E 20577
103. Band Heft 2
ausgegeben am 31.07.2001

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:
Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Heinz Detering

Abo-/Leserservice:
Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:
Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von DM 178 (158 sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 103, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

B. Huppert: Nachruf auf Professor Dr. Dr. hc. Helmut Wielandt

H. Reitberger: Vietoris-Beglesches Abbildungstheorem, Vietoris-Lefschetz-Eilenberg-Montgomery-Beglescher Fixpunktsatz und Wirtschaftsnobelpreise

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

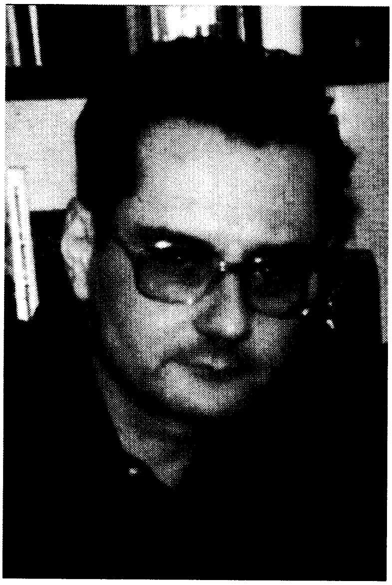
Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 2001 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
103 (2001) 37 – 48
Mathematics Subject Classification: 01 A 70, 39 B 12, 58 F 99

György Targonski zum Gedächtnis

Ludwig Reich, Adolf Schleiermacher und Karl Strambach



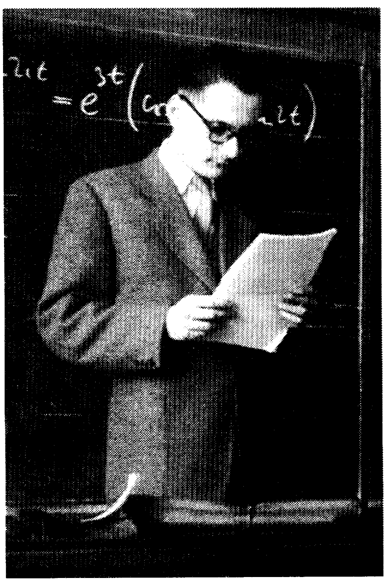
György Targonski um 1969

György Targonski ist am 10. Januar 1998 in München nach einer schweren, mit großer Geduld ertragenen Krankheit verstorben. Er war seit 1974 ordentlicher Professor für Mathematik an der Philipps-Universität in Marburg, zuletzt ab 1993 Professor emeritus. Sein Arbeitsgebiet läßt sich am besten durch ein Dreieck kennzeichnen, dessen Eckpunkte durch die Iterationstheorie, die Operatorentheorie und die Theorie der Funktionalgleichungen gebildet werden.

Er wurde am 27. März 1928 in Budapest geboren. Einen größeren Teil seiner Kindheit verbrachte er zusammen mit seinen Eltern in Berlin. Der Vater war Physiker und beschäftigte sich mit Problemen der Brownschen Bewegung, später auch mit optischen Problemen der Kinotechnik und mit patentrechtlichen Fragen, die Mutter war Schauspielerin. Nicht nur die Berufe der Eltern waren unterschiedlich, sondern auch die Herkunft. Der Vater war russischer Staatsbürger polnischer Nationalität, die Mutter war Ungarin. Seine Kindheit war überschattet vom frühen

Verlust des sehr geliebten Vaters. Mit acht Jahren wurde er Halbwaise. Die Mutter zog später, als das Leben im Deutschland der Nazizeit immer schwieriger wurde, mit ihm als dem einzigen Kind zurück nach Budapest.

Seinen Werdegang als Mathematiker begann er mit dem Studium in Budapest, an einer traditionsreichen Universität also, insbesondere, was das Fach Mathematik betrifft. Dort lehrten zur damaligen Zeit L. Fejér, F. Riesz, P. Turán, G. Hajós und die Logikerin Rózsa Péter, um nur einige Namen zu nennen. Schon als Schüler hatte ihn das Problem der Iteration von Funktionen fasziniert. „Ich saß auf einer Bank im Városmajor – Park von Budapest und dachte darüber nach, was passiert, wenn man eine Funktion $f(x)$ wiederholt in sich selbst einsetzt: $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ ...“ erzählte er einmal. Formal gesehen entsteht dabei zunächst die Definition der Iterierten, wenn $f_0(x) = x$ und dann rekursiv $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$ gesetzt wird. Wenn eine inverse Funktion f_{-1} existiert, kann man die Definition über alle ganzen Zahlen fortsetzen. Wenn auch Funktionen w existieren mit $w_n(x) = f(x)$, so setzt man $w = f_{1/n}$ und nennt w eine n-te iterierte Wurzel von f. Die Existenz von iterierten Wurzeln ist jedoch keineswegs immer gegeben. So ist zum Beispiel bekannt, daß für ein beliebiges Polynom zweiten Grades $f(z) = az^2 + bz + c$ die Gleichung $w[w(z)] = f(z)$ keine in der komplexen Ebene definierten Lösungen zuläßt (s. [19]).



1955 als Assistent in Budapest

Von Problemen im Zusammenhang mit den Iterierten handeln bereits seine ersten Arbeiten. In der Arbeit [23] betrachtete er zum Beispiel eine streng monotone und differenzierbare reelle Funktion $f(x)$, die in einem die Null enthaltenden Intervall definiert ist und für die $f(0) = 0$ sowie $|f(x)| > |x|$ für $x \neq 0$ gilt. Er bewies, daß $f(x)$ als eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ nach den Iterierten der Funktion $g(x) = f_{-1}[f(x) - x]$ dargestellt werden kann.

In seiner zweiten Arbeit [24] beschäftigt er sich mit verschiedenartigen Konvergenzprozessen für Folgen von Iterierten. Er betrachtet eine stetige komplexwertige Funktion $f(z)$, die in einem kuchenstückförmigen Sektor S der komplexen Ebene mit Spitze im Nullpunkt definiert ist, und bestimmt die Nullstellen von $f(z)$ durch rechnerische Konstruktion einer Hilfsfunktion $\vartheta(z)$. Für diese Hilfsfunktion bewegt sich die Folge der Iterierten $\vartheta_n(z)$ in dem Segment zwischen z und 0 auf den Nullpunkt zu und konvergiert entweder gegen die dem Wert z benachbarte Nullstelle der Funktion f, wenn eine solche existiert, oder andernfalls gegen Null. Als ein schönes Nebenprodukt konnte er in dieser Arbeit ein klassisches Ergebnis über die Abschätzung der Nullstellen eines Polynoms $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ verschärfen. Sei $k = 1 + \max(|a_0|, \ldots, |a_{m-1}|)/|a_m|$. Die klassische

Abschätzung besagt, daß die Nullstellen des Polynoms alle im Innern der Kreisscheibe $|z| \leq k$ liegen (s. [22], Seite 345). György Targonski hingegen beweist, daß alle Nullstellen des Polynoms $p(z)$ innerhalb der Kurve $z = z(r, \varphi)$ liegen, wobei

$$r = \frac{k}{1 + \frac{|a_0 + a_1 k e^{i\varphi} + a_2 k^2 e^{2i\varphi} + \ldots + a_m k^m e^{mi\varphi}|}{|a_1| k + 2|a_2| k^2 + \ldots + m|a_m| k^m}}.$$

Am 23. Oktober 1956 begann der ungarische Aufstand. Seine Niederschlagung zerstörte den Ungarn alle Hoffnungen. Am 13. November bestiegen György Targonski, seine spätere Frau Jolán Margit Horváth und seine Mutter einen Zug in Richtung „Westen“. Sie kamen bis zu einem kleinen Ort nahe dem Neusiedler See. Im Morgengrauen erreichten sie von dort aus zu Fuß zusammen mit einer Gruppe junger Bergleute aus Tatabánya die Grenze, wo noch ein kleiner Kanal zu überqueren war. Beim Übersetzen in einem Nachen halfen die dort patrouillierenden ungarischen Grenzsoldaten. So gelangten sie nach Österreich und von dort in die Schweiz. Es galt nun zunächst wieder Fuß zu fassen. Für eine Übergangszeit fand György Targonski durch Vermittlung von Benno Eckmann, der ihn auch später immer wieder gefördert hat, eine Anstellung an der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) in Zürich. Damals begann ein Wanderleben mit weiteren Stationen in Cambridge, wo er später promovierte (s. [25]), am Queen Mary College in London und in Genf am CERN (Centre Européen de Recherche Nucléaire) und am Institut für theoretische Physik der Universität bei J.M. Jauch.

In dieser ganzen Zeit von 1956 bis etwa 1963 arbeitete er viel über Operatorentheorie im Zusammenhang mit Streuungsproblemen in der Physik; angeregt vielleicht durch J.M. Jauch, insbesondere auch über Integral-Operatoren im Sinne von Carleman [4].

Sei (S, μ) ein Maßraum und $L^2(S, \mu)$ der Hilbertraum der bezüglich μ quadratisch integrierbaren komplexwertigen Funktionen. Ein auf einem Teilraum $D \subseteq L^2(S, \mu)$ definierter Operator K werde Carleman-Operator genannt, wenn eine Funktion $k(x, y)$ existiert, so daß

$$(Kf)(x) = \int_S k(x, y) f(y) d\mu(y) \in L^2(S, \mu)$$

für alle $f \in D \subseteq L^2(S, \mu)$, wobei die Funktion $k(x, y)$ für fast alle festen x zum Raum $L^2(S, \mu)$ gehört (d. h. $\int_S |k(x, y)|^2 d\mu(y) < \infty$).

Diese Definition führt zu einer etwas anderen als der von Carleman ursprünglich betrachteten Klasse von Operatoren. Wie John von Neumann gezeigt hat, ist ein Hermitescher Operator unitär äquivalent zu einem Carleman-Operator im ursprünglichen Sinne, wenn Null ein sogenannter Weylscher Limespunkt des Spektrums ist (s. [12]). Aufbauend auf diesem von Neumannschen Satz werden in der gemeinsam mit B. Misra und D. Speiser veröffentlichten Arbeit [9] zahlreiche interessante Aussagen bewiesen. Wir möchten die folgenden anführen:

1. Ein unitärer Operator kann nicht Carleman-Operator sein.
2. Jeder beschränkte normale Operator ist unitär äquivalent zu der Summe aus einem Carleman-Operator und einem Vielfachen der Identität.

3. Ein beschränkter normaler Operator Ω gehört genau dann zur Hilbert-Schmidt-Klasse (d. h. $\int |k(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty$), wenn $U^*\Omega U$ für jeden unitären Operator U ein Carleman-Operator ist.

Für den eindimensionalen Fall $L^2(a,b)$ ergeben sich Anwendungen auf die Streuungstheorie eines Teilchens an einem kugelsymmetrischen Potential.

In [27] wird die zuvor ausgebaute Theorie der Carleman-Operatoren nun genutzt, um zu einem Konvergenzkriterium für Reihenentwicklungen der Form $\sum_0^\infty c_n \psi_n$ nach einem orthonormierten System $\{\psi_n\}$ von Funktionen zu gelangen.

Eine ganz andere Richtung wird in [28] eingeschlagen. Hier werden Operatoren Ω betrachtet, die auf kommutativen und nullteilerfreien Algebren definiert sind und die ein Multiplikationstheorem der Form $\Omega(uv) = F(u, v, \Omega u, \Omega v)$ erfüllen. Ein einfaches Beispiel für eine solche Algebra ist die Algebra P der reellen oder komplexen Polynome bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation. Für solche von M. C. Bourlet Ende des neunzehnten Jahrhunderts eingeführten Operatoren Ω gilt der folgende von M.C. Bourlet formulierte und von G. Targonski bewiesene Satz:

Ist die im Multiplikationstheorem vorkommende Funktion F eine ganze analytische Funktion in vier komplexen Variablen, so gehört Ω zu einem der folgenden drei Typen:

$$\Omega(uv) = \tfrac{1}{2}[u\,\Omega v + v\,\Omega\, u], \tag{M}$$

$$\Omega_1(uv) = u\,\Omega_1 v + v\,\Omega_1 u, (\Omega_1 = \Omega + C \cdot I), \tag{D}$$

$$\Omega_0(uv) = A\,\Omega_0\, u\,\Omega_0 v, (\Omega_0 = \Omega - \mu I). \tag{H}$$

C, A und μ sind dabei passende Konstante. Operatoren vom Typ (M) haben zudem stets die spezielle Form $\Omega f = \omega f$ für eine passende feste Funktion ω. Im Fall der Algebra P ergeben sich auch spezielle Darstellungen für die Operatoren der anderen beiden Typen. Mit einer passenden Konstanten α gilt nämlich für Typ (D)

$$(\Omega f)(x) = \omega(x)\frac{d}{dx}f(x) + \alpha f(x).$$

Für Typ (H) gibt es eine passende Funktion ω und eine Konstante β, so daß

$$(\Omega f)(x) = \tfrac{1}{A} f[A\omega(x)] + \beta f(x).$$

Das Thema der Bourlet-Operatoren ist später von L. Berg wiederaufgenommen und weitergeführt worden (vgl. [2]). Bei der Frage, in welchen Funktionenalgebren für alle Bourlet-Operatoren die speziellen Darstellungen möglich sind, ist jedoch nach wie vor vieles offen.

Den Zusammenhang zur Iterationstheorie stellen vor allem die sogenannten Substitutionsoperatoren her, die in der knappen Hälfte von György Targonskis Arbeiten eine Rolle spielen. Ist X ein normierter Raum und B eine Algebra von reell- oder komplexwertigen Funktionen auf X, so induziert jede Transformation $\omega : X \to X$ von passender Art eine entsprechende Transformation Ω der Algebra B gemäß der Vorschrift $\Omega f(x) = f[\omega(x)]$. Dies läßt sich auch durch rechtsseitige Funktionskomposition in der Gleichung $\Omega f = f \circ \omega$ ausdrücken. Der so definierte Substitutionsoperator Ω ist nicht nur linear, sondern sogar multiplikativ:

$\Omega(f_1 f_2) = \Omega(f_1)\Omega(f_2)$. Es ist offensichtlich, daß Ω zu der zuvor erwähnten allgemeineren Klasse der Bourlet-Operatoren mit Multiplikationstheorem vom Typ (H) gehört und eine besonders einfache Darstellung vom Typ (H) besitzt, wobei $A = 1$ und $\beta = 0$.

Eine der Fragestellungen, die György Targonski im Zusammenhang mit Substitutionsoperatoren fasziniert haben, ist das Umkehrproblem: Für welche Algebren B ist jeder lineare Endomorphismus von B ein Substitutionsoperator? Eines der ersten Resultate in dieser Richtung stammt von L. Bers, der bewiesen hat, daß die Algebra der komplexen ganzen analytischen Funktionen die fragliche Eigenschaft besitzt (s. [3] und [18], Seite 95). Für die Algebra der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffschen Raum ist dies ebenfalls bekannt (s. [5], Seite 278). Man beachte, daß diese Eigenschaft aufs engste mit der Darstellung der Bourlet-Operatoren vom Typ (H) zusammenhängt. Sei nämlich B eine Algebra, in der jeder lineare Endomorphismus ein Substitutionsoperator ist. Wenn der Definitionsbereich der Funktionen aus B beliebige Abbildungen der Form $x \to Cx$ zuläßt, so erfüllt der Operator $\Phi : f \to A \cdot f(\frac{1}{A}x)$ das Multiplikationstheorem $\Phi(uv) = \frac{1}{A}\Phi u \Phi v$ vom Typ (H) und daraus läßt sich unschwer ableiten, daß alle Operatoren Ω, mit einem Multiplikationstheorem vom Typ (H) auch eine Darstellung vom Typ (H) besitzen, also $(\Omega_0 f)(x) = \frac{1}{A} f[A\omega(x)]$.

In [29] wird eine ziemlich allgemeine Klasse von Banachalgebren B über kompakten Räumen X betrachtet, in der für jeden linearen Endomorphismus Ω von B eine Transformation $\omega : X \to X$ und eine Untermenge E von X existieren, so daß $(\Omega f)(x) = \chi_E(x)(f \circ \omega)(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Dabei ist χ_E die charakteristische Funktion der Untermenge E. Ist X zusammenhängend und B eine Unteralgebra der Algebra aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X, so ist $E = X$ und somit jeder lineare Endomorphismus ein Substitutionsoperator. Dies gilt insbesondere für die zu der betrachteten Klasse gehörende Wieneralgebra aller komplexwertigen absolut konvergenten Fourierreihen über dem Intervall $0 \le x \le 2\pi$.

Zu einem ganz anderen Kreis von Ideen gelangt man, wenn man nach Eigenfunktionen eines Substitutionsoperators fragt: $\Omega\varphi(x) = \varphi[\omega(x)] = \lambda\varphi(x)$. Dies ist die bekannte Schrödersche Funktionalgleichung (vgl. [20])

$$\varphi[\omega(x)] = \lambda\varphi(x), \tag{1}$$

ein anderes in den Arbeiten von György Targonski häufig auftretendes Objekt. Der Grund dafür liegt vielleicht in der engen und vielfältigen Beziehung dieser Gleichung zu Fragestellungen der Iterationstheorie. Ist nämlich φ eine Lösung der Schröderschen Gleichung $\varphi[f(x)] = \lambda\varphi(x)$ zu der gegebenen Funktion f, so sieht man zunächst durch vollständige Induktion, daß dann auch $\varphi[f_n(x)] = \lambda^n\varphi(x)$ für die Iterierten $f_n(x)$ gilt. Wenn φ eine Inverse φ_{-1} hat, so können wir schreiben $f_n(x) = \varphi_{-1}[\lambda^n\varphi(x)]$. Vom diskreten Index n zu einem kontinuierlich veränderlichen übergehend, den wir σ nennen wollen, erhalten wir eine Familie $\{f_\sigma\}$ von Funktionen mit der Eigenschaft $f_\sigma[f_\tau(x)] = f_{\sigma+\tau}$. Dies nennt man stetige Iteration, weil sowohl die diskreten Iterierten $f_n(x)$ als auch die iterierten Wurzeln $f_{n/m}(x)$ von diesen auf natürliche Weise in die Familie $\{f_\sigma\}$ eingebettet sind (vgl. [30], Kap. 4).

