische Erwartungen dann zum Fluß der Flüssigkeit führen.

Das Buch bietet eine große Vielfalt interessanter und wichtiger Entwicklungen der Mathematischen Physik in einem vereinheitlichten modernen Zugang. Es dürfte für Mathematiker und Physiker gleichermaßen von Interesse sein, desgleichen als Grundlage von Spezialkursen bzw. Seminaren.

Potsdam

B.-W. Schulze

**Böttcher, A., Karlovich, Y. I., Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators** (Progress in Math. 154), Basel: Birkhäuser 1997, 416 S., DM 188,-

Das Buch ist ein eindrucksvoller Bericht über den heutigen Stand der Spektraltheorie der Toeplitz-Operatoren mit stückweise stetigem Symbol und der damit eng verbundenen Theorie der singulären Integraloperatoren mit stückweise stetigen Koeffizienten auf Carleson Kurven in der komplexen Ebene. Ist  $\Gamma$  eine rektifizierbare Kurve in der komplexen Ebene und ist  $f \in L_1(\Gamma)$ , so existiert (fast überall auf  $\Gamma$ ) das singuläre Cauchy-Integral

$$(Sf)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

wobei  $\Gamma(t, \varepsilon)$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung um  $t$  auf  $\Gamma$  ist. Singuläre Integrale haben eine lange Geschichte, auf  $\mathbb{R}$ , auf Intervallen, im  $\mathbb{R}^n$ . A. P. Calderon bemerkte 1977, daß derartige Integrale auf Lipschitzkurven definiert werden können und zu einer reichhaltigen tiefliegenden Theorie Anlaß geben. Der (zumindest vorerst) krönende Abschluß der Theorie dieser Operatoren besagt in etwa, daß  $S$  im gewichteten Raum  $L_p(\Gamma, w)$  mit  $1 < p < \infty$  genau dann ein beschränkter Operator ist, wenn  $\Gamma$  eine Carleson Kurve und  $w \in A_p(\Gamma)$  ein

Muckenhoupt-Gewicht ist. Im Buch ist dies Theorem 4.15, wobei Kap. 4 und insbesondere Kap. 5 dem Beweis dieses herausragenden und tiefliegenden Satzes der modernen Analysis gewidmet sind. Die Autoren haben (nach eigenen Angaben) etwas gezögert, den vollen Beweis dieser Aussage mit aufzunehmen (er füllt Kap. 5, wobei Kap. 4 vorbereitendes Material enthält). Der nunmehr vorgelegte Beweis hat den großen Vorteil, daß er auch für Nichtspezialisten lesbar ist und insbesondere das benötigte Instrumentarium im Detail darlegt. Die Theorie der obigen Integraloperatoren steht im engsten Zusammenhang mit der Spektraltheorie der Toeplitz-Operatoren. Dies ist das Hauptanliegen des Buches, wobei Kap. 6 (vorbereitend) und insbesondere Kap. 7 den Höhepunkt des Buches darstellen. Ist  $\Gamma$  wiederum eine Carleson Jordan Kurve in der komplexen Ebene,  $1 < p < \infty$  und  $w \in A_p(\Gamma)$  ein Muckenhoupt-Gewicht, so ist der obige Operator  $S$  in  $L_p(\Gamma, w)$  idempotent,  $S^2 = id$ , und  $P = \frac{1}{2}(id + S)$  ist ein Projektor von  $L_p(\Gamma, w)$  auf  $L_p^+(\Gamma, w) = PL_p(\Gamma, w)$ . Ein Toeplitz-Operator, erzeugt durch das Symbol  $a \in L_\infty(\Gamma)$  ist dann die Abbildung