In gewissen Fällen ist es möglich, die Funktionen einer gegebenen Algebra nach Potenzen der Lösung der Schröderschen Gleichung $\varphi \circ \omega = \lambda\varphi$ in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi^n$ zu entwickeln. Wenn das der Fall ist, kann man Funktionalgleichungen wie z. B. die lineare Funktionalgleichung $f[\omega(x)] - \mu f(x) = g(x)$ dadurch lösen, daß man die unbekannte Funktion f und die bekannte Funktion g in der Form $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi^n$ bzw. $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi^n$ ansetzt (s. [26]). Die Funktionalgleichung zwischen f und g liefert dann die Relation $c_n(\lambda^n - \mu) = a_n$ zwischen den Koeffizienten.

Einen vorläufigen Abschluß fand György Targonskis Wanderleben 1963 durch eine feste Anstellung als Professor an der Fordham University in New York. Die enge Verbindung zu Benno Eckmann in Zürich blieb aber bestehen. So hielt er zum Beispiel 1965–66 am Forschungsinstitut für Mathematik der ETH eine Reihe von Spezialvorlesungen mit dem Titel „Seminar on Functional Operators and Equations", die ihren Niederschlag in den Springer Lecture Notes [30] gefunden haben. In dieser sehr anregenden und gedankenreichen Niederschrift seiner Vorlesungen findet der Leser das meiste, was wir bisher versucht haben, erzählend kurz anzudeuten. Darüber hinaus noch vieles andere mehr.

Stand bisher die Operatorentheorie mit ihren vielfältigen Beziehungen zu Funktionalgleichungen im Vordergrund, so rückt in dem nun folgenden Lebensabschnitt die Iteration mehr und mehr an diese Stelle. Daher soll nun noch die Entwicklung von drei zur Iterationstheorie gehörigen Problemkreisen skizziert werden, bei deren Untersuchung György Targonski einen besonderen Anteil hat. Ein sehr interessantes, von mehreren Mathematikern aufgegriffenes und bis heute nicht vollständig gelöstes Problem ist das von György Targonski eingeführte System der Prä-Schröderschen Gleichungen (zu einer gegebenen Schröderschen Gleichung). Es sei φ eine Funktion von einem reellen Intervall I nach $\mathbb{R}$; es seien $\omega : I \to I$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, und φ sei eine Lösung der Schröderschen Funktionalgleichung (1). Bezeichnet man mit ω_n wie bisher die n-te Iterierte von ω, so folgt aus (1) für $n \geq 2$ leicht, daß φ das System

$$(\varphi(\omega(x)))^n = \varphi^{n-1}(\varphi(\omega_n(x))), x \in I \tag{2.n}$$

erfüllt. György Targonski stellte in [31] die Frage: Ist dann (unter geeigneten Bedingungen) das System (2.n) oder schon ein Teilsystem äquivalent zu (1), d. h. gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß φ mit (2.n) die Gleichung (1) mit diesem λ und dem gegebenen ω erfüllt ? Welche Relationen bestehen zwischen den einzelnen Gleichungen von (2.n) ?

Nachdem Z. Moszner ein negatives Beispiel zur Frage von György Targonski (im weitesten Sinn) gegeben hatte, begann eine intensive Untersuchung des Systems (2.n) hinsichtlich der Abhängigkeit der einzelnen Gleichungen von (2.n) und der Beziehung zu (1) (Z. Moszner, M. Kuczma, S. Drewniak und J. Kalinowski, U. Burkart). Im positiven Sinne zeigten György Targonski und M. Kuczma, daß im reellen und komplexen Fall unter nicht zu starken Regularitätsannahmen aus dem Bestehen von (2.2) für φ die Existenz eines λ folgt, so daß mit λ, φ und ω die Gleichung (1) erfüllt ist (s. [8]).

Die analoge Definition des Systems der Prä-Abelschen Gleichungen zu einer Abelschen Gleichung

$$\varphi(\omega(x)) = \omega(x) + \lambda, x \in I,$$

die Umformulierung der oben genannten Probleme und der Beweis mehrerer Resultate ist ebenfalls György Targonski zu verdanken [32]. Es ist bemerkenswert, daß er sich hier auf den in seinen „Topics in Iteration Theory" (s. [33]) hervorgehobenen Begriff des Orbits stützen kann.

Schließlich stammt von György Targonski eine interessante operatorentheoretische Verallgemeinerung des Systems der Prä-Schröderschen Gleichungen, und von L. Reich eine algebraische Verallgemeinerung, die sich auf eine Klasse sogenannter linearer Funktionalgleichungen bezieht. Es sei φ (– wir übergehen hier die präzise Angabe des Definitions- und des Wertebereichs –) Lösung von

$$\varphi(\omega(x)) = \mu(x)\varphi(x), \tag{3}$$

wobei mit einem Polynom $Q(x, y)$ noch

$$Q(\mu(x), \mu(\omega(x))) = 0, \tag{4}$$

gelte. Dann existiert eine Folge $(Q_n), n \geq 2$ von Polynomen in drei Variablen, so daß

$$Q_n(\varphi(x), \varphi(\omega(x)), \varphi(\omega_n(x))) = 0. \tag{4.n}$$

(Im Falle der Schröderschen Gleichung ist μ konstant, erfüllt also (4) mit $Q(x, y) = x - y$.) Auch hier ergibt sich das Problem, Relationen zwischen den einzelnen Q_n zu finden, sowie das Problem, ob aus dem Bestehen von (4.n), $n \geq 2$, die Existenz eines μ folgt, mit dem φ die Gleichung (3) erfüllt. Eine zusammenfassende Darstellung des Problemkreises stammt von Z. Moszner (s. [10]).

Der zweite Problemkreis, den wir betrachten wollen, handelt von den Phantomiterierten und Phantomwurzeln. Im Rahmen seiner Beschäftigung mit der Existenz iterativer Wurzeln und der Existenz von Iterations(halb)gruppen einer Selbstabbildung $f : S \to S$ einer Menge $S(\neq \emptyset)(f \in S^S)$ hat György Targonski die Frage nach Phantomiterierten aufgeworfen. Die Motivation dafür ist der Umstand, daß die Existenz einer iterativen Wurzel g von f der Ordnung n, $(n \geq 2)$, d. h. einer Lösung $g : S \to S$ der Funktionalgleichung

$$f = g_n \tag{B}$$

eine starke Bedingung an f ist, die i.a. nicht erfüllt ist. Ähnliches gilt für die Einbettbarkeit von f in eine Iterationsgruppe. György Targonski hat gesehen, daß es für gewisse Situationen bereits ein interessantes Problem sein und eine nützliche Information ergeben kann, statt nach iterativen Wurzeln nach sog. „Phantomwurzeln" zu suchen, die man z. B. so definieren kann:

Es sei $S \neq \emptyset$ eine Menge, $(S^S, \circ)$ die Menge aller Selbstabbildungen von S mit der Komposition $\circ$ als assoziativer innerer Verknüpfung, und

$$\tau : (S^S, \circ) \to (H, \times)$$

eine injektive Abbildung in eine Halbgruppe H, so daß

$$\tau(g \circ f) = \tau(g) \times \tau(f).$$

$\beta \in H$ heißt dann Phantomwurzel der Ordnung n von f, falls

$$\beta^n = \tau(f)$$

gilt (mit $\beta^1 = \beta, \beta^n = \beta^{n-1} \times \beta$). Man geht dabei davon aus, daß es leichter sei, die Gleichung $\beta^n = \alpha$ in H zu lösen, als iterative Wurzeln in S^S zu finden. Die Anwendung der Phantomwurzeln im ursprünglichen Problem (B) hängt davon ab, wie gut man $\tau(S^S)$ als Teilstruktur von H beschreiben kann, insbesondere davon, ob man handliche Bedingungen dafür hat, zu entscheiden, ob zu einer Phantomwurzel β von f (also zu einem β mit $\beta^n = \tau(f)$) ein $g \in S^S$ existiert, so daß $\tau(\beta) = g$.

Dieser Gedanke wurde von L. Reich und J. Schwaiger in [17] benutzt („vollständige Linearisierung"), um die iterativen Wurzeln und Iterationsgruppen von ordnungserhaltenden Automorphismen des Potenzreihenringes $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ zu konstruieren. J. Schwaiger hat Phantomiterierte und Phantomwurzeln von formalen Potenzreihentransformationen in einer Unbestimmten über $\mathbb{C}$ in [21] im Detail untersucht. (Für $n = 1$ geht diese Methode übrigens auf P. Erdös und E. Jabotinski zurück.) György Targonski selbst hat Phantomiterierte für stetige Selbstabbildungen eines kompakten reellen Intervalls I konstruiert, indem er die Substitutionsoperatoren von $C(I, I)$ auf $C(I, I)$ einbettete, wobei $C(I, I)$ den Raum der stetigen Funktionen von I nach I bezeichnet. Die von ihm in [34] untersuchten Abbildungen sind von der speziellen Form $f = \alpha \circ \alpha + \beta \circ \alpha + \alpha \circ \beta + \beta \circ \beta$, es werden quadratische Phantomwurzeln konstruiert und ihr Zusammenhang mit iterativen Quadratwurzeln von f beleuchtet.

Die Konstruktion von Phantomwurzeln kann auch in einigen Fällen durch geeignete Erweiterung der Definitionsmenge S ermöglicht werden, wie in der von György Targonski angeregten Dissertation [11] von Sabine Müllenbach gezeigt wurde. In jüngster Zeit wurde die Idee der Phantomwurzeln wieder aufgegriffen in einer Arbeit von T. Powierża [13], in der die Selbstabbildungen von S in eine Halbgruppe von Funktionen $f : S \times S \to [0, 1]$ (mit einer Faltung als innerer Verknüpfung) eingebettet werden. Dadurch wird ein unveröffentlichtes Resultat von W. Hösler, einem Schüler Targonskis, weitgehend verallgemeinert.

György Targonski hat bei vielen Tagungen durch seine Diskussionsbemerkungen sehr anregend gewirkt. Ein Beispiel dafür sind die sogenannten Aczél-Jabotinskyschen Differentialgleichungen. Um sie einzuführen, betrachten wir (einfachheitshalber) eine Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die differenzierbar sei und der Translationsgleichung

$$F(t, F(s, x)) = F(t + s, x), t, s, x \in \mathbb{R}, \tag{T}$$

genüge. Diese Relation impliziert (neben $F(0, x) = x$) das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = G(F(t, x)) \tag{$AJ1$}$$

mit $G(y) = \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}\Big|_{t=0}$,

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \cdot G(x), \tag{$AJ2$}$$

und daher auch

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \cdot G(x) = G(F(t,x)). \tag{AJ3}$$

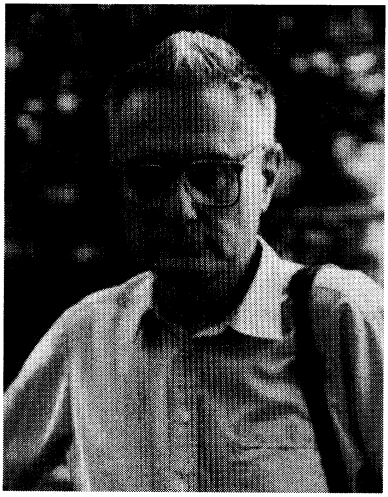
György Targonski nannte (AJ1) bis (AJ3) das System der Aczél-Jabotinskischen Differentialgleichungen, da es in Arbeiten von J. Aczél (über Funktionalgleichungsprobleme) und von E. Jabotinski (über Iteration) auftritt. Wie D. Gronau [6] unlängst nachgewiesen hat, spielen diese Gleichungen auch eine nicht marginale Rolle in der Habilitationsschrift von G. Frege, Jena (1874). Da aus (T) auch

$$F(t, F(s,x)) = F(s, F(t,x)), t, s, x \in R \tag{C}$$

folgt, ist es naheliegend, daß z. B. (AJ3) auch mit Familien vertauschbarer Funktionen zusammenhängt. György Targonski hat bei Tagungen und in Vorlesungen (s. [36] und [37]) angeregt, das System (AJ1)–(AJ3) und Teilsysteme davon systematisch zu untersuchen. So hat L. Reich lokal holomorphe Lösungen von (AJ3) bestimmt, die in die Singularität holomorph einmünden (s. [14]) und mittels (AJ3) die maximalen Familien formaler vertauschbarer Potenzreihentransformationen in einer Unbestimmten und ihre Beziehungen zu Iterationsgruppen vollständig beschrieben (s. [15]). Für Automorphismen des Ringes $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ mit $n \geq 2$ ist dieses Problem aber noch völlig ungeklärt.

Ferner wurden die Gleichungen (AJ1) bis (AJ3) von J. Aczél und D. Gronau (s. z. B. [1] und [7]) auf reelle Lösungen und über Banachräumen studiert und es wurden die Beziehungen der Gleichungen untereinander untersucht. Auch hier gibt es noch viele offene Fragen.

Im Jahre 1974 erhielt György Targonski einen Ruf auf einen Lehrstuhl an der Universität Marburg. Hier entfaltete er eine rege Forschungs- und Lehrtätigkeit. Mit der 1980 organisierten Konferenz in Amöneburg begann die Serie der Tagungen über Iterationstheorie, die heute als ECIT (European Conference on Iteration Theory) bekannt sind. Mittlerweile hat es 9 solcher ECITs gegeben. Die vorletzte fand im September 1998 in Muszyna Złockie in Polen statt und war dem Andenken an György Targonski gewidmet. Der Leser findet in dem Tagungsband zu dieser Konferenz [38] ebenfalls eine ausführliche Würdigung und ein vollständiges Verzeichnis seiner Schriften. Ein Nachruf ist auch in den Aequationes Mathematicae erschienen (s. [16]).



1995 in Caldes de Malavella

In die Marburger Zeit fällt auch die Zusammenarbeit mit Marek C. Zdun aus Krakau (s. zum Beispiel [35]). In den gemeinsam mit M.C. Zdun veröffentlichten Arbeiten wird die stetige Iteration von Operatoren auf den Räumen $L^p(a,b)$ untersucht, wobei die Erfahrungen und Ideen von G. Targonski zur Operatorentheorie und die von M.C. Zdun zur stetigen Iteration reeller Funktionen zusammenfließen.

Wer sich für die Iterationstheorie interessiert, der sollte zu dem schönen Buch „Topics in Iteration Theory" [33] greifen. György Targonski besaß die heute im „Zeitalter der (bureaukratisch) verwalteten Welt" immer seltener werdende Gabe der eleganten Formulierung und des einprägsamen Stils, wovon sich jeder Leser seiner Schriften selbst überzeugen kann. In seinem Buch sind neben anderem auch viele der von ihm und seinen damaligen Doktoranden in Marburg erarbeiteten Resultate zur Iterationstheorie enthalten, so etwa die vollständige Bestimmung der iterativen Wurzeln einer beliebigen Funktion durch Gisela Zimmermann (geb. Riggert), um nur ein Beispiel zu nennen.

Wir haben versucht, von seiner Mathematik zu erzählen. Das Persönliche ist dadurch zwangsläufig etwas zu kurz gekommen. Was für ein Mensch war György Targonski? Die ihn gekannt haben, werden sich an sein vornehm-ritterliches Wesen erinnern. Auch an die Tapferkeit, mit der er allen Widrigkeiten des Schicksals trotzte. So auch der Krankheit. Er hatte im Jahr 1981 einen ersten Schlaganfall erlitten, ein weiterer folgte Ende 1992 bald nach dem Tod seiner Mutter. Trotz den Behinderungen infolge dieser Krankheiten hat er seine privaten oder beruflichen Verpflichtungen und Aktivitäten niemals mehr als unbedingt notwendig eingeschränkt. Einem Bedürfnis nach Bequemlichkeit hat er nie nachgegeben. Er war ein gläubiger Mensch, dem ein schlichtes Gottvertrauen geschenkt war. Viele, die ihn gekannt haben, werden sich auch an seine nie erlahmende Hilfsbereitschaft erinnern. Dabei zeichnete ihn eine große Dankbarkeit für freundschaftliche Gesten aus, die man ihm entgegenbrachte, mochten sie auch noch so gering gewesen sein.

Die folgende Begebenheit wirft ein Licht auf seine außergewöhnliche Begabung als Lehrer. Im Winter 1998 kam ein junger Mann ins Sekretariat des Fachbereichs Mathematik und fragte bei Frau Teubner, seiner langjährigen Sekretärin, nach Professor Targonski. Er erzählte, er habe als Schüler in der Nachbarschaft von Herrn Targonski gewohnt. Weil er in der Schule Schwierigkeiten mit der Mathematik hatte, sei er manchmal zu ihm gegangen, um Nachhilfeunterricht zu erhalten. Nun war er aus Dankbarkeit gekommen, um ihm die Doktorarbeit zu zeigen, die er inzwischen geschrieben hatte – über ein Thema aus der Mathematik.

Die Autoren danken Frau Jolán M. Targonski für die Überlassung biographischer und mathematischer Materialien, ohne die vorliegender Text nicht hätte geschrieben werden können.

Literatur

[1] J. Aczél, D. Gronau, Some differential equations related to iteration theory. Can. J. Math. 40 (1988), 695-717.

[2] L. Berg, On Bourlet's Functional Equation, Proceedings of the ECIT 92, Batschuns, Austria, 13–19 September (1992), 51–54.

[3] L. Bers, On Rings of Analytic Functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54(1948), 311–204.

[4] T. Carleman, Sur les équations singulières à noyaux réelles et symmétriques, Uppsala, (1923).

[5] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators I, (1957), Neuausgabe in Wiley Classics Library, Wiley, New York (1988).

[6] D. Gronau, Gottlob Freges Beiträge zur Iterationstheorie und zur Theorie der Funktionalgleichungen. In: G. Gabriel, U. Dathe (Hrsg.), Gottlob Frege, Werk und Wirkung, 151–169. Mentis Paderborn (2000).

[7] D. Gronau, On the structure of the solutions of the Jabotinsky equations in Banach spaces, Z. Anal. Anw. 10 (1991), 335–343.

[8] M. Kuczma, G. Targonski, On a Pre-Schröder equation. Bull. Acad. Polon. Sci. Série math. XVIII (1970), 721–724.

[9] B. Misra, D. Speiser, G. Targonski, Integral Operators in the Theory of Scattering. Helvetica Phys. Acta 36 (1963), 963–980.

[10] Z. Moszner, Les équations de pré-Schröder. Ann. Math. Silesianae 13 (1999), 227–232.

[11] C. Mira, S. Müllenbach, Sur l'itération fractionnaire d'un endomorphisme quadratique, C. R. Acad. Sci. Paris 297 (1983), 369–372.

[12] J. von Neumann, Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators, Paris, Hermann & Cie, 1935 oder Collected Works, Vol. IV, 38–55.

[13] T. Powierża, On functions having weak iterative roots. Erscheint in Aeq. Math.

[14] L. Reich, Holomorphe Lösungen der Differentialgleichungen von E. Jabotinsky, Österr. Akad. Wiss., Math. Naturw. Kl. Sitzungsberichte II, 195 (1986), 157–166.

[15] L. Reich, On families of commuting formal power series. Ber. math. – stat. Sektion der Forschungsgesellschaft Joanneum 294 (1988) 1–18.

[16] L. Reich, György Targonski, 1928–1998, Aeq. Math. 57 (1999), 1–3.

[17] L. Reich und J. Schwaiger, Linearisierung formal-biholomorpher Abbildungen und Iterationsprobleme, Aeq. Math. 20 (1980), 224–243.

[18] R. Remmert, Funktionentheorie 2, Springer (1991).

[19] R. Rice, B. Schweizer, A. Sklar, When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$ for all complex z ? Amer. Math. Monthly 87(1980), 252–263.

[20] E. Schröder, Über iterierte Funktionen. Math. Ann. 3 (1871), 296–322.

[21] J. Schwaiger, Phantom roots and phantom iterates of formal power series in one variable. In: C. Alsina et al. (Eds.) ECIT87, Proc. Europ. Conf. on Iteration Theory, Caldes de Malavella, Sept. 20–26, 1987, World Scientific, 1989, 313–323.

[22] T. Stachó, Felsőbb Mennyiségtan. 5. Auflage, Budapest.

[23] G. Targonski, Darstellung von Funktionen durch Kettenreihen. Publ. Math. Debrecen 2 (1952), 286–290.

[24] G. Targonski, An always Convergent Iteration Process. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 4 (1953), 119–126.

[25] G. Targonski, Contributions to the theory of scattering. PhD thesis Cambridge, (1963).

[26] G. Targonski, On a theory of linear functional equations. Proc. 14th Scand. Math. Congress, Kopenhagen (1964).

[27] G. Targonski, Convergence theorems derived from the theory of Carleman integral operators. Comp. Math. Vol. 18, Fasc. 1,2 (1967), 148–154.

[28] G. Targonski, Zur Klassifizierung der linearen Operatoren auf Funktionenalgebren. Math. Zeitschr. 97 (1967), 238–250.

[29] G. Targonski, Linear Endomorphisms of Function Algebras and Related Functional Equations. Indiana Univ. Math. Journ. 20 (1970), 579–589.

[30] G. Targonski, Seminar on Functional Operators and Equations. Lecture Notes in Mathematics Nr. 33. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1967).

[31] G. Targonski, Problem (P63). Aequationes Math. 4 (1970), 251.

[32] G. Targonski, Orbit properties of functions and „Pre – Abel" equations. Ann. Pol. Math. 33 (1977), 247–253.

[33] G. Targonski, Topics in Iteration Theory. Vandenhoeck und Rupprecht, Göttingen (1981).

[34] G. Targonski, Phantom Iterates of Continuous Functions, in „Iteration Theory and Its Functional Equations", R. Liedl, L. Reich and G. Targonski ed. Springer Lecture Notes in Mathematics Nr. 1163 (1985), 196–202.

[35] G. Targonski, M.C. Zdun, Substitution Operators on L^p-Spaces and their Semigroups. Mathematisch-statistische Sektion, Forschungszentrum Graz. Bericht Nr. 283 (1987), 1–55.

[36] G. Targonski, New directions and open problems in iteration theory. Ber. math. – stat. Sektion Forschungszentrum Joanneum Graz, 229 (1984).
[37] G. Targonski, Progress of iteration theory since 1981. Aeq. Math. 50 (1995), 50–72 (§ 5.)
[38] Proceedings of the ECIT98. Annales Mathematicae Silesianae 13, Katowice (1999).

Ludwig Reich
Institut für Mathematik
Karl-Franzens-Universiät Graz
Heinrichstr. 36
A-8010 Graz
ludwig.reich@kfunigraz.ac.at

Adolf Schleiermacher
Rablstr. 18
D-81669 München
adsle@aol.com

Karl Strambach
Mathematisches Institut
Friedrich-Alexander Universität
Bismarckstr. 1 1/2
D-91054 Erlangen
strambach@mi.uni-erlangen.de

(*Eingegangen 25.01.01*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 103 (2001) 49 – 51
Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Michael Schneider (1942 – 1997)

A. Hirschowitz

The eternal climber. On the afternoon of August 30, 1997, Michael Schneider was climbing alone at Baou de Saint-Jeannet near Nice. It was an ideal time and place for his favorite hobby. He knew perfectly the surrounding rocks, the picturesque village below where Angelika was painting, and the amazing view of the Côte d'Azur. The weather was wonderful. Apparently he was busy tightening his rope when the damn branch broke. He fell twenty meters onto the rocks and died immediately. This is how he suddenly left his beloved wife Angelika after thirty years of life together, and their sons Florian and Martin, his mother Gerda, his sister Sybille, and his numerous friends around the world. For nearly thirty years Michael Schneider had been a prominent figure in the international community of complex analysis and geometry.

The beginner mathematician. We first met and became friends at the complex analysis meeting in Oberwolfach, summer 1971. We were both under thirty, and this regular meeting was the checkpoint where young people could situate their own trajectory in the flow of mathematics and where we could have contact with our prestigious role models: Karl Stein was nearly sixty and spread his extraordinary enthusiasm around; Hans Grauert was very discreet, but year after year he proved very impressive theorems; Reinhold Remmert was so much at ease, so fast to understand everything and to joke with everybody; and Antonius Van de Ven delivered illuminating talks which promoted algebraic geometry in our complex analysis community. At the time Michael, who was an assistant in Regensburg, had already borrowed much from each of our models. Very enthusiastic about mathematics, he was working on the hot topics of the moment, namely Grauert's direct image theorem and vector bundles on projective spaces; he used to give perfect talks, and his exceptional charisma was already fully apparent.

The young expert. Later in the seventies, Michael is fully recognized as one of the main experts on algebraic vector bundles, and in that capacity he delivers an invited talk at the Bourbaki Seminar in Paris in 78. At this time he is in Göttingen and happens to collaborate with Hans Grauert. Together they think they prove that any unstable rank two vector bundles on the projective four space is split, but their proof soon appears uncomplete (the question is still open in 2001). This very frustrating experience spoils Michael's pleasure and pride in collaborating with the mathematician who will remain his favorite model throughout his career.

The visitor in Nice. During the academic year 78/79, Nice is "invaded" by German complex geometers: Knut Knorr (one of Michael's best friends at this time) and Wolf Barth come for two or three months, Otto Forster and Burchard Kaup for six months, while Gerd Fischer and Michael spend the whole year here. Together we run an ambitious seminar, going through Yau's work on Kähler-Einstein metrics. Every week after the seminar we meet for informal but extremely fruitful discussions on current research topics. That year Otto, Michael and I understand fully Van de Ven's marvellous three-page paper on uniform bundles (1972) and how Van de Ven's key ideas lead naturally beyond the case of projective spaces treated in Heinz Spindler's thesis to "boundedness for stable bundles" on a general projective variety. More or less, we are aware, from a quotation in Spindler's paper, that this generalization is already clear in Masaki Maruyama's mind. But Masaki is not yet our friend, e-mail does not exist, and we are so young... While Otto is back to Germany, and we are writing our paper on this matter, Michael and I check our mailboxes every morning, fearing a preprint of Maruyama including "our" result!

Needless to say, week after week, rock after rock, Michael explores the Baou de Saint-Jeannet, its future final destination, which offers so many different tracks to climbers. During this year Michael and his family fit so well in the local context that in the spring he applies for a permanent position. That year I am on the hiring committee, which has to consider another outstanding applicant, our common friend Joseph Le Potier. Due to strange rules Gerd Fischer is also on the committee. Surely wanting to spare us a cruel dilemma, our colleagues immediately make it clear that they do not want a complex geometer. So Gerd and I can just arrange our votes in order that both our friends escape a shutout. For Michael this day a second dream is broken.

The leader in Bayreuth. Since Schneider's final home cannot be in Nice, it will be in Bayreuth: there the next year Michael gets the full professorship he fully deserves. At this time Bayreuth does not really exist as far as complex geometry is concerned. From this time on Michael confirms himself as a more and more influential leader in our field and Bayreuth as one among the main European centers for complex geometry. He soon attracts Frank-Olaf Schreyer and Thomas Peternell there, completing an extremely friendly, dynamic, and eclectic team. During this last period of his life, Michael's influence takes very diverse forms. For instance until 95 he is editor of Crelles Journal, while in 96 he is elected referee of the Deutsche Forschungsgemeinschaft. On a different note he is coorganizer with Y.-T. Siu of the special year for complex geometry at MSRI (95/96) and with Edoardo Sernesi, Ciro Ciliberto and Janos Kollar of the Europroj annual meeting at Alghero (97).

The achieved mathematician. In the middle of the nineties, Michael is universally appreciated: he is a node coordinator for both Age and Europroj, the two ancestors of the current European network in algebraic geometry, Eager.

He is still very dynamic: he attends conferences and collaborates all around the world, preferably near beautiful mountains.

He is still very active in maths: his numerous contributions deal with hot topics as well as more classical subjects.

He still enjoys maths: for instance after his (probably last) talk on his late joint work with Lucian Bădescu at Beauville's fiftieth birthday meeting in Luminy 97, when Edward Frankel raises a technical question, Michael is extremely eager to find the answer.

He thinks he still has a long road in front of him: the day before the accident, when I ask him if he has already started thinking on how to organize his old days, he answers, with his so characteristic smile: "No, it's too early."

The missing friend and colleague. More than three years after his death he has not been replaced either at Bayreuth or in our hearts. I feel strongly that I am far from alone in missing him.

André Hirschowitz
Laboratoire J.-A. Dieudonné
U.M.R. no 6621 du C.N.R.S
Université de Nice – Sophia Antipolis
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02
France
ah@math.unice.fr

(*Eingegangen 15.01.2001*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 103 (2001) 52 – 65

Spaces of Nonpositive Curvature

W. Ballmann

In my previous article [Ba2] I discussed the fundamental and characteristic properties of complete Riemannian manifolds of nonpositive sectional curvature. In the present article, I want to introduce the reader into the theory of metric spaces of nonpositive curvature and, more generally, spaces with upper curvature bounds. I will also discuss a few more recent results.

The foundations of the theory of metric spaces with upper curvature bounds were laid in the work of A. D. Alexandrov [Ale1] and H. Busemann [Bus], some ideas can be traced back to the work of A. Wald [Wa]. More recent treatments are contained in [Gr2], [BriHa], [KlLe], and [Ba2]. The reader is refered to these for more details. An exhaustive treatment of the foundations and some interesting applications are contained in the monograph of Rinow [Ri]. Riemannian manifolds of nonpositive sectional curvature are discussed in [BaGrSr] and in the more recent monograph [Eb3] of Eberlein.

The work of Gromov on geometric group theory, see e.g. [Gr2,Gr3], and of Gromov and Schoen on the rigidity and arithmeticity of lattices [GrSn] have renewed the interest in the theory of spaces with upper curvature bounds and led to new developments and further applications. The main idea is to axiomatize properties of Riemannian manifolds with upper curvature bounds on their sectional curvature, notably properties related to trigonometry[1]. In Riemannian geometry these properties constitute the contents of triangle comparison theory. Many results in global Riemannian geometry rely on triangle comparison, starting from the sphere theorem up to some of the most recent results.

It follows from the setup that arguments and results from Riemannian geometry which, except for some very basic geometry of geodesics, depend only on triangle comparison, should have their counterpart in the theory of spaces with upper curvature bounds. One very important example, where this holds, concerns the theorem of Hadamard and Cartan on simply connected complete Riemannian manifolds of nonpositive sectional curvature, see Theorem 8. For this reason, the theory of spaces of nonpositive curvature is of particular importance. The range of applications includes geometric group theory, lattices in semisimple Lie groups and the theory of Tits buildings.

[1] There is also a theory of spaces with lower curvature bounds, but it has a completely different flavor. Note that there is an important distinction between lower and uper curvature bounds: Whereas the former are stable under Gromov-Hausdorff limits, the latter are not.

This article is based on my talk at the DMV meeting in Mainz in 1999. In the talk, I concentrated on problems related to the so called geometric rank of spaces. In this article I add a few comments and references to other directions which have been followed successfully. However, the article does not give a complete picture of what has been achieved in the field of metric spaces with curvature bounded from above.

Acknowledgments: I would like to thank M.Bridson, C.Croke, M.Davis, I.Dinca, I.Dogolazky, D.Epstein, B.Leeb, A.Lytchak, G.Niblo, and A.Wienhard for helpful comments.

1 The Setup

We say that a metric space is a *length space* if the distance between any two points $x, y \in X$ is given by the infimum over the lengths of curves connecting x with y. If X is complete and if, for all $x, y \in X$ and $\varepsilon > 0$, there is a point $z \in X$ with

$$\max\{d(x,z), d(y,z)\} < \frac{1}{2}d(x,y) + \varepsilon,$$

then X is a length space. Length spaces are path connected.

We say that a curve $c : I \to X$ is a *minimal geodesic* if c is parameterized proportionally to arc length and if $c|[s,t]$ realizes the distance between $c(s)$ and $c(t)$ for all $s, t \in I$. We say that a curve c in X is a *geodesic* if c is a minimal geodesic locally. We say that X is a *geodesic space* if the distance between any two points of X is realized by a minimal geodesic.

For a connected Riemannian manifold, completeness and geodesic completeness are equivalent. Of course, this fails in the general context of geodesic spaces. For example, a compact interval is complete, but it is certainly not geodesically complete. The following general version of the Hopf-Rinow Theorem adresses the completeness question:

1.1 Theorem (Cohn-Vossen [CoVo, Ba2]) *For a locally compact length space X, the following assertions are equivalent:*

1 X is complete.
2 Any geodesic $c : [0,1) \to X$ can be extended to $[0,1]$.
3 For some point $x \in X$, any minimal geodesic $c : [0,1) \to X$ with $c(0) = x$ can be extended to $[0,1]$.
4 Bounded subsets of X are relatively compact.

Each of these implies that X is geodesic.

Geodesic completeness comes as an extra assumption. Hairy spaces as in Example 2) below and other examples show that geodesic completeness is actually related to the regularity of the underlying space. For example, a finite simplicial complex X with a spherical, Euclidean, or hyperbolic structure as in Example 3) below is geodesically complete if and only if it does not contain boundary simplices[2].

[2] A simplex of X of dimension k is a boundry simplex of X if it is adjacent to precisely one simplex of X of dimension $k + 1$.

We say that a map $f : X \to Y$ between metric spaces X and Y is a *quasi-isometric embedding* if there are constants $A \geq 0$ and $L \geq 1$ such that

(1.2) $L^{-1}d(x,x') - A \leq d(f(x),f(x')) \leq Ld(x,x') + A$

for all $x, x' \in X$. We say that a quasi-isometric embedding is a *quasi-isometry* if the image of f is R-dense in Y for some constant $R \geq 0$[3]. Quasi-isometries play an important role in Mostow's proof of his celebrated rigidity theorem.

Note that quasi-isometries are not required to be continuous. In fact, one of the important ideas in the context of quasi-isometries is contained in the following elementary result, in which continuity would be out of place.

1.3 Theorem (Gromov [Gr1]). *Suppose a group Γ acts properly discontinuously and cocompactly on a complete length space X. Then Γ is finitely presented and, when endowed with a word metric, is quasi-isometric to X.*

For this and other reasons, quasi-isometry invariants are important in geometry and group theory. An example of such an invariant is hyperbolicity in the sense of Gromov. We will see others further on.

Trigonometry and Curvature

It will be convenient to relax the notion of geodesic spaces somewhat. For $D > 0$ given, we say that X is *D-geodesic* if the distance between any two points of X of distance $< D$ is realized by a minimal geodesic.