$$g \mapsto P(ag) \quad \text{in } L_p^+(\Gamma, w).$$

Toeplitz-Operatoren (und Toeplitz-Matrizen) haben ihrerseits eine lange Geschichte. Aber erst in jüngster Zeit, nicht zuletzt durch die Forschungsergebnisse der Autoren, ist der enge Zusammenhang mit singulären Integralen im obigen Kontext (Carleson-Kurven, Muckenhoupt-Gewichte) klar geworden. Ursprünglich lieferte die Spektraltheorie solcher Operatoren Kreisbögen in der Ebene ( $\Gamma$ : Lyapunov-Kurven,  $w$ : Gewichte vom Potenztyp). Es ist überaus überraschend, daß der Schritt von Lyapunov-Kurven zu allgemeinen Carleson-Kurven und von Gewichten vom Potenz-Typ zu allgemeinen Muckenhoupt-Gewichten zu einer sehr viel reichhaltigeren Spektraltheorie führt: einfache Kreisbögen verwandeln sich in (logarithmische) Spiralen usw. Die Theorie wird im Detail im Kap. 7 dargelegt und ist Hauptanliegen des Buches.

Das Buch hat 10 Kapitel: 1. Carleson curves – 2. Muckenhoupt weights – 3. Interaction between curve and weight – 4. Boundedness of the Cauchy singular integral – 5. Weighted norm inequalities – 6. General properties of Toeplitz operators – 7. Piecewise continuous symbols – 8. Banach algebras – 9. Composed curves – 10. Further results.

Die Kap. 8 und 9 vertiefen und erweitern die im Kap. 7 erhaltenen Aussagen.

Jena

H. Triebel

**Triebel, H., Fractals and spectra related to Fourier analysis and function spaces** (Monographs in Mathematics 91) Basel u. a.: Birkhäuser 1997, 271 S., DM 128,-

Some books on fractals, like the more lurid advertisements, arouse expectations that are left unfulfilled: the pretty pictures do not enter into any meaningful relationship with mathematics and ultimately lose their charm. It is a pleasure to report that the book under review is emphatically not of this kind and that it delivers what it promises. The reader is given an up-to-date account of the interaction between fractals and the theory of function spaces, with applications to the spectral theory of (fractal) pseudodifferential operators, and with a particularly fascinating discussion of the eigenvalues of certain types of vibrating drums.

Chapter 1 gives an efficient account of the basic notions needed for fractals. Fundamental in this is the idea of a  $d$ -set: a subset of  $\mathbb{R}^n$  is called a  $d$ -set ( $0 \leq d \leq n$ ) if there is a Borel measure  $\mu$  on  $\mathbb{R}^n$ , with  $\text{supp } \mu = \cdot$ , such that there are positive constants  $c_1, c_2$  with

$$c_1 r^d \leq \mu(B(\gamma, r) \cap \cdot) \leq c_2 r^d$$

for all  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  and all  $r \in (0, 1)$ . Here  $B(\gamma, r)$  is the open ball in  $\mathbb{R}^n$  with centre  $\gamma$  and radius  $r$ . Various types of self-affine fractals are introduced and numerous examples given. Entropy numbers make their first appearance in the next chapter, and sharp upper and lower estimates are obtained of the entropy numbers of embeddings between weighted  $\ell_p$ -spaces. The substantial third chapter deals with the Besov spaces  $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$  and the Triebel-Lizorkin spaces  $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ . Here one finds a new proof of atomic representations of elements of these spaces, and even a subatomic decomposition (called a quarkonial decomposition) in which the atoms are split, so to speak. These decompositions are also proved for Banach-space-valued function spaces of  $B$  and  $F$  type. In Chapter 4 function spaces and fractals meet head-on. The Hausdorff dimension  $\dim_H$  of a Borel set in  $\mathbb{R}^n$  with  $\dim_H < n$  is characterised in terms of distributions and function spaces. The Lebesgue spaces  $L_p(\cdot)$  and Besov spaces  $\mathbf{B}_{pq}^s(\Gamma)$  are introduced and their relationship with the conventional Besov spaces  $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$  is examined. By quarkonial decomposition techniques it is shown that if  $id$  is the natural embedding of  $\mathbf{B}_{p_1 q_1}^{s_1}(\Gamma)$  in  $\mathbf{B}_{p_2 q_2}^{s_2}(\Gamma)$ , where  $\Gamma$  is a compact  $d$ -set,  $0 \leq s_2 < s_1 < \infty$ ,  $0 < p_1 \leq \infty$ ,  $0 < p_2 \leq \infty$ ,  $0 < q_1 \leq \infty$ ,  $0 < q_2 \leq \infty$  and  $s_1 - s_2 > d \left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)_+$ , then the  $k^{\text{th}}$  entropy numbers  $e_k(id)$  of  $id$  satisfy