For $\kappa \in \mathbb{R}$, let M^n_κ be the *model space* of dimension n and constant sectional curvature κ: M^n_κ is the sphere of radius $1/\sqrt{\kappa}$ in Euclidean space of dimension $n+1$ if $\kappa > 0$, Euclidean space of dimension n if $\kappa = 0$ and n-dimensional hyperbolic space of curvature κ if $\kappa < 0$. We denote by $D(\kappa)$ the diameter of M^n_κ, that is, $D(\kappa) = \pi/\sqrt{\kappa}$ if $\kappa > 0$ and $D(\kappa) = \infty$ if $\kappa \leq 0$.

A *geodesic triangle* in X consists of geodesic segments $c_1, c_2, c_3 : [0,1] \to X$ whose endpoints match in the usual way. A geodesic triangle $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ is *admissible* if

(1.4) $L(c_i) \leq L(c_j) + L(c_k)$

for all pairwise different $i, j, k \in \{1,2,3\}$. A geodesic triangle $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ is admissible if its sides c_1, c_2, and c_3 are minimal.

Let $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ be a geodesic triangle in X. Then a *comparison triangle* for Δ in M^2_κ is a geodesic triangle $\bar{\Delta} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$ in M^2_κ with lengths $L(\bar{c}_i) = L(c_i)$ for $i = 1, 2, 3$. A comparison triangle exists and is unique up to congruence if Δ is admissible and the *circumference*

(1.5) $L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) < 2D(\kappa)$.

Let $\kappa \in \mathbb{R}$. We say that X is a CAT(κ)*-space* if X is D(κ)-geodesic and if, for any

[3] In the early sixties, F. John used the term *quasi-isometry* to denote a smooth map whose differential is uniformly bounded from above and below by some positive constants. This was pointed out to me by S. Hildebrandt, compare [Hi] for a discussion. The definition here seems to go back to Mostow [Mo].

admissible triangle $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ in X of circumference $< 2D(\kappa)$ and comparison triangle $\bar{\Delta} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$ in M^2_κ, we have

$$(1.6) \quad d(c_i(s), c_j(t)) \le d(\bar{c}_i(s), \bar{c}_j(t))$$

for all $i,j \in \{1,2,3\}$ and $s, t \in [0,1]$. It is only necessary to require (1.6) for a vertex and the midpoint of the opposite side, that is, for $s = 0$ and $t = 1/2$. In a CAT(κ)-space, geodesics of length less than D(κ) are minimal and the unique geodesic connection of their endpoints. In particular, all geodesic triangles in a CAT(κ)-space of circumference less than 2D(κ) have minimal sides and hence are admissible.

A complete metric space is CAT(0) if and only if for each pair of points $x, y \in X$ there is a point $m \in X$ such that

$$(1.7) \quad 2d^2(m,z) \le d^2(x,z) + d^2(y,z) - \frac{1}{2}d^2(x,y)$$

for all points $z \in X$. This is the property established and used by Bruhat and Tits in their work on Euclidean buildings [BruTi], see also [Bro]. Note that (1.7) corresponds to (1.6), where $\kappa = 0$, $s = 0$, and $t = 1/2$. The point is that now it is not assumed a priori that X is geodesic, this is a consequence.

Suppose that X is a CAT(κ)-space and let $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ be a geodesic triangle in X of circumference $< 2D(\kappa)$. Then if there is equality in (1.6) for some pair $c_i(s), c_j(t)$, where $c_j(t)$ is not contained in the image of c_i, then the convex hull of Δ in X is isometric to the convex hull of the comparison triangle $\bar{\Delta}$ in M^2_κ. This *rigidity* of geodesic triangles is at the base of most of the rigidity results of spaces with upper curvature bounds.

Curvature is a local phenomenon[4]: Let X be a metric space and $x \in X$ be a point. We define the *upper curvature* $K^+_X(x)$ of X at x to be the infimum over all κ such that x has a neighborhood which is CAT(κ). We say that X has *curvature bounded from above by* κ if $K^+_X \le \kappa$[5]. It is left as a little exercise that this definition is equivalent to the usual one.

A $D(\kappa)$-geodesic space X of curvature bounded from above by κ is a CAT(κ)-space if and only if it has injectivity radius[6] $D(\kappa)$.

Examples

1) The definition is modelled after Riemannian manifolds with upper curvature bounds: A standard triangle comparison theorem says that a Riemannian manifold has sectional curvature bounded from above by κ if and only if $K^+_X(x) \le \kappa$. Rie-

---

[4] This point of view is opposite to the point of view maintained in some publications, where curvature is defined to be a global phenomenon.

[5] The corresponding definition of lower curvature bounds is essentially obtained by reversing (1.6). An important difference between upper and lower curvature bounds is reflected by the differences in the assumptions of the corresponding triangle comparison theorems in Riemannian geometry.

[6] The injectivity radius of a space X is defined to be the supremum over all $r \ge 0$ such that for each pair of points in X of distance $< r$, there is a unique minimizing geodesic connecting them.

mannian symmetric spaces of noncompact type and their quotients are the most important examples of Riemannian manifolds of nonpositive curvature.

2) Suppose X is a graph, say locally finite. Assume that each edge σ of X is endowed with a metric d_σ such that (σ, d_σ) is isometric to some compact interval. Then X with the induced length metric d has curvature bounded from above by κ for arbitrary κ. In this sense, the curvature of X is $-\infty$.

If X is a space of curvature bounded from above by a constant κ and $x \in X$ is a chosen point, then we obtain a new complete space Y of curvature bounded from above by κ by attaching a compact interval I to X by identifying one of its end points with x. We obtain *hairy examples*.

3) Suppose X is a simplicial complex; for the sake of simplicity assume X to be locally finite. Suppose each simplex σ of X is endowed with a metric d_σ such that (σ, d_σ) is isometric to a *standard simplex* of curvature κ, that is, σ is isometric to an intersection $\bar{\sigma}$ of $k+1$ halfspaces in M^k_κ in general position, where $k = \dim \sigma$. Suppose furthermore that $d_\sigma | \eta = d_\eta$ whenever η is adjacent to σ. Such a structure on X will be called a *piecewise spherical, Euclidean*, or *hyperbolic structure* on X for $\kappa = 1, 0$, or -1, respectively.

Let v be a vertex of X. Then we may view any simplex η of the link L_v of v as the piece of the unit sphere inside the tangent space $T_v\sigma$ cut out by σ, where σ is the simplex of X determining η. This endows L_v with a piecewise spherical metric.

Suppose X is endowed with a piecewise spherical, Euclidean, or hyperbolic structure. Then X with the induced length metric d has curvature bounded from above by $1, 0$, or -1, respectively, if and only if, for each vertex v of X, the link L_v, endowed with the induced piecewise spherical metrics on its simplices, is CAT(1).

The natural piecewise spherical, Euclidean, or hyperbolic structure on a spherical, Euclidean, or hyperbolic building turns it into a CAT(κ)-space, with $\kappa = 1, 0$, or -1, respectively.

4) There is a precise criterion for piecewise smooth metrics on 2-dimensional simplicial complexes to have an upper curvature bound κ, see the appendix of [BaBuy]. However, in higher dimensions it is rather unclear whether there are any general criteria besides some obvious sufficient ones.

5) A Banach space has an upper curvature bound (or lower curvature bound, respectively) if and only if it is a Hilbert space. Banach spaces have nonpositive curvature in a weaker sense though; they are convex in the terminology of [AlBi].

Hadamard Spaces and their Ideal Boundary

Following the terminology in the smooth case, a *Hadamard space* is a complete CAT(0)-space.

The Hadamard-Cartan theorem in Riemannian geometry establishes a local-to-global phenomenon for simply connected and complete Riemannian manifolds of nonpositive sectional curvature. There is the following version in the general setting (compare also [AlBi], where Alexander and Bishop obtain a version for convex geodesic spaces).

1.8 Theorem. *A simply connected and complete space of nonpositive curvature is a Hadamard space.*

Any geodesic segment in a Hadamard space is minimal and is, in fact, the unique geodesic connection of its endpoints. In particular, Hadamard spaces are contractible: Fix an origin $x \in X$. For $y \in X$ let $c_{xy} : [0,1] \to X$ be the unique geodesic with $c(0) = x$ and $c(1) = y$. Then $C(t, y) := c_{xy}(1-t)$, $0 \le t \le 1$, defines a contraction of X to the origin x. It follows that complete spaces of nonpositive curvature are $K(\pi, 1)$-spaces.

In a Hadamard space, all reasonable functions are convex. For example, the distance to a convex subset is a convex function. For any two geodesics c_0, c_1, the function $d(c_0(s), c_1(t))$ is convex on its domain of definition in the (s,t)-plane.

There is an important compactification of locally compact Hadamard spaces by *ideal points*, corresponding to the points on the unit circle in the case of the Poincaré disc model of the hyperbolic plane: Let X be a Hadamard space. Say that unit speed geodesic rays $c_0, c_1 : [0, \infty) \to X$ are *asymptotic* if the distance $d(c_0(t), c_1(t))$ is uniformly bounded. The following are elementary:

(AR1) For any unit speed geodesic ray $c : [0,\infty) \to X$ and any point $x \in X$, there is a unique unit speed geodesic ray $c_x : [0,\infty) \to X$ asymptotic to c with $c_x(0) = x$.

(AR2) For any sequence $c_n : [0,\infty) \to X$ of unit speed geodesic rays in X converging to a unit speed geodesic ray $c : [0,\infty) \to X$ and any sequence x_n of points in X converging to a point $x \in X$, the sequence of unit speed geodesic rays $c_{nx_n} : [0,\infty) \to X$ converges to $c_x : [0,\infty) \to X$.

We let ∂X be the set of asymptote classes of unit speed geodesic rays in X and set $\bar{X} := X \cup \partial X$. The *cone topology* on $\bar{X}$ has the following two characteristic properties:

(CT1) It coincides with the given topology on X.

(CT2) A sequence ξ_n in $\bar{X}$ converges to a point $\xi \in \partial X$ if and only if, for any $x \in X$, the unit speed geodesic from x to ξ_n (the ray from x in ξ_n if $\xi_n \in \partial X$) converges to the unit speed geodesic ray from x representing ξ.

In the case of Hadamard manifolds, the cone topology turns ∂X into a sphere, *the sphere at infinity*, and $\bar{X}$ is homoeomorphic to a closed ball. In the general setting, the topology is more complicated. However, as long as X is locally compact, $\bar{X}$ is a compactification of X.

There is a second topology on ∂X: For $\xi, \eta \in \partial X$ and $x \in X$, let c_ξ and c_η be the unit speed geodesic rays starting at x and representing ξ and η, respectively. Let $d = \lim d(c_\xi(t), c_\eta(t))/t$ and Δ be the Euclidean triangle with two sides of length 1 and one side of length d. Let $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ be the angle at the vertex of Δ opposite the side of length d. Then α is a metric on ∂X. The associated length metric is called the *Tits metric*. The Tits metric is nontrivial if there is enough flatness in X.

It is more or less clear that the action of the group of isometries of X extends continuously to $\bar{X}$ in the cone topology and that the restriction of this action to ∂X is also continuous in the Tits metric.

It is too optimistic to expect that X is determined by the structure of ∂X. An exception is Leeb's characterization of symmetric spaces and Euclidean buildings, Theorem 3.2 below. In general, there is the following natural

1.9 Question. *How much of the geometry of a Hadamard space X is caught by the structure of ∂X?*

There is interesting work of, among others, Buyalo [Buy], Croke and Kleiner [CrKl1,CrKl2] and Hummel and Schroeder [HuSr], where this question is discussed.

2 Large Isometry Groups and Geometry

In Riemannian geometry there are many results relating the geometry and topology of manifolds of nonpositive sectional curvature. There are particularly close relations in the compact case. As a rule, the results whose proof does not involve the *Margulis Lemma* also hold for compact spaces of nonpositive curvature. Some care has to be taken though since such spaces might be infinite dimensional or might be irregular in one way or another. Another important feature, difficult to handle and not present in the smooth case, is the branching of geodesics. For trees and simplicial spaces with piecewise smooth metrics, branching of geodesics occurs along simplices of positive codimension.

We will formulate our results in terms of the universal covering space, a Hadamard space in the induced metric structure, and the group of covering transformations, which acts by isometries. The situation we discuss is a bit more general actually: Unless otherwise specified we will assume, in this section, that *X is a locally compact Hadamard space and Γ a properly discontinuous and cocompact group of isometries.*

Groups and Flats

A subset $F \subset X$ is a *k-flat* if F is closed, convex, and isometric to Euclidean space of dimension k. A 0-flat is a point, a 1-flat is a complete geodesic. The existence of one or many flats of *dimension* $k \geq 2$ is a central issue in rigidity questions. The following result is due to Eberlein in the smooth case [Eb1], a similar argument works in the general setting, see [Gr2,Bri1].

2.1 Theorem. *Let X and Γ be as above. Then X and Γ are hyperbolic (in the sense of Gromov) if and only if X does not contain a flat of dimension* 2.

Hyperbolicity is a quasi-isometry invariant. Thus the existence of a 2-flat in X is a quasi-isometry invariant of X. In fact, it was shown by Anderson and Schroeder that the existence of a k-flat in a compact Riemannian manifold of nonpositive sectional curvature is a quasi-isometry invariant [AnSr]. A new argument by Kleiner allowed the extension to the general setting.

2.2 Theorem (Kleiner [Kl]). *Let X and Γ be as above. Then X contains a k-flat if and only if there is a quasi-isometric embedding of k-dimensional Euclidean space into X.*

The flat torus theorem says that for a subgroup $\Delta \subset \Gamma$ isomorphic to $\mathbb{Z}^k$, there is a Δ-invariant k-flat F in X such that Δ acts on F as a cocompact lattice of translations. Hence X is not hyperbolic if Γ contains a subgroup isomorphic to $\mathbb{Z}^2$. Thus the previous two results lead to the following

2.3 Question. Is hyperbolicity equivalent to the non-existence of a subgroup of Γ isomorphic to $\mathbb{Z}^2$? More generally, does Γ contain a subgroup isomorphic to $\mathbb{Z}^k$ if X contains a k-flat?

By the work of Bangert and Schroeder [BanSr] the answer is positive in the case of compact, real analytic Riemannian manifolds. Except for this, the answers to these questions are completely open, even in the case where X is a geodesically complete and piecewise Euclidean complex of dimension two!

Related to the flat torus theorem and generalizing earlier results of Avez and Zimmer, there is a fixed point theorem of Burger and Schroeder, see [BugSr]. The extension of their result to the general setting reads as expected; however, the arguments require a nontrivial change, compare [AdBa]:

2.4 Theorem. *Let X be a locally compact Hadamard space and Δ be an amenable group of isometries of X. Then X contains a Δ-invariant flat or Δ fixes a point of $\bar{X}$.*

The two possibilities in the theorem are not mutually exclusive. Maybe there is a more precise version of Theorem 2.4 if Δ is assumed to be discrete.

Geometric Rank and Rank Rigidity

We say that a Hadamard space X has *geometric rank k* if each geodesic segment of X is contained in a k-flat. Note that X is geodesically complete if and only if X has geometric rank ≥ 1. The geometric rank of a symmetric space of noncompact type coincides with its usual rank. For example, $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ has rank $n-1$. The geometric rank of a Euclidean building is equal to its dimension. The geometric rank of a product is equal to the sum of the geometric ranks of the factors.

The following result was proved by Eberlein in the smooth case [Eb2], the easy extension of his arguments to the general setting is contained in [BaBr2].

2.5 Theorem. *For X and Γ as above, to be of geometric rank ≥ 2 is a quasi-isometry invariant of X (and Γ).*

Suppose for the moment that X is a smooth Riemannian manifold. Then there are two cases: Either the geometric rank of X is one and then X has significant similarities with manifolds of strictly negative sectional curvature. Or the geometric rank of X is at least two. Then X is a Riemannian product or a symmetric space of noncompact type by the rank rigidity theorem.

For a compact proof of the rank rigidity theorem in the smooth case, see [Ba2] [7]. Here is a list (not quite complete) of properties of rank one manifolds.

[7] In the homogeneous case, which has almost empty intersection with the case discussed here, rank rigidity is proved in [He].

2.6 Theorem. *Suppose $M = X/\Gamma$ is a compact Riemannian manifold of non-positive sectional curvature. If the geometric rank of X is one, then the following hold:*

1. *The geodesic flow of M is topologically transitive*[8].
2. *Hyperbolic closed geodesics are dense in the tangent bundle of M.*
3. *If $N_h(L)$ denotes the number of geometrically distinct hyperbolic closed geodesics of length at most L, then*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \ln N_h(L) = h,$$

where $h > 0$ is the topological entropy of the geodesic flow of M (Knieper [Kn1], for a more precise estimate, see [Kn2]).

4. *The Dirichlet problem at infinity is solvable in X* (see [Ba2]).
5. *The Poisson boundary of X is canonically isomorphic to $X(\infty)$* (see [BaLd]).

None of these properties holds if the geometric rank of X is ≥ 2.

There should be similar results in the general case. So far, there is only a complete picture for compact 2-dimensional polyhedra with piecewise smooth metrics of nonpositive curvature.

2.7 Theorem ([BaBr2]). *Let X be a 2-dimensional polyhedron without boundary with a piecewise smooth metric of nonpositive curvature and Γ be a properly discontinuous and cocompact group of isometries of X. Then we have:*

If the geometric rank of X is one, then

1. *the geodesic flow of X is topologically transitive mod Γ*[9].
2. *hyperbolic Γ-closed geodesics are dense in the space of geodesics and their growth rate is equal to the topological entropy of the geodesic flow.*

If the geometric rank of X is two, then

1. *X is a product of trees or*
2. *X is a thick Euclidean building.*

The easy part of the proof consists in showing that X is a product of trees or a Euclidean building if the geometric rank of X is two. The hard part of the proof concerns the existence of a hyperbolic Γ-closed geodesic in the case when the geometric rank is one — a closing lemma in the case of a nonhyperbolic flow.

Remark 18. For applications in geometric group theory and topology it is important to note that in the case where X has boundary, there is a Γ-equivariant homotopy equivalence to a polyhedron Y of dimension ≤ 2 without boundary, on which the action of Γ is also properly discontinuous and cocompact and which admits a piecewise smooth Γ-invariant metric of nonpositive curvature, see [BaBr2].

---

[8] The ergodicity of the geodesic flow is still an open problem. The identical gap in the proofs in [Pe], [Bur], and [BaBr1] has not been filled in yet.

[9] By definition, the geodesic flow g^t acts tautologically on the space of complete (unit speed) geodesics, $g^t(c)(s) := c(s+t)$.

The situation in higher dimensions is unclear. Besides the work of Leeb and of Charney and Lytchak, which adresses geometric characterizations of buildings, see Section 3, there is the following partial result in dimension three.

2.9 Theorem ([BaBr3,BaBr4]). *Let X be a 3-dimensional polyhedron without boundary, endowed with a piecewise Euclidean structure of nonpositive curvature. Suppose that X admits a properly discontinuous and cocompact group Γ of isometries. Then if X has geometric rank ≥ 2, then X is a product or a thick Euclidean building.*

The arguments are somewhat complicated, if not unattractive, and seem to need the assumption on the dimension. Moreover, the theorem only adresses the characterization of buildings. What is completely missing is the rank one side of the picture. The most important question here is whether X admits a (one!) hyperbolic Γ-closed geodesic if the geometric rank of X is one. The existence of such a geodesic has been established in the case where some link of X is not connected or has radius $> \pi$, see [BaBr2, Lemma 7.2][10].

A closing argument shows that the existence of a hyperbolic Γ-closed geodesic follows from the existence of a hyperbolic Γ-recurrent geodesic, see [Ba2, Section III.3]. The latter would follow if the geodesic flow of X had an invariant measure which is finite mod Γ and positive on open sets of geodesics. The Liouville measure, as considered in [BaBr2], does not have this property (in general), "it does not see" the most hyperbolic part of the geodesic flow, created by links of diameter $> \pi$.

3 Other Topics

In my talk at the DMV meeting in Mainz, I did not have the time to survey and explain all the ongoing activities in the field of nonpositively curved spaces. I take this opportunity to mention a few other directions and results which I find particularly fascinating and interesting. I apologize for omissions.

Rigidity of Symmetric Spaces and Buildings without Groups

Pansu showed that a quasi-isometry of a quaternionic hyperbolic space or the Cayley hyperbolic plane lies within bounded distance to an isometry [Pa]. Margulis conjectured that the same holds for irreducible symmetric spaces of noncompact type and rank at least two. Kleiner and Leeb settled Margulis' conjecture and, in fact, proved the following wonderful result.

3.1 Theorem (Kleiner-Leeb [KlLe]). *Let X and Y be irreducible symmetric spaces of noncompact type of rank at least 2 or irreducible thick Euclidean buildings of rank at least 2 with cocompact affine Weyl group and Moufang Tits boundary. Then any quasi-isometry $f: X \to Y$ is within bounded distance to a homothety.*

[10] It is actually sufficient to show the existence of a Γ-closed geodesic which does not bound a flat half plane. Compare the discussion in [Ba2, Section III.3]. I proved this in the case where all links of X have diameter π, a rather restrictive assumption.

In Mostow's proof of his celebrated rigidity theorem, quasi-isometries occur as lifts of homotopy equivalences of compact quotients of X and Y. In particular, they are equivariant with respect to large groups of isometries of X and Y. In contrast to this, the theorem of Kleiner and Leeb does not assume any equivariance of the quasi-isometry.

There is also the following beautiful geometric characterization of symmetric spaces and Euclidean buildings.

3.2 Theorem (Leeb [Le]). *Let X be a geodesically complete and locally compact Hadamard space. Assume that $\partial_{Tits} X$ is an irreducible thick spherical building. Then X is a Riemannian symmetric space or a Euclidean building.*

This result also allows to remove the assumption that the Tits boundary be Moufang from Theorem 3.1.

Another very nice and useful geometric characterization of buildings is due to Charney and Lytchak (there is earlier unpublished work of Kleiner). Let X be a geodesically complete geodesic space. Say that X has the *discrete extension property* if, for each geodesic segment, the set of its geodesic extensions is discrete.

3.3 Theorem (Charney-Lytchak [ChLy]). *Let X be a connected simplicial complex of dimension ≥ 2 with a piecewise spherical or Euclidean structure, respectively, and suppose X is geodesically complete and geodesic. Then X is a spherical or metric Euclidean building, respectively, if and only if*

1. *X has the dicrete extension property and*
2. *X is $CAT(1)$ or $CAT(0)$, respectively.*

Here we count trees and Euclidean cones over spherical buildings also as *metric* Euclidean buildings.

Geometric Group Theory and Topology

From the very beginning in the work of Dehn, a considerable part of geometric group theory relies on the geometry of negatively and nonpositively curved spaces. The same seems to be true for geometric topology. For results in these directions, see for example [Bri2,Da,DaMo,Fa,FaJo,GHV,Gr2,Gr3].

Harmonic Maps and Rigidity

The concept of a harmonic map into a metric space was developed by Gromov and Schoen [GrSn]. They used it to show that lattices of quaternionic hyperbolic spaces and the Cayley hyperbolic plane are arithmetic. Their theory was taken up and developed further by many mathematicians: Korevaar and Schoen, Jost, and others. For a more recent article with some relevant references, see [Ma].

Conjugacy of Geodesic Flows

There are quite a few interesting results about conjugacy and conjugacy rigidity of geodesic flows, see for example [Cr1,Cr2,CrKlEb,Ot]. This is a topic close to the theory of negatively curved spaces – a different world, see for example [Ha] and [BeCoGa].

Negative Curvature

This subfield is certainly larger than the field of nonpositive curvature. The same is true, in a next step, for the field of constant negative curvature.

References

[AdBa] S. Adams and W. Ballmann: Amenable Isometry Groups of Hadamard Spaces. *Math. Annalen* 312 (1998), 183–195.

[AlBi] S. B. Alexander and R. L. Bishop: The Hadamard-Cartan Theorem in Locally Convex Metric Spaces. *L'Enseignement Math.* 36 (1990), 309–320.

[Ale1] A. D. Alexandrov: A Theorem on Triangles in a Metric Space and Some Applications. *Trudy Math. Inst. Steklov* 38 (1951), 5–23. (Russian; translated into German and expanded in [Ale2]).

[Ale2] A. D. Alexandrov: Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie. *Schriften Forschungsinst. Math. Berlin* 1 (1957), 33–84.

[AnSr] M. Anderson and V. Schroeder: Existence of Flats in Manifolds of Nonpositive Curvature. *Invent. math.* 85 (1986), 303–315.

[Ba1] W. Ballmann: On the Dirichlet Problem at Infinity for Manifolds of Nonpositive Curvature. *Forum Math.* 1 (1989), 201–213.

[Ba2] W. Ballmann: Manifolds of Non-Positive Curvature. *Jahresberichte DMV* 92 (1990), 145–152.

[Ba3] W. Ballmann: *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature.* DMV Seminar 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[BaBr1] W. Ballmann and M. Brin: On the Ergodicity of Geodesic Flows. *Ergodic Th. & Dynamical Systems* 2 (1982), 311–315.

[BaBr2] W. Ballmann and M. Brin: Orbihedra of Nonpositive Curvature. *Publications Math. IHES* 82 (1995), 169–209.

[BaBr3] W. Ballmann and M. Brin: Diameter Rigidity of Spherical Polyhedra. *Duke Math. J.* 97 (1999), 235–259.

[BaBr4] W. Ballmann and M. Brin: Rank Rigidity of Euclidean Polyhedra. *Amer. J. Math.* 122 (2000), 873–885.

[BaBuy] W. Ballmann and S. V. Buyalo: Nonpositively Curved Metrics on 2-Polyhedra. *Math. Z.* 222 (1996), 97–134.

[BaGrSr] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder: *Manifolds of Nonpositive Curvature.* Progress in Mathematics, 61. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[BaLd] W. Ballmann and F. Ledrappier: The Poisson Boundary for Rank One Manifolds and their Cocompact Lattices. *Forum Math.* 6 (1994), 301–313.

[BanSr] V. Bangert and V. Schroeder: Existence of Flat Tori in Analytic Manifolds of Nonpositive Curvature. *Annales Sci. Éc. Norm. Sup.* 24 (1991), 605–634.

[BeCoGa] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot: Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.* 5 (1995), 731–799.

[Bri1] M. R. Bridson: On the Existence of Flat Planes in Spaces of Nonpositive Curvature. *Proceedings Amer. Math. Soc.* 123 (1995), 223–235.

[Bri2] M. R. Bridson: Non-positive Curvature in Group Theory. *Groups St. Andrews* 1997 in Bath, I, 124–175, LMS Lecture Note Ser. 260, Cambridge U Press, Cambridge, 1999.

[BriHa] M. R. Bridson and A. Haefliger: *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Grundlehren der math. Wiss. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Bro] K. Brown: *Buildings.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Etc, 1989.

[BruTi] F. Bruhat and J. Tits: Groupes réductifs sur un corps local. *Publications Math. IHES* 41 (1972), 5–251.

[BugSr] M. Burger and V. Schroeder: Amenable Groups and Stabilizers of Measures on the Boundary of a Hadamard Manifold. *Math. Ann.* 276 (1987), 505–514.

[Bur] K. Burns: Hyperbolic Behaviour of Geodesic Flows on Manifolds with no Focal Points. *Ergodic Th. & Dynamical Systems* 3 (1983), 1–12.

[Bus] H. Busemann: Spaces with Non-Positive Curvature. *Acta Mathematica* 80 (1948), 259–310.

[Buy] S. V. Buyalo: Geodesics in Hadamard spaces. *Algebra i Analiz* 10 (1998), 93–123, (Russian; translation in *St. Petersburg Math. J.* 10 (1999), 293–313.)

[ChLy] R. Charney and A. Lytchak: Metric Characterization of Spherical and Euclidean Buildings. *Geometry & Topology*, to appear.

[CoVo] S. Cohn-Vossen: Existenz kürzester Wege. *Doklady SSSR* 8 (1935), 339–342.

[Cr1] C. B. Croke: Rigidity for Surfaces of Non-Positive Curvature. *Comm. Math. Helv.* 65 (1990), 150–169.

[Cr2] C. B. Croke: Conjugacy Rigidity for Nonpositively Curved Graph Manifolds. *Preprint*, U Pennsylvania, 2000.

[CrKl1] C. B. Croke and B. Kleiner: Spaces with Nonpositive Curvature and their Ideal Boundaries. *Topology* 39 (2000), 549–556.

[CrKl2] C. B. Croke and B. Kleiner: The Geodesic Flow of a Nonpositively Curved Graph Manifold. Preprint, U Pennsylvania, 2000.

[CrKlEb] C. B. Croke, P. B. Eberlein and B. Kleiner: Conjugacy and Rigidity for Nonpositively Curved Manifolds of Higher Rank. *Topology* 35 (1996), no. 2, 273–286.

[Da] M. W. Davis: Nonpositive Curvature and Reflections Groups. *Handbook of Geometric Topology*, R. Davermann and R. Sher (Eds.), Elsevier, 2001, to appear.

[DaMo] M. W. Davis and G. Moussong: Notes on Nonpositively Curved Polyhedra. *Low Dimensional Topology* (Eger, 1996/Budapest, 1998), 11–94, Bolyai Soc. Math. Stud., 8, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.

[Eb1] P. B. Eberlein: Geodesic Flow in certain Manifolds without Conjugate Points. *Transactions Amer. Math. Soc.* 167 (1972), 151–170.

[Eb2] P. B. Eberlein: Geodesic Rigidity in Compact Nonpositively Curved Manifolds. *Transactions Amer. Math. Soc.* 268 (1981), 411–443.

[Eb3] P. B. Eberlein: *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds.* Chicago Lectures in Math. U of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.

[Fa] F. T. Farrell: *Lectures on Surgical Methods in Rigidity.* Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[FaJo] F. T. Farrell and L. E. Jones: Classical Aspherical Manifolds. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics,* 75. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[GHV] E. Ghys, A. Haefliger and A. Verjovsky (Eds): *Group Theory from a Geometrical Viewpoint.* Proceedings of the workshop held in Trieste, March 26–April 6, 1990. World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1991.

[Gr1] M. Gromov: *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* (Rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu.) Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Gr2] M. Gromov: Hyperbolic Groups. *Essays in Group Theory* (S. M. Gersten, ed.), MSRI-Publications 8, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1987, pp. 75–264.

[Gr3] M. Gromov: Asymptotic Invariants of Infinite Groups. *Geometric Group Theory* (G. Niblo and M. Roller, eds.), LMS Lecture Notes 182, Cambridge U Press, Cambridge, 1993.

[GrSn] M. Gromov and R. Schoen: Harmonic Maps into Singular Spaces and p-Adic Superrigidity for Lattices in Groups of Rank One. *Publications Math. IHES* 76 (1992), 165–246.

[Ha] U. Hamenstädt: Starrheitseigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. *Jahresberichte DMV* 95 (1993), 47–59.

[He] J. Heber: Homogeneous Spaces of Nonpositive Curvature and their Geodesic Flow. *Internat. J. Math.* 6 (1995), 279–296.

[Hi] S. Hildebrandt: Remarks on the Life and Work of Fritz John. *Comm. Pure Applied Math.* 51 (1998), 971–989.

[HuSr] C. Hummel and V. Schroeder: Tits Geometry of Cocompact Real-Analytic Hadamard Manifolds of Dimension 4. *Differential Geom. Appl.* 11 (1999), 129–143.

[Kl] B. Kleiner: The Local Structure of Length Spaces with Curvature Bounded Above. *Math. Z.* 231 (1999), 409–456.

[KlLe] B. Kleiner and B. Leeb: Rigidity of Quasi-Isometries for Symmetric Spaces and Euclidean Buildings. *Publications Math. IHES* 86 (1997), 115–197.

[Kn1] G. Knieper: Das Wachstum der Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer in kompakten Mannigfaltigkeiten. *Arch. Math.* 40 (1983) 6, 559–568.

[Kn2] G. Knieper: On the Asymptotic Geometry of Nonpositively Curved Manifolds. *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997), 755–782.

[LaSr1] U. Lang and V. Schroeder: Jung's Theorem for Alexandrov Spaces of Curvature Bounded Above. *Ann. Global Anal. Geom.* 15 (1997), 263–275.

[LaSr2] U. Lang and V. Schroeder: Kirszbraun's Theorem and Metric Spaces of Bounded Curvature. *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997), 535–560.

[LaSr3] U. Lang and V. Schroeder: Quasiflats in Hadamard spaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 30 (1997), 339–352.

[Le] B. Leeb: A Characterization of Irreducible Symmetric Spaces and Euclidean Buildings of Higher Rank by their Asymptotic Geometry. Habilitationsschrift, Bonn 1997, *Bonner math. Schriften* 326 (2000).

[Ma] U. F. Mayer: Gradient Flows on Nonpositively Curved Metric Spaces and Harmonic Maps. *Comm. Analysis and Geometry* 6 (1998), 199–253.

[Mo] G. D. Mostow: *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces.* Annals of Math. Studies. 78, Princeton University Press, Princeton, 1973.

[Ot] J.-P. Otal: Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Ann. of Math.* 131 (1990), 151–162.

[Pa] P. Pansu: Métriques de Carnot-Caratheodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un. *Annals of Math.* 129 (1989), 1–60.

[Pe] Ya. B. Pesin: Geodesic Flow on Closed Riemannian Manifolds without Focal Points. *Math. USSR Izvestija* 11 (1977), 1195–1228.

[Ri] W. Rinow: *Die innere Geometrie der metrischen Räume.* Grundlehren der math. Wiss. 105, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.

[Wa] A. Wald: Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen. *Ergebnisse eines math. Kolloquiums* 7, Wien 1935, pp. 24–46.

Werner Ballmann
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstrasse 1
D-53115 Bonn
ballmann@math.uni-bonn.de

(*Eingegangen 1.6.2001*)

Buchbesprechungen

Monastryrsky, M., Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals, Wellesley: A. K. Peters, 1998, 160 S., $ 19.95

Das Ende eines Jahrhunderts oder gar eines Jahrtausends bietet einerseits Anlaß zum Rückblick auf das Vergangene, ist aber auch ein Zeitpunkt, zu dem man versucht ist, zukünftige Entwicklungen zu antizipieren oder wenigstens Hauptrichtungen zukünftiger Forschung aufzuzeigen. Es gibt in der letzten Zeit vermehrt Publikationen, die sich direkt oder auch indirekt in diesen Zusammenhang stellen lassen. Eine von der IMU initiierte und herausgegebene Publikation mit dem Titel *Mathematics: Frontiers and Perspectives* ist ein gutes Beispiel dafür. Das vorliegende Buch von Michael Monastyrsky mit dem Titel *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals* ein anderes. Im Vordergrund steht hier der Versuch eines Rückblicks auf die Mathematik der letzten 70 Jahre anhand der Entwicklungen und Fortschritte, die durch die Träger der Fields Medaille initiiert oder erzielt wurden. Dabei läßt sich nicht vermeiden, daß das Resultat allenfalls den Anspruch erheben kann, eine Projektion der tatsächlichen Leistungen und Fortschritte in der Mathematik insgesamt zu sein, eine Projektion, die abhängt sowohl von der jeweiligen Auswahl der Preisträger als auch vom Geschmack, den Vorlieben und nicht zuletzt der mathematischen Herkunft des Autors.