$$C_1 k^{-(s_1 - s_2)/d} \leq e_k(id) \leq C_2 k^{-(s_1 - s_2)/d}, \quad k \in \mathbb{N},$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are positive numbers independent of  $k$ . This should be compared with the (by now well-known) result for the entropy numbers of  $id_1 : B_{p_1 q_1}^{s_1}(\Omega) \rightarrow B_{p_2 q_2}^{s_2}(\Omega)$ , where  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^n$  and  $s_1, s_2, p_1, p_2, q_1, q_2$  satisfy the same conditions but with the condition on  $s_1 - s_2$  relaxed by  $s_1 - s_2 > n \left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)_+$  (although now  $s_1, s_2$  may even be negative):  $e_k(id_1)$  is bounded above and below by constant multiples of  $k^{-(s_1 - s_2)/n}$ . Regular elliptic operators on compact  $d$ -sets are then introduced by means of quadratic forms and their eigenvalues studied. A key step in this is the celebrated inequality, due to Carl, which relates eigenvalues and entropy numbers. The final chapter deals with the spectra of fractal pseudodifferential operators of various types. Among the many interesting applications given here is that concerned with the vibrations of a drum  $\subset \mathbb{R}^n$ , the whole mass of which is concentrated on a fractal subset  $\Gamma$ , which is a compact  $d$ -set with  $n - 2 < d < n$  ( $0 < d < 1$  if  $n = 2$ ). It turns out that the corresponding eigenvalues  $\mu_k$  satisfy

$$\mu_k \sim k^{-(2-n+d)/d}$$

in the sense that  $\mu_k$  is bounded above and below by constant multiples of  $k^{-(2-n+d)/d}$ . Thus if  $n = 2$ ,  $\mu_k \sim k^{-1}$  and the dependence on  $d$  is lost, at least at this level. Hence the answer to the question 'Can one hear the shape of a fractal drum?' is 'No' if  $n = 2$  and 'Yes' if  $n > 2$ .

The work may be thought of as a natural and striking extension to a fractal setting of the author's book 'Function spaces, entropy numbers, differential operators' (1996) with the reviewer. However, the many new developments in the theory of function spaces which are reported here for the first time make it also a natural continuation of the author's earlier books 'Theory of function spaces' (1983) and 'Theory of function spaces II' (1992). It marks a significant advance in our knowledge of function spaces and is forward-looking: substantial further developments may confidently be anticipated. The material is presented lucidly and with the mastery which one expects of the author. Those who invest enough time to come to grips with the subject matter will be amply rewarded, for both the techniques and the major results seem likely to be of permanent value.

**Lesch, M., Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods** (Teubner-Texte zur Mathem. Bd. 136) Stuttgart, Leipzig: Teubner 1997, 190 S., DM 54,80

Während elliptische Differentialoperatoren auf glatten kompakten Mannigfaltigkeiten seit der Entwicklung des Pseudodifferentialkalküls und dem Indexsatz von Atiyah und Singer in den sechziger Jahren als wohlverstanden gelten können, stellen singuläre und nichtkompakte Mannigfaltigkeiten auch heute noch eine große Herausforderung dar.