In einem kurzen und wohlwollenden Vorwort für das Buch gibt Freeman Dyson etwas Auskunft über die Hintergründe der Entstehung des Buches. Die Schwierigkeiten und das innere Exil vieler Mathematiker in der ehemaligen Sovietunion, die in einer mathematischen Gemeinschaft lebten, die politisch von I.M. Vinogradov sowie von L.S. Pontryagin beherrscht und oft auch manipuliert wurde, bewogen den den Autor unter anderem, dieses Buch zu schreiben.

Darüber, sowie über die Begleitumstände der Entstehung des Buches, findet man auch einiges in dem interessanten Prolog. Hier wird darüber hinaus auch kurz auf die interessante und immerwährende Kontroverse um die Frage eingegangen, wie stark die Mathematik von und aus ihren Anwendungen in anderen Disziplinen lebt. Auf der einen Seite findet man ein Zitat von Dieudonné aus dem Jahr 1962, der darauf hinweist, daß die wirklich großen Fortschritte in der Mathematik der Nachkriegszeit nichts mit Anwendungen in der Physik zu tun hatten. Auf der anderen Seite kann man lesen und im Prinzip wohl auch zustimmen, daß Fragestellungen aus der Physik für die mathematische Enwicklung in den letzten 20 Jahren eine nicht unerhebliche Rolle gespielt haben. Der Prolog wird schließlich bereichert durch einen kurzen Abriß sowohl über die Biographie von Charles Fields, dem Stifter der Medaille, als auch über die Geschichte der Fieldsmedaille selbst.

Die Beschreibung der Arbeiten der Medaillenträger und deren Auswirkung auf den mathematischen Fortschritt insgesamt steht im Zentrum des Buches. Monastyrsky wählt nicht den chronologischen Zugang, sondern vielmehr eine Aufteilung in verschiedene Gebiete, in denen die Auszeichnung vergeben wurde, nämlich Topologie, komplexe Analysis, algebraische Geometrie, Zahlentheorie, Algebra und Mathematische Logik. Dem Abschnitt über mathematische Logik werden noch Miszellaneen vorangestellt, wobei man sich fragt, wieso diese Reihenfolge gewählt wird. Das ganze wird in zwei Appendizes ergänzt durch eine Darstellung der Beiträge der Preisträger aus den Jahren 1990 und 1994. Am Ende des Buche findet man in einem kurzen Kapitel bibliographische Angaben sowie Angaben über Quellen.

Ein solches Vorgehen macht einen gewissen Sinn, indem es sicherlich besser dazu geeignet ist, dem Leser eine kohärente Darstellung mathematischer Entwicklungen in den letzten 70 Jahren zu vermitteln und auch besser die verschiedenen Bezüge in dem Werk der Preisträger zueinander herzustellen erlaubt. Die Einteilung gelingt allerdings nicht überall. Eine Schwäche, über die man zugegebenermaßen geteilter Meinung sein kann, ist zum Beispiel das Kapitel über die komplexe Analysis. Hier wäre wohl ein Kapitel über Analysis sinnvoller gewesen, dem man auch einige der in den Miszellaneen aufgeführten Preisträger hätte zuordnen können, sodaß sich ein geschlosseneres und ausgewogeneres Bild ergeben hätte. Etwas unverständlich ist auch die Zuordnung von Jesse Douglas, einem der ersten Träger der Fields Medaille, zur Zahlentheorie. Er war für die Lösung des Plateauproblems geehrt worden, dessen Zusammenhang mit der Zahlentheorie wohl nur dadurch zustande kommt, daß sich der Zahlentheoretiker Bombieri zufälligerweise auch für Minimalflächen interessiert hat und in diesem Zusammenhang Douglas gleich mit abgehandelt wird. Umgekehrt ist die Mathematik von Margulis sicherlich der Zahlentheorie im weitesten Sinn zuzuordnen. Dewegen hätte er dort und nicht in dem Kapitel über Miszellaneen aufgenommen werden können. Ähnlich ergeht es Daniel Quillen, dessen Beitrag zur Serreschen Vermutung über projektive Moduln eindeutig der Algebra angehört. Laurent Schwartz, Lars Hörmander und Charles Fefferman, allesamt in den Miszellaneen zu finden, sind hingegen der Analysis nahestehend und hätten vorteilhaft da besprochen werden können. Auf diese Weise bliebe lediglich Alain Connes übrig, der sowohl in der Algebra im weitesten Sinne als auch in der Analysis gut aufgehoben gewesen wäre. Diese kleine Schwäche in der Strukturierung des Materials könnte sicherlich in einer revidierten und aktualisierten Neuauflage beseitigt werden, ebenso wie die beiden Appendizes, zu denen wir noch kommen werden.

Vorzüglich gelungen ist der Abschnitt über die Topologie. In diesem Gebiet, so hat man den Eindruck, fühlt sich der Autor am vertrautesten, und man erhält so einen schönen Überblick über die Entwicklungen und Höhepunkte in der Topologie des 20. Jahrhunderts. Da wird auch deutlich herausgearbeitet, daß erst relativ spät die Bedeutung diese Gebiets im Zusammenhang mit der Fieldsmedaille gewürdigt wurde, und man liest heraus, daß das Werk von W. Hurevicz, H. Hopf und H. Freudenthal von vergleichbarer Tiefe ist wie das von J.P. Serre, der 1954 für seine fundamentalen Beiträge in der Homotopietheorie und der Homologietheorie geehrt worden war. Es ist auch interessant zu verfolgen, wie sich die Hauptaktionsplätze im Laufe der Zeit verschieben. In Serres Werk spielt die Technik der Lerayschen Spektralsequenz eine wichtige Rolle, bei R. Thom, der an das Werk von Serre anknüpft, die Cobordismen- und Morsetheorie. Dies wird von Milnor aufgegriffen und mit der Differentialgeometrie niedrigdimensionaler Mannigfaltigkeiten wie die 7-dimensionale Sphäre in Verbindung gebracht, oder von S. Smale, der Zusammenhänge mit dynamischen Systemen und der Stabilität herstellt. S. P. Novikov greift dann die Topologie niedrigdimensionaler Räume auf, die bereits bei Milnor eine Rolle spielte, und bringt sie mit Blätterungen, insbesondere mit der Reeb-Blätterung, in Zusammenhang. So rücken die niedrigdimensionale Topologie und die Differentialtopologie im Laufe der Zeit immer mehr in den Vordergrund und werden zentral in dem Werk von S. Donaldson, M. Freedman und W. Thurston.

Was über Hurevicz, Hopf und Freudenthal gesagt wurde, kann man wohl auch von A. Borel, R. Bott und F. Hirzebruch, um nur einige zu nennen, im Zusammenhang mit der Auszeichnung von M. Atiyah und der Entwicklung der Topologie in Richtung globale Analysis sagen. Auch dies wird zwischen den Zeilen deutlich herausgearbeitet.

Es ist etwas schade, daß der Abschnitt über die komplexe Analysis und auch der über die algebraische Geometrie nicht mit der Qualität des eben besprochenen Abschnitts mithalten kann. In dem Beitrag über die komplexe Analysis gelingt es dem Autor weder bei dem Werk von S.T. Yau noch dem von L. Ahlfors oder K. Kodaira, eine Darstellung vergleichbarer Tiefe zu vermitteln.

Ähnlich ergeht es den Preisträgern A. Grothendieck, H. Hironaka, D. Mumford, P. Deligne und G. Faltings in dem Abschnitt über die algebraische Geometrie. Auch hier, abgesehen vielleicht von Deligne, bleibt der Autor etwas an der Oberfläche, und es gelingt ihm nicht ganz, ein ähnlich kompetentes Bild der Entwicklungen in diesem Gebiet zu entwerfen wie bei der Topologie. Das ist ein wenig schade, gehören doch die Beiträge hier zum Fundamentalsten, was in der Mathematik des 20. Jahrhunderts hervorgebracht wurde. An dieser Stelle wird im übrigen nochmals die Problematik deutlich, die wir bereits haben anklingen lassen und die darin liegt, Preisträger Gebieten zuzuordnen. Denn bei Deligne und vermehrt noch bei Faltings kann man darüber streiten, ob sie der algebraischen Geometrie oder der Zahlentheorie zuzuordnen sind. Beide haben ganz grundlegende Beiträge in der Zahlentheorie geleistet. Dies macht deutlich, daß die Grenzen zwischen Gebieten fließend sein können. Genau betrachtet kamen wichtige Fortschritte in der Mathematik nämlich sehr oft dadurch zustande, daß es gelang, Methoden in einem Gebiet zu entwickeln oder voranzutreiben, um sie dann in anderen Gebieten anzuwenden und dort lange ausstehende Probleme lösen zu können. Dies aufzuzeigen und in einen umfassenden Kontext zu setzen, stellt einen hohen Anspruch an den Autor. Dieser schwierigen Aufgabe wird er allerdings nur teilweise gerecht.

Sehr ausführlich wird dann in dem Abschnitt über die Zahlentheorie das Werk von A. Selberg beschrieben. Hier scheint sich der Autor wieder auf vertrauterem Grund zu befinden, insbesondere da es sich um Fragestellungen handelt, die seinem kulturellen Umfeld nahestehen. Bei dem Werk von K.F. Roth hingegen ist es schade, daß die Vorgeschichte des damals sensationellen Resultats über die rationale Approximation algebraischer Zahlen nicht mit derselben Liebe herausgearbeitet wird, wie dies an anderer Stelle und in anderem Zusammenhang geschieht. Roths Satz steht am Ende einer rund 100-jährigen mathematischen Entwicklung, bei der so vorzügliche Mathematiker wie J. Liouville, A. Thue, C.L. Siegel, F. Dyson, A.O. Gelfond und Th. Schneider große Beiträge geleistet haben, die teilweise ähnlich zu bewerten sind wie die bereits erwähnten Vorarbeiten zu Serres oder Atiyahs frühem Werk. Die Beschreibung der Arbeiten von A. Baker ist ebenfalls wohl gelungen; insbesondere findet man auch hinreichend Auskunft über die Vorgeschichte. Jedoch ist es etwas schade, daß die kurze, recht treffende Beschreibung der weiteren spektakulären Entwicklungen in den letzten 20 Jahren auf dem Gebiet nicht durch eine adäquate Referenz unterlegt ist. Der Verweis auf das sich in Vorbereitung befindende Buch von A. Baker und G. Wüstholz ist zum augenblicklichen Zeitpunkt etwas optimistisch. Ebenfalls etwas kurz gehalten ist die Beschreibung des zahlentheoretischen Teils des Werks von E. Bombieri, eines Preisträgers mit vielen verschiedenen interessanten Facetten. Insgesamt gelingt es dem Autor, diese herauszuarbeiten, wobei allerdings Bombieris Beiträge zur Klassifikation von algebraischen Flächen in Charakteristik p unter die Räder kommen und seine Beiträge zur Analysis sowie zur Gruppentheorie vielleicht etwas zuviel Gewicht bekommen.

Über den Abschnitt Miszellaneen ist schon einiges Grundsätzliche gesagt worden. Abgesehen davon ist er jedoch als Summe von Einzelbesprechungen recht wohl gelungen. Insbesondere ist dies der Fall bei der Behandlung der Arbeiten von G.A. Margulis, D. Quillen sowie A. Connes. Hier wird, wie an anderer Stelle auch, Substantielles zur Mathematik gesagt, was den Leser wohltuend anregt. Am deutlichsten tritt dies bei Margulis hervor, und man merkt, daß dieser Preisträger, wie schon zu Beginn des Prologs erkennbar, dem Autor besonders am Herzen liegt, hatte u. a. der Fall Margulis ihn doch zum Verfassen des Buches angeregt. Dagegen wirkt das, was über die Analytiker Schwartz, Hörmander und Fefferman gesagt wird, wieder etwas bläßlich. Möglicherweise liegt es daran, daß die Mathematik hier nicht so griffig ist und nicht in so prägnanter Weise beschrieben werden kann.

Die Frage der Wahl der Reihenfolge der beiden letzten Abschnitte über Miszellaneen und Logik wurde bereits angesprochen. Vielleicht liegt die Auswahl des Verfassers darin begründet, daß die Logik in der bisherigen Geschichte der Fieldsmedaille eine etwas exotische Rolle gespielt hat. Es gelingt ihm aber, dem Leser deutlich zu machen, daß die Beiträge von K. Gödel und P. Cohen ganz fundamental und unübersehbar sind. Vielleicht hätte auch hier etwas mehr über die damit verbundene Mathematik und die Vorgeschichte gesagt werden können; aber es wird in dem Text gut herausgearbeitet, daß ohne die tiefliegenden Beiträge von Gödel der Beweis der Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese von den Axiomen der Mengenlehre durch Cohen schwer vorstellbar gewesen wäre.

Die erste russische Edition des Buches erschien 1991. Es lag deswegen nahe, die 1996 erschienene englischsprachige Version entweder völlig neu zu konzipieren und so die beiden internationalen Mathematiker Kongresse von Kyoto und Zürich in das bereits bestehende Konzept einzuarbeiten, oder aber der existierenden Version zwei Appendizes anzufügen. In der letzteren Form liegt nun das Buch vor. Man merkt ganz deutlich, daß der Autor mit frischer Energie sich der Aufgabe zuwandte, diese Appendizes zu verfassen. Auch wenn dadurch das Gesamtkonzept etwas in den Hintergrund rückt, gelingt es Michael Monastyrsky, in der Qualität des Textes an die der Abschnitte über Topologie und teilweise auch über Miszellaneen anzuknüpfen und dem Leser den jeweiligen mathematischen Hintergrund in gelungener Weise zu vermitteln.

Insgesamt stellt das Buch einen wertvollen Beitrag zur Darstellung der Mathematik des 20.Jahrhunderts dar, wofür man dem Autor sowie dem Verleger Klaus Peters dankbar sein sollte. Letzterem ist es auch gelungen, das Buch so zu edieren, daß man es mit Freude in der Hand hält. Dennoch kann man sich vorstellen, daß das Buch bei einer zukünftigen Neuauflage durch ein überarbeitetes Gesamtkonzept durchaus weiter gewinnen könnte. Aber auch jetzt schon ist zu hoffen, daß Monastyrskys Buch viele Leser findet, die auf mathematisch unterhaltsame Weise aus der Lektüre reichlich Gewinn ziehen können.

Zürich G. Wüstholz

Ribenboim, P., Fermat's Last Theorem for Amateurs, Springer 1999, 400 S., $39,95

It is well known that the development of the classical algebraic number theory was greatly influenced by the serious attempts (mostly due to Kummer in the 19th century) to prove Fermat's conjecture ("Fermat's Last Theorem", stated about 1637) on the integral solutions of the equation $X^n + Y^n = Z^n$, for a given integer $n \geq 3$. Also, it is known that all these attempts failed, and that the first proof of Fermat's conjecture (due to Wiles 1994) was based on a link between this conjecture and a much more important (though not so famous) conjecture, the Taniyama's conjecture, in the theory of elliptic curves. Like Faltings' proof of the Mordell's conjecture Wiles' proof was a triumph of the modern geometric aproach in algebraic number theory often called arithmetical (algebraic) geometry.

In 1979 Ribenboim published his book "13 Lectures on Fermat's Last Theorem". At that time it was not at all clear which strategy or theory would yield a break-through in proving or disproving Fermat's conjecture. So it was attractive to see in this book how far all the known attempts – the elementary ones and the much more advanced ones – had failed and which results (criteria) for the validity of the conjecture had been established so far. Since these attempts not even succeeded in proving the conjecture for an infinite number of prime exponents n it seemed, after all, just a matter of belief if the conjecture (especially its so called second case forbidding relatively prime solutions x, y, z with n dividing the product $xyz \neq 0$) should be true or not.

It seems likely that there will be a proof of Fermat's conjecture in the future which is much simpler than Wiles' original proof. But it doesn't seem so likely that there will really be an "elementary" one. Nevertheless, this new book of Ribenboim under review was just designed to exhibit the elementary achievements concerning Fermat's problem. In the author's own words (from the Preface): " This book has not been written with the purpose of presenting the proof of Fermat's theorem. On the contrary, it is written for amateurs, teachers, and mathematicians curious about the unfolding of the subject. I employ exclusively elementary methods (except in the Epilogue). The presentation is self-contained and details are not spared, so the reader should be smooth. On the other hand, if you are a professional mathematician, you may then wonder why I have undertaken this task now that the problem has been solved. The tower of Babel did not reach the sky, but it was one of the marvels of ancient times. It would be an unforgivable error to let these gems sink into oblivion. ..."

In fact, the book contains an admirable collection of old and new elementary conditions for the solutions of Fermat's equation, and though the results sometimes are very technical it is written with joy and care. Lots of historical details are added, and any section of the book has its own bibliography.

The book consists of eleven chapters, two appendices, a name index and a subject index. Five chapters present results (criteria and restrictions on solutions) on Fermat's conjecture and detailed proofs of them. (Some of this material is also mentioned or sketched out in the author's older – but more advanced – book cited above.) In particular, in the first chapter there are proofs for the exponents $n = 3, n = 4, n = 5$ and $n = 7$ of Fermat's equation, and an interesting short appendix contains a "proof" by decente infinie Fermat himself might have had in mind when he wrote his famous claim in the margin of his copy of Diophant's work. Four chapters consisting of ten so-called interludes provide auxiliary and background material (e. g., p-adic numbers) to make the reading of the book self-contained. In the tenth chapter natural modifications of Fermat's problem (mostly Fermat's concruences, using Gaussian periods) are considered, and the last chapter is an epilogue on four different subjects: the first contains the most important related results (due to Kummer, Wieferich and Faltings) which are not accessible for elementary methods, and the a-b-c-conjecture (since it is known to imply Fermat's conjecture), the second gives a brief outline of Wiles' proof of the Fermat's conjecture, the third is a guide for further study, and the fourth presents two timely email-messages by Rubin on Wiles' success. Finally, the two appendices contain references concerning the long history of wrong proofs of Fermat's conjecture resp. a general bibliography on the subject.