So gibt es selbst für ‚einfache‘ Singularitäten bisher keine allgemeine Indexformel, die sich in puncto Transparenz mit der von Atiyah und Singer messen könnte (wenngleich natürlich das Resultat von Atiyah, Patodi und Singer einige wichtige Fälle behandelt), und die Konstruktion adäquater pseudodifferentieller Kalküle mit einer Charakterisierung der Fredholmeigenschaft durch verschiedene Symbolniveaus erfordert bereits für relativ elementare geometrische Singularitäten wie Kanten oder Ecken einen enormen technischen Aufwand.

Andererseits ist die Untersuchung singulärer Konfigurationen durch viele physikalische und technische Anwendungen sowie durch innermathematische Fragenstellungen motiviert und stößt daher auf reges Interesse. So sind im Lauf der letzten Jahre deutliche Fortschritte gemacht worden, und das vorliegende Buch zählt sicherlich dazu.

Lesch betrachtet Mannigfaltigkeiten mit konischen Singularitäten. Dies sind vermutlich diejenigen singulären Objekte, bei denen die Analysis am weitesten fortgeschritten ist. Ein erster Meilenstein war hier die Arbeit von Kondratev (Trans. Moscow Math. Soc. **16**) aus dem Jahr 1967 zu Randwertproblemen in Gebieten mit konischen Punkten. Dort wurden die zentralen Mellintechniken entwickelt, die Lösungsasymptotik bewiesen und die für die Analysis wesentlichen gewichteten Mellin-Sobolev-Räume eingeführt. Stand bei Kondratev das Verständnis der partiellen Differentialgleichungen im Vordergrund, so war es bei den ebenfalls grundlegenden Arbeiten von Cheeger (etwa: Proc. Nat. Acad. Sci USA **76**, 2103-2106 (1979)) die Geometrie.

Auch Leschs Interesse gilt vornehmlich geometrischen und topologischen Fragestellungen. Er beginnt mit einem Abriss der Fredholmtheorie für Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten mit konischen Singularitäten sowie technischen Grundlagen, die für die folgenden asymptotische Entwicklungen benötigt werden. Seine Hauptresultate betreffen dann zunächst die Existenz von Wärmeleitungsentwicklungen für eine Klasse von Operatoren mit konstanten Koeffizienten nahe der Singularität. Er fährt fort mit relativer Indextheorie. Hier erhält er als wesentliche Anwendungen einen analytischen Beweis des Kobordismussatzes und eine Obstruktion gegen die Existenz von Metriken mit positiver Skalarkrümmung. Nächster Schwerpunkt sind Dirac-Schrödinger-Operatoren (auch ‚Callias-Operatoren‘ genannt), für die er einen äquivarianten Indexsatz beweist. Das Buch schließt mit einem kurzen Kapitel über Etafunktionen; es enthält u.a. eine Variationsformel für die Eta-invariante und einen Ausblick auf Leschs Version des Beweises der Verklebeformel für die Eta-invariante.

Von der technischen Seite aus gesehen: Der Autor geht aus von einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Rand, in dessen Nähe die Metrik Produktstruktur hat. Die ‚konischen Singularitäten‘ werden, wie üblich, dadurch modelliert, daß man auf dieser Mannigfaltigkeit total charakteristische Operatoren (vor allem im deutschsprachigen Raum auch unter der Bezeichnung ‚Operatoren vom Fuchs-Typ‘ bekannt) betrachtet, bei denen die Ableitung in Randnormalenrichtung,  $\partial_t$ , nur in der Form  $t\partial_t$  vorkommt. Vielleicht etwas überraschend für moderne Darstellungen dieser Thematik (in denen man eher die Betrachtungsweise als (Mellin-)Pseudodifferentialoperatoren auf gewichteten Mellin-Sobolev-Räumen erwarten würde), ist, daß die Operatoren hier als unbeschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum aufgefaßt werden.