Again, who will read this book? If amateurs still try for an elementary proof – there is an emphatic warning by the author, of course – they first should have a close look into this book (at least, to see what is already known). Other readers perhaps like to enjoy lots of "admirable examples of ingenuity, even more remarkable considering that the arguments are strictly elementary" (from the Preface).

Erlangen G. Martens

Klingen, N., Arithmetic Similarities, Prime Decomposition and Finite Group Theory (Oxford Mathematical Monographs), Oxford University Press 1998, 275 S., £ 30.–

Das Thema des Buches ist die Theorie der algebraischen Zahlkörper mit (fast) gleichen Zerlegungsgesetzen. Während abelsche Erweiterungen algebraischer Zahlkörper auf Grund der Klassenkörpertheorie durch ihre Zerlegungsgesetze eindeutig bestimmt sind, ist das im allgemeinen nicht der Fall, wie F. Gaßmann 1926 an Hand eines Beispiels zeigte. Die diesem Beispiel zugrunde liegenden Phänomene wurden erst seit den 70er Jahren in systematischer Weise untersucht, vor allem durch die Arbeiten von W. Jehne, J. Klingen und deren Kölner Schule sowie durch R. Perlis und andere. Das vorliegende Buch ist die erste zusammenfassende Darstellung der dabei erzielten Ergebnisse.

Das erste Kapitel beinhaltet eine (auch für sich lesenswerte) Darstellung der Grundlagen aus der algebraischen Zahlentheorie. In Kapitel 2 wird der von W. Jehne begründete Begriff der Kronecker-äquivalenz algebraischer Zahlkörper eingeführt und gruppen- und darstellungs-theoretisch gedeutet. Im Kapitel 3 wird der stärkere Begriff der arithmetischen äquivalenz (völlig gleiche Zerlegungsgesetze) behandelt. Hier finden sich viele konkrete und explizite Resultate über Radikalerweiterungen und Erweiterungen mit 2-transitiver Galoisgruppe. Im 4. Kapitel wird der darstellungstheoretische Formalismus von R. Perlis zum Vergleich der Klassenzahlen arithmetisch äquivalenter Körper dargestellt und auf viele konkrete Fälle angewandt. Im Kapitel 5 werden Körper behandelt, welche nur zu sich selbst Kronecker-äquivalent sind. Das wichtigste Einzelresultat dieses Abschnitts ist der Satz von Jehne, Klingen und Saxl, wonach quadratische Zahlkörper diese Eigenschaft besitzen. Im letzten Kapitel werden Varianten des Problems besprochen: Abgeschwächte Kronecker-äquivalenz, algebraische Funktionenkörper, arithmetische äquivalenz von Algebren und isospektrale Riemann'sche Mannigfaltigkeiten.

Die meisten Untersuchungen und Resultate werden durch einführende Beispiele motiviert. Die Behandlung spezieller Körpertypen und die dabei nötigen expliziten Rechnungen nehmen einen breiten Raum ein. Es ist zu erwarten, dass vorliegendes Buch zu weiteren Forschungen auf diesem interessanten Grenzgebiet zwischen algebraischer Zahlentheorie einerseits und Gruppen- und Darstellungstheorie andererseits Anlass geben wird.

Graz F. Halter-Koch

Halter-Koch, F., Ideal Systems, An Introduction to Multiplicative Ideal Theory (Pure and Appl. Math. 211), New York u. a.: Marcel Dekker 1998, XII u. 422 S., $ 175.–

According to the author, "the purpose of this volume is to present a modern treatment of multiplicative ideal theory, valid for both rings and monoids, in the language of ideal systems on (commutative) monoids."

The first part of the book (Part A) gives an account of "abstract ideal theory" based on the concept of x-systems introduced by K. E. Aubert (Theory of x-systems, Acta Math. **107** (1962), 1–52) which the author calls weak ideal systems. What is a weak ideal system? Let H be a commutative monoid (written multiplicatively) with 0. A *weak ideal system on H* is mapping $X \to X_r$ on $\mathbb{P}(H)$, the set of subsets of H, that satisfies the following conditions for subsets $X, Y \subseteq H$ and $c \in H$: **(Id1)** $X \cup \{0\} \subseteq X_r$, **(Id2)** $X \subseteq X_r \Rightarrow X_r \subseteq Y_r$, **(Id3)** $cH \subseteq \{c\}_r$, and **(Id4)** $cX_r \subseteq (cX)_r$. If further, r satisfies **(Id4$^+$)** $cX_r = (cX)_r$, r is called an *ideal system.* Note that for an ideal system, $\{c\}_r = cH$. Ideal systems for the case where H is cancellative were introduced by P. Lorenzen (Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, Math. Z. **45**(1939), 533–553). Here X_r is called the *r-ideal generated by X* and $J \subseteq H$ is an *r-ideal* is $J = J_r$. We give several examples of weak ideal systems. Let R be a commutative ring with identity. Take H to be $(R, \cdot)$, the multiplicative monoid of R. First, for $X \subseteq R$, let d be the d-system (d for "Dedekind ideal") where $X_d = (X)$ is the ideal of R generated by X. Second, let $X_\delta = rad((X)) = \{r \in R \mid r^n \in (X)$ for some $n \geq 1\}$, the radical ideal generated by X. Here of course d is an ideal system while in general δ is only a weak ideal system since rarely is $rad(cR) = cR$. For a third ring example, let R be a $\mathbb{Z}^+$-graded ring and for $X \subseteq R$, let X_h be the homogeneous ideal of R generated by the homogeneous components of elements of X. Here $\{c\}_h = cR$ precisely when c is homogeneous. From semigroups, let H be a commutative monoid (written multiplicatively) with 0. For $X \subseteq H$, let $X_s = \cup\{xH \mid x \in X \cup \{0\}\}$. Then s is an ideal system on H.

Part A contains that portion of ideal theory which is valid for commutative rings and not necessarily cancellative monoids. Most of the results from commutative ring theory that depend heavily on the additive structure are omitted. For example, results on polynomial and power series rings are omitted as well as results depending on factor rings. (It is the reviewer's opinion that there is not a satisfactory theory of factor systems of (weak) ideal systems, the work of Aubert on additive ideal systems not withstanding.) Some of the topics included in Part A are monoid and monoid homomorphisms, the arithmetic of (weak) ideal systems, finitary and Noetherian ideal systems, quotients (localizations) of weak ideal systems, functorial properties of weak ideal systems, and primary decomposition. Part A ends by giving the Krull Intersection Theorem and Principal Ideal Theorem for a special class of Noetherian weak ideal systems. The approach follows closely the treatment of Noether lattices given by R. P. Dilworth (Abstract commutative ideal theory, Pacific J. Math. **12**(1962), 481–498).

Part B, the heart of the book, deals with the actual multiplicative ideal theory. The most important results concerning valuation domains, Prüfer domains, Mori domains, Krull domains and Dedekind domains are given. Also, according to the author "we have included some specific results for integral domains which in our opinion belong to the subject but cannot be covered in a purely multiplicative context." Here the author restricts the study to Lorenzen systems on cancellative monoids. Part B begins with the theory of factorization in cancellative monoids. Fractional r-ideals are defined and the two important fractional ideal systems, the v-system and t-system are given. We recall their definitions. Let H be a cancellative monoid with quotient group G. For $X \subseteq H$, define $X_v = \cap\{bH \mid b \in G \text{ and } X \subseteq bH\}(= (X^{-1})^{-1}$ where as usual $Y^{-1} = \{g \in G \mid gY \subseteq H\})$ and $X_t = X_{v_S} = \cup\{Y_v \mid Y$ is a finite subset of $X\}$. The notions of r-invertible ideals $((JJ^{-1})_r = H)$ and r-cancellative ideals and the r-class group (the group of fractional r-invertible r-ideals modulo the subgroup of principal fractional ideals) are studied. The notion of integral closure in ideal systems is developed. Valuations, primary, r-Prüfer, r-Bézout, Krull and weakly Krull, and (almost) Dedekind monoids are studied. Here we have as one example of the advantage of using the ideal system approach is the unified treatment of Prüfer domains (with $r = d$), Prüfer v-multiplication domains (with $r = t$) and the corresponding monoid analogs. An excellent treatment of Lorenzen monoids and quasi-divisor theories is given.

The book is well-written and free of typographical errors. It has a usable index and a good bibliography, especially for papers after about 1970. Each of the twenty-seven chapters ends with Notes which gives a guide to the literature (references for particular results are not given) and Exercises. Fairly complete solutions are given to the exercises which makes the book ideal for self-study or classroom use. The reader of the book only need be familiar with some basic concepts of commutative rings, ideals, and homomorphisms. However, to really appreciate the abstract approach, I feel that the reader would profit from some previous study of commutative ring theory, say, Kaplansky's text **Commutative Rings.** The book should become the standard reference for results on ideal systems and for star operations on integral domains. It is a worthy successor to P. Jaffard's book **Les Systèmes d'Idéaux** which also covers abstract ideal theory but from the alternate perspective of partially ordered abelian groups. In conclusion, the author has fulfilled the purpose of his book put forth in the first paragraph of the review.

Iowa City D. D. Anderson

Elias, J., Giral, J.M., Miró-Roig, R.M., Zarzuela, S. (Eds.), Six Lectures on Commutative Algebra (Progress in Math. 166), Basel u.a.: Birkhäuser 1998, 398 S., DM 128,–

Die Monographie enthält die Ausarbeitungen von sechs Vorlesungsreihen, die während der „Summer School on Commutative Algebra“ am Centre de Recerca

Matemàtica (CRM) in Bellatera vom 16.– 26. Juli, 1996 gehalten wurden. Die Beiträge, welche thematisch die neueren Entwicklungen der kommutativen Algebra weitgehend überdecken, stammen von Luchezar L. Avramov, Mark L. Green, Craig Huneke, Peter Schenzel, Giuseppe Valla und Wolmer V. Vasconcelos.

Avramov gibt eine Einführung in die Theorie der unendlichen freien Auflösungen. Dies ist umso verdienstvoller, als zu diesem Thema keine modernen Monographien existieren. Der Artikel ist mit äußerster Sorgfalt geschrieben und entwickelt die Theorie von Grund auf. Nach der Einführung differentiell graduierter Algebren werden multiplikative Strukturen auf Auflösungen behandelt und Spektralsequenzen beschrieben, die bei Ringwechseln auftreten. Ein weiteres Kapitel beschäftigt sich mit dem asymptotischen Verhalten der Betti-Zahlen eines lokalen Rings. Ein Maß dafür ist die von dem Autor selbst eingeführte Komplexität eines lokalen Rings. Weiterhin werden Golodringe, Tateauflösungen und die dadurch definierten ‚Abweichungen eines lokalen Rings' betrachtet. Die wichtigsten Sachverhalte darüber werden behandelt. Insbesondere werden vollständige Durchschnitte anhand der Abweichungen charakterisiert. Weitere Charakterisierungen vollständiger Durchschnitte mittels des Konormalenmoduls und Differentialmoduls werden ebenfalls gegeben. In den letzten Kapiteln werden schließlich noch Moduln über vollständigen Durchschnitten untersucht und die Theorie der Homotopie-Liealgebra eines lokalen Rings dargestellt. Die Vorlesungsausarbeitung behandelt insgesamt alle wichtigen Aspekte der Theorie, eignet sich daher bestens als einführende Lektüre und ist derzeit die wichtigste Referenz über unendliche freie Auflösungen.

In der zweiten Vorlesungsausarbeitung der Monographie behandelt Green generische Initialideale. Generische Initialideale erschienen schon in Arbeiten von Grauert und Hironaka, wurden aber erst von Bayer und Stillman systematisch untersucht und im kombinatorischen Kontext von Kalai. Die Ausarbeitung von Green erklärt zunächst das Konzept der Initialideale und Gröbnerbasen, präsentiert den Satz von Galligo über die Existenz generischer Initialideale und den Satz von Bayer und Stillman über die Invarianz der Regularität. Als Anwendung werden zentrale Sätze über Hilbertfunktionen hergeleitet, etwa Macaulays Theorem über das Wachstum von Hilbertfunktionen und Gotzmanns Persistence Theorem. In den letzten Kapiteln der Ausarbeitung wird die Theorie der generischen Initialideale auf das Studium von Punkten im P^2 und Kurven im P^3 angewandt, werden generische Initialideale in der äußeren Algebra betrachtet, und schließlich lexikographische generische Initialideale studiert mit Anwendungen auf partielle Elimination von Idealen. Gerade die letzten Kapitel enthalten originelle, neue Beiträge über generische Initialideale und geben viele neue Anregungen zu weiteren Untersuchungen.

Charakteristik-p-Methoden spielen in der modernen kommutativen Algebra eine zentrale Rolle. Wichtigstes Beispiel dieser Methoden ist die Tight-Closure-Theorie, die von Huneke und Hochster entwickelt wurde. In der hier vorliegenden Ausarbeitung gibt Huneke eine Einführung in die Theorie und eine Gesamtübersicht über die wichtigsten mit Tight Closure zusammenhängenden Konzepte, Anwendungen und Sätze. Dazu gehören das Briancon-Skoda-Theorem, F-Regularität, F-Reinheit, F-Rationalität und der Satz von Smith und Hara über rationale Singularitäten. Ferner wird der Beweis des Satzes über die sogenannte Plus Closure skizziert. Ein weiterer Schwerpunkt der Darstellung ist die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen dem sogenannten Strong-Vanishing-Theorem und dem Kodaira-Vanishing-Theorem. Es gibt andere Zusammenfassungen zur Tight-Closure-Theorie, auch von dem Autor selbst. Für die genannten Verschwindungssätze ist dies neben den Originalarbeiten wohl die beste Referenz.

Die nachfolgende Vortragsausarbeitung von Schenzel hat den Gebrauch der lokalen Kohomologie in der Algebra und Geometrie zum Thema. Nach einer Einführung in die lokale Kohomologie und und in die Theorie der dualisierenden Komplexe werden kohomologische Annulatoren betrachtet. Im Anschluß daran werden Grothendiecks

Endlichkeitssatz für Idealtransformierte, der Verschwindungssatz von Lichtenbaum-Hartshorne und Zusammenhangssätze hergeleitet. Der Aufsatz schließt mit einem Kapitel über lokale Kohomologie und Syzygien mit Anwendungen auf die Castelnuovo-Mumford Regularität und dem Studium von lokalen Green Moduln. Die Ausarbeitung zeichnet sich dadurch aus, daß die Beweise einiger der vorgestellten Sätze gegenüber den Beweisen in den Originalarbeiten vereinfacht und geglättet sind.

Der Aufsatz von Valla beschäftigt sich mit Hilbertfunktionen und geht vornehmlich auf offene Probleme und Vermutungen ein. Nach einer Vorstellung von Macaulays Theorem und grundlegenden Definitionen wird auf Sätze und Vermutungen über h-Vektoren eingegangen. Ein weiteres Kapitel beschäftigt sich mit der Eisenbud-Green-Harris Vermutung und diskutiert damit zusammenhängende Vermutungen und Lösungen in Spezialfällen. Danach werden Hilbertfunktionen generischer Algebren und das Warring Problem für Formen im Polynomring behandelt. Im letzten Kapitel werden Hilbertfunktionen lokaler Cohen-Macaulay Ringe untersucht. Ausgehend von Ergebnissen von Abhyankar, Northcott und Sally werden Gleichungen und Ungleichungen zwischen Hilbertkoeffizienten hergeleitet und einige offene Probleme diskutiert. Der Artikel von Valla gibt eine gute Übersicht zu den offenen Fragen über Hilbertfunktionen und gibt dem Leser viele Referenzen für weitere Nachforschungen.

Die letzte Vorlesungsausarbeitung dieser Monographie ist von Vasconcelos verfasst und behandelt kohomologische Grade graduierter Moduln. Es geht darum, Varianten der Multiplizität eines Moduls zu untersuchen. Dazu gehören etwa der arithmetische Grad eines Moduls, der von Bayer und Mumford eingeführt wurde, als auch der geometrische Grad. Es wird unter anderem gezeigt, wie sich der arithmetische Grad bei Hyperflächenschnitten verhält. Dann geht Vasconcelos auf die Reduktionszahl von Algebren und den Relationentyp ein. Schließlich wird der kohomologische Grad eines Moduls axiomatisch eingeführt und es wird gezeigt, daß ein kohomologischer Grad tatsächlich existiert, und seine wichtigsten Eigenschaften werden hergeleitet. Der Aufsatz schließt mit einem Absatz über offene Fragen. Dieser anregende Beitrag ist ein guter Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen über Gradfunktionen von Moduln.

Das Buch ergänzt die existierenden Monographien über kommutative Algebra hervorragend, da es eine gute Übersicht über die aktuellen Forschungsrichtungen dieses Arbeitsgebiets gibt.