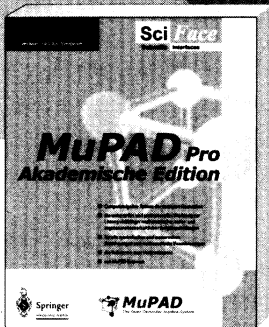
Dies erfordert zunächst einen etwas höheren technischen Aufwand, da man sehr genau auf Definitionsbereiche zu achten hat. Es hat jedoch auch Vorteile. Beispielsweise kommt man mit einem schwächeren Elliptizitätsbegriff aus: Man kann auf die Invertierbarkeit des Konormalensymbols auf der Gewichtsgewichten verzichten und erhält dennoch die Fredholm-Eigenschaft für alle abgeschlossenen Erweiterungen zwischen dem minimalen und dem maximalen Operator, was für gewisse geometrische Anwendungen interessant ist.

Auch fällt es leichter, nichtkompakte Situationen zu erfassen. Lesch betrachtet vollständige Mannigfaltigkeiten; zur Kontrolle der Operatoren im Unendlichen verwendet er eine auf Chernoff zurückgehende Methode, die von der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellengleichung Gebrauch macht. Falls keine Singularitäten vorliegen, liefert sie bereits wesentliche Selbstadjungiertheit. Als Konsequenz kann man auf Randbedingungen im Unendlichen verzichten. Unter Zuhilfenahme einer weiteren technischen Annahme, der sog. „singulären elliptischen Abschätzung“ gelingt es, analytisch die gesamte Situation durch das Verhalten des Operators in der Nähe der Singularität zu beschreiben. Dies ist der zentrale Punkt für die weiteren Resultate.

Das Buch ist gut lesbar und sorgfältig geschrieben. Kapitel I-III sind sogar im wesentlichen „self-contained“; in den beiden letzten Kapiteln kommt der Verfasser verständlicherweise nicht ohne Verweise auf weitere Literatur aus. Hilfreich sind die Zusammenfassungen am Anfang jedes Kapitels, in denen die wichtigen Schritte skizziert werden, und die historisch-bibliographischen Bemerkungen am Ende. Bemängeln könnte man das Fehlen konkreter Beispiele und Anwendungen. Es ist andererseits klar, daß damit die Darstellung bedeutend länger geworden und die Leichtigkeit verloren gegangen wäre. Sicher ein empfehlenswertes Buch für jeden, den diese Thematik interessiert.



# Mathematical Software from Springer



SciFace Software (Hrsg.)

## MuPAD Pro

Akademische Edition

MuPAD - das Computeralgebra-System der neuesten Generation: für alle symbolischen und numerischen Berechnungen sowie für anspruchsvolle mathematische Visualisierungen. Neben den klassischen Problemstellungen der Mathematik können auch mathematische Aufgaben der Natur- und Ingenieurwissenschaften behandelt werden. MuPAD ist ein wertvolles Werkzeug für Studenten, Dozenten und Wissenschaftler. Programm und Hilfetexte sind vollständig in deutscher Sprache. Ein ausführliches Handbuch gewährleistet eine schnelle und intensive Einarbeitung in das System.

1999. CD-ROM, mit Handbuch etwa 310 S.  
\*DM 197,20 (inkl. 16% MwSt.)  
DM 170 / £ 69,96 / FF 650,08 / Lit. 193.170 / ₪ 1241 / sFr 153  
(zzgl. landesübliche MwSt.)  
ISBN 3-540-14790-X

Verkauf nur an Studenten und sonstige Angehörige von Bildungseinrichtungen

**Systemanforderung:**

Windows 95 und Windows NT 4.0+; PC mit 486 Prozessor oder höher;  
mind. 16 MB RAM; mind. 20 MB freie Festplatte; CD-ROM-Player

**Please order from  
Springer-Verlag  
P.O. Box 14 02 01  
D-14302 Berlin, Germany  
Fax: +49 30 827 87 301  
e-mail: [orders@springer.de](mailto:orders@springer.de)  
or through your bookseller**

\*Recommended retail prices. Prices and other details are subject to change without notice. In EU countries the local VAT is effective d&p - 6321.MNT/E1 - Gha

A.M. Cohen, H. Cuyppers, H. Sterk

## Algebra Interactive!

1999. VIII, 160 pp., with CD-ROM.  
\*Hardcover DM 59 / £ 22.50 / FF 223 / Lit. 65.150  
ISBN 3-540-65368-6

**System requirements :**

Java compatible platform; Netscape 4.08 is included.

W. Härdle, S. Klinke, M. Müller

## XploRe® - Academic Edition

The Interactive Statistical  
Computing Environment

1999. CD-ROM, with handbook 520 pp.  
\*DM 197,20 (incl. 16% VAT)  
DM 170 / £ 69,96 / FF 650,08 / Lit. 193.170 (plus local VAT)  
ISBN 3-540-14767-5

**System requirements :**

PC with Pentium processor; Windows 95, 98 or NT; at least 32 MB RAM; 20 MB free hard disk space; CD-ROM drive.

J. Richter-Gebert, U.H. Kortenkamp

## The Interactive Geometry Software Cinderella

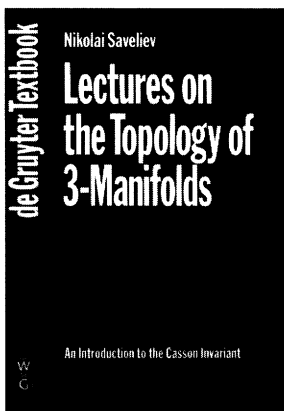
1999. CD-ROM, with booklet: X, 143 pp. 126 figs.  
\*DM 98,60 (incl. 16% VAT)  
DM 85 / £ 34,98 / FF 325,04 / Lit. 96.590 (plus local VAT)  
ISBN 3-540-14719-5  
Network licence price for 2-30 users: DM 250 (plus local VAT)

**System requirements :**

Java-1.1 compatible platform; 800x600 True Colour Graphics; 32 MB RAM or more; 133 MHz CPU or higher; CD-ROM drive. Java Runtime environment for Windows 95/98/NT, MacOS 7.6.1. or later, Solaris (SPARC) and Linux included.



Springer



NIKOLAI SAVELIEV

## Lectures on the Topology of 3-Manifolds

An Introduction to the Casson Invariant

1999. 24 x 17 cm. IX, 199 pages. With 134 figures.

Hardcover. DM 108,-/EUR 55,22/öS 788,-/sFr 96,-

• ISBN 3-11-016272-5

Paperback. DM 59,-/EUR 30,17/öS 431,-/sFr 54,-

• ISBN 3-11-016271-7

USA, Canada, Mexico.

Hardcover. US\$ 64.95 • ISBN 3-11-016272-5

Paperback. US\$ 34.95 • ISBN 3-11-016271-7

de Gruyter Textbook

Progress in low-dimensional topology has been very fast in the last two decades, leading to the solutions of many difficult problems. One of the consequences of this "acceleration of history" is that many results have only appeared in professional journals and monographs. These are hardly accessible to students who have completed only a basic course in algebraic topology, or even to some researchers whose immediate area of expertise is not topology.

Among the highlights of this period are Casson's results on the Rohlin invariant of homotopy 3-spheres, as well as his  $\lambda$ -invariant. The purpose of this book is to provide a much-needed bridge to these modern topics. The book covers some classical topics, such as Heegaard splittings, Dehn surgery, and invariants of knots and links. It proceeds through the Kirby calculus and Rohlin's theorem to Casson's invariant and its applications, and gives a brief sketch of links with the latest developments in low-dimensional topology and gauge theory.

The book will be accessible to graduate students in mathematics and theoretical physics familiar with some elementary algebraic topology, including the fundamental group, basic homology theory, and Poincaré duality on manifolds.

### Contents

Heegaard splittings • Dehn surgery • Kirby calculus • Even surgeries • Review of 4-manifolds • Four-manifolds with boundary • Invariants of knots and links • Fibered knots • The Arf-invariant • Rohlin's theorem • The Rohlin invariant • The Casson invariant • The group  $SU(2)$  • Representation spaces • The local properties of representation spaces • Casson's invariant for Heegaard splittings • Casson's invariant for knots • An application of the Casson invariant • The Casson invariant of Seifert manifolds • Conclusion • Exercises • Bibliography • Index

Prices subject to change

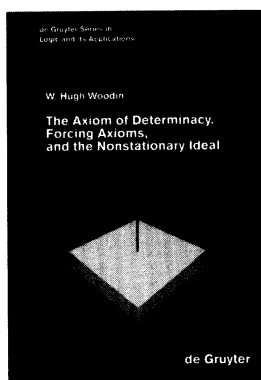
WALTER DE GRUYTER GMBH & CO KG  
Genthiner Straße 13 · D-10785 Berlin  
Tel. +49 (0)30 2 60 05-0  
Fax +49 (0)30 2 60 05-251  
Internet: www.deGruyter.de



de Gruyter  
Berlin · New York

**New: de Gruyter Series in Logic and Its Applications**

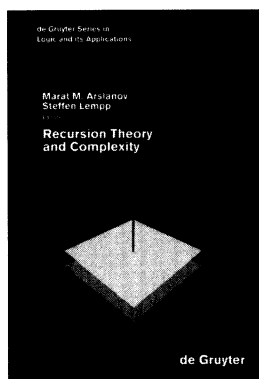
*Editorial Board:* W. A. Hodges · R. Jensen · S. Lempp · M. Magidor



VOLUME 1 · W. HUGH WOODIN  
**The Axiom of Determinacy,  
Forcing Axioms, and the  
Nonstationary Ideal**

1999. 24 x 17 cm. VI, 934 pages. Hardcover.  
DM 298,-/EUR 152,36/öS 2175,-/sFr 265,-  
*USA, Canada, Mexico.* Hardcover. US\$ 158.95  
• ISBN 3-11-015708-X

Presents a detailed account of a new method for obtaining models of set theory, using models of determinacy. The primary application is the identification of a canonical model of set theory in which the continuum hypothesis is false. Such models have been sought after since Cohen's discovery of the method of forcing thirty-five years ago.



VOLUME 2  
**Recursion Theory and  
Complexity**

**Proceedings of the Kazan '97 Workshop,  
Kazan, Russia, July 14-19, 1997**

Editors: Marat M. Arslanov · Steffen Lempp  
1999. 24 x 17 cm. VIII, 239 pages. Hardcover.  
DM 228,-/EUR 116,57/öS 1664,-/sFr 203,-  
*USA, Canada, Mexico.* Hardcover. US\$ 98.95  
• ISBN 3-11-016587-2

Contains 14 research papers by participants on topics discussed at the workshop as well as a list of the open problems presented at the workshop. Focus is on applications of recursion theory to other areas of mathematics, such as algebra, analysis, model theory, and proof theory.

Prices subject to change

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO KG  
Genthiner Straße 13 · D-10785 Berlin  
Tel. +49 (0)30 2 60 05-0  
Fax +49 (0)30 2 60 05-251  
Internet: [www.deGruyter.de](http://www.deGruyter.de)



de Gruyter  
Berlin · New York

# Mathematik bei Birkhäuser



<http://www.birkhauser.ch>

## GM · GRUNDSTUDIUM MATHEMATIK

Foata, D. / Fuchs, A., Université Louis Pasteur, Strasbourg

### Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übersetzt aus dem Französischen von Volker Strehl

1999. 400 Seiten. Gebunden  
DM 98.– / 6S 716.– / sFr. 88.–  
ISBN 3-7643-6170-0

1999. 400 Seiten. Broschur  
DM 48.– / 6S 351.– / sFr. 42.–  
ISBN 3-7643-6169-7

Erscheint im September 1999

Die vorliegende Einführung richtet sich an Studenten, die bereits einen Grundkurs in Analysis besucht haben, und zeichnet sich durch seinen hervorragenden didaktischen Aufbau aus. Sowohl die diskrete wie auch die masstheoretische Wahrscheinlichkeitstheorie werden in allen wesentlichen Elementen behandelt und alle wichtigen Sätze werden bewiesen. Viele Übungen helfen den Stoff einzuarbeiten und zu vertiefen. Alle Lösungen, oftmals sehr detailliert, sind im Buch enthalten und der ausführliche Index erleichtert das Nachschlagen.



Preisbindung an den Verleger Birkhäuser

Amann, H., Universität Zürich, Schweiz /  
Escher, J., Universität Kassel, Deutschland

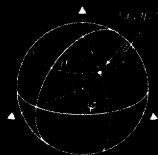
### Analysis I

1998. 460 Seiten. Gebunden  
DM 98.– / 6S 716.– / sFr. 88.–  
ISBN 3-7643-5976-5

1998. 460 Seiten. Broschur  
DM 48.– / 6S 351.– / sFr. 42.–  
ISBN 3-7643-5974-9

Dieses Lehrbuch ist der erste Band einer dreiteiligen Einführung in die Analysis. Es ist durch einen modernen und klaren Aufbau geprägt, der versucht den Blick auf das Wesentliche zu richten.

Anders als in den üblichen Lehrbüchern wird keine künstliche Trennung zwischen der Theorie einer Variablen und derjenigen mehrerer Veränderlicher vorgenommen. Es wird viel Gewicht auf die frühzeitige Entwicklung solider topologischer Grundlagen gelegt, und die komplexe Analysis wird in ihren elementaren Teilen mitentwickelt.



### Analysis II

1999. 424 Seiten. Gebunden  
DM 98.– / 6S 716.– / sFr. 88.–  
ISBN 3-7643-6134-4

1999. 424 Seiten. Broschur  
DM 48.– / 6S 351.– / sFr. 42.–  
ISBN 3-7643-6133-6

Artin, M., MIT, Cambridge, USA

### Algebra

2. Auflage, Broschierte Studienausgabe

1998. 722 Seiten. Broschur  
DM 68.– / 6S 497.– / sFr. 58.–  
ISBN 3-7643-5938-2

*„Ganz sicher darf dieses Buch als Nachschlagewerk, Lesebuch zur Algebra und echte Orientierungshilfe für jeden angesehen werden, der den Stellenwert der Algebra und ihrer Methoden in der mathematischen Forschung und Lehre einschätzen möchte.“*

INT. MATH. NACHRICHTEN (1998)

Remmert, R. / Ullrich, P., Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Deutschland

### Elementare Zahlentheorie

2., korrigierte Auflage

1995. 276 Seiten. Broschur  
DM 38.– / 6S 278.– / sFr. 32.–  
ISBN 3-7643-5197-7

*„Die geschickt konzipierte moderne Einführung in die Theorie zahlentheoretischer Funktionen... hebt sich wohltuend von anderen Darstellungen ab. Die wohl erstmalig in ein deutschsprachiges Hochschulwerk für elementare Zahlentheorie aufgenommene Anwendung des Satzes von Fermat-Euler in der Kryptographie erhöht zusätzlich zu den vielen zahlentheoretischen Leckerbissen den Reiz dieses Werkes... hervorragendes Werk...“*

PRAXIS DER MATHEMATIK (1997)

Bestellanschrift:

**Birkhäuser Verlag AG**  
P.O. Box 133  
CH-4010 Basel/Switzerland  
Fax: +41/61/205 07 92  
e-mail: [orders@birkhauser.ch](mailto:orders@birkhauser.ch)

**Birkhäuser**