Essen J. Herzog

Goodman, R., Wallach, N. R., Representations and Invariants of the Classical Groups (Encycl. Math. and its Appl. 68), Cambridge University Press 1998, 685 S., £ 65.–

Der Titel des Buches läßt bereits erahnen, daß Hermann Weyls Klassiker „*The Classical Groups, Their Invariants and Representations*“ (Princeton University Press, Princeton, 1939) Vorbild für dieses Buch ist. In den letzten Jahren sind zu diesem Thema mehrere Veröffentlichungen erschienen, genannt seien hier C. Procesis „*Primer in Invariant Theory*“ (Brandeis Lecture Notes 1, 1983), H. Krafts Buch „*Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*“ (Vieweg 1985), das Buch von W. Fulton und J. Harris „*Representation Theory, a First Course*“ (Springer Verlag 1991) und A. W. Knapps „*Lie Groups beyond an introduction*“ (Birkhäuser 1996).

Das Buch von Roe Goodman und Nolan Wallach konzentriert sich auf die klassischen Liegruppen GL_n, SL_n, SO_n und Sp_{2n} (über und) und ihre Liealgebren. Der Vorteil: Mit einem Minimum an Vorkenntnissen gibt das Buch dem Leser eine Einführung in die Standardmethoden der Darstellungstheorie und einen modernen Zugang zur klassischen Invariantentheorie. Viele der Aussagen und Beweise sind gültig für beliebige halbeinfache algebraische Gruppen/Liealgebren, da sie nur die übliche Sprache von Gewichten und Wurzeln benutzen. Hinweise und Referenzen findet man am Ende jeden Kapitels.

Ein kurzer Überblick über den Aufbau des Buches: Im ersten Kapitel (1) werden algebraische Gruppen als Zariski-abgeschlossene Untergruppen der GL_n vorgestellt. Die Liealgebra einer solchen Gruppe wird eingeführt sowie die Jordan-Zerlegung von Elementen der Gruppe beziehungsweise ihrer Liealgebra. Die klassischen Gruppen und ihre reellen Formen begleiten die Einführung als Beispiele.

Als nächstes (2) werden eingehend die elementaren Eigenschaften der klassischen Gruppen über den komplexen Zahlen untersucht, zum Beispiel wird gezeigt, daß die maximalem Tori zueinander konjugiert sind. Dieses Resultat ist von fundamentaler Bedeutung für die Einführung von Wurzeln, Gewichten, Weylgruppe etc. Zum Schluß wird die lineare Reduktivität der endlichdimensionalen Darstellungen bewiesen. Da die Autoren sich auf die klassischen Gruppen beschränken, ist es möglich vollständige und elementare Beweise zu geben. (Der Satz über maximale Tori zum Beispiel gilt für beliebige lineare algebraische Gruppen, die Beweise in den Büchern von Borel oder Humphreys benötigen aber die ganze Maschinerie von Fahnenvarietäten, Fixpunktsatz von Borel etc.)

Das dritte Kapitel ist der Darstellungstheorie von Algebren gewidmet: (3) Burnside-Theorem, Wedderburn-Theorie, Gruppenalgebren von endlichen Gruppen. Es folgt ein Kapitel über (4) Invariantentheorie: Der erste Fundamentalsatz wird für die klassischen Gruppen bewiesen, und als Anwendungen werden die Howe-Dualitäten und die Capelli-Identität besprochen.

Es folgen die Kapitel über die Darstellungstheorie der klassischen Gruppen: (5) Höchstgewichtstheorie (und als Anwendung ein Beweis des zweiten Fundamentalsatzes der Invariantenthorie), (6) Cliffordalgebren (Spinoren) und (7) Liealgebrenkohomologie. Als Anwendung der Kohomologietheorie wird ein algebraischer Beweis der Weylschen Charakterformel präsentiert. Alternativ wird auch ein analytische Beweis der Formel gegeben, der mehr dem ursprünglichen Beweis Weyls folgt als der algebraische, der auf Kostant zurückgeht. Es folgt ein Kapitel (8) über Zerlungsformeln für Einschränkungen von Darstellungen auf maximale reduktive Untergruppen. In den Abschnitten (9) und (10) werden Tensordarstellungen der klassischen Gruppen diskutiert, die Schur-Weyl-Dualität, Young-Tableaux, duale reduktive Paare, sowie Zusammenhänge mit der Yang-Baxter-Gleichung, den Zopfgruppen und den Jones–Polynomen.

In den letzten beiden Abschnitten kehrt das Buch zurück zum geometrischen Zugang zur Darstellungstheorie. Im Kapitel 11 werden algebraische Gruppen und ihre homogenen Räume untersucht, insbesondere die klassischen Beispiele: Fahnenmannigfaltigkeiten und symmetrische Räume. Im letzten Teil wird dann die Darstellungstheorie auf Räumen von regulären Funktionen betrachtet, und es wird unter anderem ein Beweis des Kostant-Rallis-Theorems gegeben.

Es folgt ein reichhaltiger Anhang über algebraische Geometrie, multilineare Algebra, Liealgebren und einhüllende Algebren sowie Mannigfaltigkeiten und Liegruppen.

Das Buch ist unbedingt empfehlenswert. Es bietet einen einheitlichen Zugang sowohl zu den algebraischen als auch zu den geometrischen Aspekten der Darstellungstheorie. Es ist ausgezeichnet als begleitender Text zu einer Vorlesung geeignet. Es enthält eine große Anzahl von Übungen, die Beweise werden vollständig ausgeführt und das Buch enthält viele detailliert beschriebene Beispiele.

Strasbourg P. Littelmann

R. Berndt, R. Schmidt, Elements of the Representation Theory of the Jacobi Group (Prog. in Math. 163), Basel u. a., Birkhäuser 1998, 232 S., DM 108,–

Die klassische Theorie der Modulformen wurde (vor allem von E.Hecke) als Theorie gewisser sehr spezieller holomorpher Funktionen auf der oberen Halbebene $\mathbf{H} = \{\tau = x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$ entwickelt; entsprechend standen (neben zahlentheoretischen Überlegungen) vor allem *funktionentheoretische* Methoden im Vordergrund. Erst allmählich wurde die darstellungstheoretische Seite der Modulformen erkannt; sie beruht darauf, die obere Halbebene $\mathbf{H}$ zu betrachten als homogenen Raum zur Gruppe $GL_2^+(\mathbf{R})$ mit Standgruppe $SO(2,\mathbf{R})$. Von diesem Standpunkt aus sind Modulformen aufzufassen als (glatte) Funktionen auf $GL_2^+(\mathbf{R})$, die unter einer Kongruenzuntergruppe Γ von $SL(2,\mathbf{Z})$ invariant bleiben und sich sowohl unter $SO(2,\mathbf{R})$ als auch unter dem Zentrum der universell einhüllenden Algebra mit einem Charakter transformieren. Die zuletzt genannte Bedingung ersetzt dabei die Holomorphieeigenschaft auf $\mathbf{H}$, außerdem wird eine Wachstumsbedingung gestellt, die der „Holomorphie in den Spitzen" entspricht. Es ist klar, daß in dieser Betrachtungsweise die Funktionentheorie ihren Platz räumen muß zugunsten darstellungstheoretischer Methoden der harmonischen Analysis. Will man sich schließlich noch von der Fessel einer festen Kongruenzgruppe Γ lösen, so geht man zu der Adelisierung von GL_2 über. Der soeben beschriebene Begriff einer „automorphen Form" lässt sich nicht nur für die Gruppe GL_2, sondern auch in naheliegender Weise für algebraische Gruppen (definiert über einem Zahlkörper oder einem globalen Funktionenkörper) erklären. Viele Typen klassischer Modulformen (wie die Hibertschen oder Siegelschen Modulformen, aber auch die nichtholomorphen Wellenformen von Maaß) lassen sich so begrifflich unter einen Hut bringen.

Erste Anstösse zu der oben skizzierten Entwicklung werden Gelfand und Selberg zugeschrieben; Meilensteine waren die Konferenz von Boulder [Bo] und die Bücher von Gelfand/Graev/Piateski-Shapiro [GGPS]und Jacquet/Langlands [J-L]. Heute existiert eine hochentwickelte Theorie der automorphen Formen auf reduktiven algebraischen Gruppen, siehe etwa [Corv] oder [Edinb]. Die Klasse der reduktiven Gruppen ist dadurch ausgezeichnet, daß die Levikomponenten ihrer parabolischen Untergruppen wieder reduktiv sind, dieser Typ von algebraischen Gruppen ist für Beweise, die sich der grupentheoretischen Induktion bedienen, besonders geeignet.

Wie sich Aussagen über klassische Modulformen übersetzen in darstellungstheoretische Aussagen über automorphe Formen oder automorphe Darstellungen, ist ein oft vernachlässigtes Problem (viele Autoren sind heute nur noch in einer der beiden Welten zuhause und ignorieren die andere einfach!). Eine Ausnahme bildet das verdienstvolle Buch von Gelbart [Gel], in dem der Übersetzungsmechanismus (für Gl_2) ausführlich beschrieben wird; Abschnitte mit ähnlicher Zielrichtung finden sich auch in dem neueren Buch von Bump [Bump].

Was sind nun Jacobiformen, und wie ordnen sie sich in obigen Kontext ein?

Es sind holomorphe Funktionen zweier Variabler, definiert auf $\mathbf{H} \times \mathbf{C}$, die sich unter einer arithmetischen Untergruppe der „Jacobigruppe" $G^J(\mathbf{R})$ geeignet transformieren. Die Jacobigruppe selbst ist ein semidirektes Produkt von Sl_2 mit einer dreidimensionalen Heisenberggruppe H. Solche Funktionen waren schon lange bekannt, ohne daß sie Anlaß zu einer systematischen Untersuchung gewesen wären, man denke nur an die Thetafunktionen vom Typ

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i(n^2\tau + 2nz)}$$

oder an die partiellen Fourierentwicklungen Siegelscher Modulformen; letztere spielten eine wichtige Rolle im Beweis der Saito-Kurokawa-Vermutung durch Eichler und Zagier und waren für beide dann auch der Anlaß zur Entwicklung einer systematischen Theorie der Jacobiformen, die sie in ihrem bekannten Buch [E-Z] niederlegten; dieses Buch ist funktionentheoretisch (d. h. nicht darstellungstheoretisch) orientiert.

Damit können wir (endlich) die raison d'etre des vorliegenden Buches beschreiben und damit gleichzeitig das Forschungsprogramm, das der erstgenannte Verfasser eigentlich schon seit dem Erscheinen des Buches [E-Z] verfolgt:

- Man entwickle eine darstellungstheoretische Theorie der Jacobiformen
- Die Jacobigruppe ist ein interessantes Beispiel einer nichtreduktiven algebraischen Gruppe; inwieweit lassen sich die Ergebnisse der „reduktiven" Theorie automorpher Formen übertragen bzw. wo treten neue Phänomene auf?

Im Mittelpunkt des Buches steht zum einen die (lokale) Darstellungstheorie der Jacobigruppe. Diese ist weitgehend durch die Struktur von G^J als semidirektes Produkt $Sl_2 \ltimes N$ festgelegt, wobei dann auf die bekannte Darstellungstheorie von N und Sl_2 (bzw. deren metaplektischer Überlagerung) zurückgegriffen werden kann.

Ziel ist die Klassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen über lokalen Körpern und die Konstruktion expliziter Modelle (Whittakermodell). Ausführlich werden im p-adischen Fall die sphärischen Darstellungen behandelt. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Behandlung der Heckealgebra von Interesse (deren Struktur ist viel komplizierter als man das vom reduktiven Fall her erwarten würde).

Den zweiten Schwerpunkt des Buches bilden *globale* Aspekte (Kapitel 4 und 7): Zum einen wird die Spektraltheorie des Raums $L^2(G^J(\mathbf{Z})\backslash G^J(\mathbf{R}))$ der quadratisch integrierbaren $G^J(\mathbf{Z})$-invarianten Funktionen untersucht (zumindest der Teil, der sich mit einem festen nichttrivialen zentralen Charakter transformiert). Wie nicht anders zu erwarten erhält man eine Zerlegung in einen diskreten (cuspidalen) Anteil und einen kontinuierlichen Anteil, der mittels Eisensteinreihen beschrieben werden kann. Das Ergebnis scheint ganz analog zum reduktiven Fall auszusehen, erfordert aber doch einige Sonderbetrachtungen. Im letzten Kapitel werden schließlich Jacobiformen im Kontext der Darstellungstheorie der adelisierten Jacobigruppe behandelt: Zum einen wird gezeigt, wie man einer klassischen Jacobiform (sofern sie Eigenform der Heckealgebra ist), eine irreduzible automorphe Darstellung der $G^J(\mathbf{A})$ zuordnen kann. Des weiteren wird eine Korrespondenz hergestellt zwischen den automorphen Darstellungen der $G^J(\mathbf{A})$ einerseits und genuinen automorphen Darstellungen der metaplektischen Gruppe $Mp(\mathbf{A})$ andererseits. Diese Korrespondenz ist das darstellungstheoreetische Analogon des „Shimura-Isomorphismus" der den Zusammenhang zwischen (klasischen) Jacobiformen und (vektorwertigen) Modulformen halbganzen Gewichts herstellt.

Welche systematische Rolle die Jacobigruppen im Rahmen der Theorie der automorphen Formen künftig spielen werden, scheint mir auch nach diesem Buch eine noch offene (und durchaus spannende) Frage zu sein. Ihre Nützlichkeit als beweistechnisches Hilfsmittel steht ausser Frage, das hat der Beweis der Duke-Imamoglu-Vermutung durch Ikeda [Ik] erneut eindrucksvoll gezeigt.

Das Buch ist stark von den Forschungsarbeiten der Autoren geprägt, seinem Charakter nach hätte es vielleicht besser in die Springer Lecture Notes gepasst.

Wer mit der reduktiven Theorie der automorphen Formen etwas vertraut ist (zumindest für Gl_2) oder die klassischen Jacobiformen kennt und sich für ihre darstellungstheoretische Einordnung interessiert, wird dieses Buch mit Gewinn lesen; wer (etwa als Doktorand oder Postdoktorand) nach interessanten offenen (aber anpackbaren) Fragen sucht, wird zahlreiche Anregungen finden.

[Bump] Bump, D.: Automorphic Forms and Representations. Cambridge University Press 1997

[Bo] Borel, A., Mostow, G. (Herausgeber): Algebraic Groups and Discontinous Subgroups. Proc. Symp. Pure Math. 9 AMS 1966

[Corv] Borel, A., Casselman, W. (Herausgeber): Automorphic Forms, Representations and L-functions. Proc. Symp. Pure Math. 33, AMS 1979

[Edinb] Bailey, T.N., Knapp, A.W. (Herausgeber): Representaion Theory and Automorphic Forms. Proc. Symp. Pure Math. 61. AMS 1997

[Gel] Gelbart, S.: Automorphic Forms on Adele Groups. Princeton University Press 1975

[E-Z] Eichler, M., Zagier, D.: The Theory of Jacobi Forms. Birkhäuser 1985

[GGPS] Gelfand, I., Graev, M., Piatetski-Shapiro, I.: Representation Theory and Automorphic Forms. Saunders 1968, Neusausgabe Academic Press 1990

[Ik] Ikeda, T.: On the liftting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$ Preprint 1999

[J-L] Jacquet, H., Langlands, R.: Automorphic Forms on $GL(2)$. Springer 1970

S. Böcherer

Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.-F., Real Algebraic Geometry (Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete 36), Berlin u. a., Springer, 1998, 430 S., DM 189,–

1987 erschien *Géométrie algébrique réelle* von denselben Autoren. Es war dies damals das erste (und für einige Jahre auch das einzige) der reellen algebraischen Geometrie gewidmete Werk. Das Gebiet hat seit den späten siebziger Jahren einen erheblichen Zuwachs an Interesse und Aktivität erfahren. Seit seinem Erscheinen galt das Buch generell als die Standardreferenz in der reellen algebraischen Geometrie, auch nachdem in den folgenden Jahren einige andere Bücher auf diesem Gebiet erschienen waren.

Nun haben die Autoren ihr Buch ins Englische übersetzt und dabei auch den Inhalt einer Revision unterzogen. Herausgekommen ist der hier zu besprechende Band.

Die Grundstruktur des französischen Originals hat sich nicht geändert. Insbesondere wurden keine neuen Themen aufgenommen, die Neuerungen liegen eher im Detail. Die ersten Kapitel (Kap. 1–5 und 7) stellen die Grundlagen dar: Angeordnete und reell abgeschlossene Körper, semialgebraische Mengen, reelle algebraische Varietäten, einiges an reeller Algebra, Tarski-Seidenberg Prinzip, reelles Spektrum. Hier wurde kaum etwas verändert. Zu den Grundlagen gehört auch der erst als Kap. 10 erscheinende Teil über reelle Stellen und Bewertungen. Im französischen Original hat man hier noch den wichtigen Begriff des Fächers vermißt; diese Lücke ist nun durch Einfügung eines neuen Abschnitts (10.4) geschlossen worden. Die früher in 10.4 enthaltene birationale Beschreibung der Zusammenhangskomponenten einer regulären kompakten irreduziblen reell-algebraischen Menge wurde herausgenommen; dafür findet sich jetzt in 3.4 ein geometrischer Beweis für die birationale Invarianz der Zahl der Zusammenhangskomponenten.

Kap. 6 („Hilbert's 17th problem. Quadratic forms") ist um einen neuen Abschnitt (6.5) ergänzt worden, der die aus dem Jahr 1988 stammenden Resultate über minimale Beschreibung von basisch-offenen semialgebraischen Mengen enthält. Die Darstellung folgt im wesentlichen dem Zugang von Mahé. Den entsprechenden Satz über basisch-abgeschlossene Mengen findet man in 10.4. Dafür entfiel Abschnitt 7.7 der alten Fassung, wo der damalige Stand der Kenntnisse dargestellt war. Wer tiefer in solche Fragen und die einschlägigen Techniken einsteigen möchte, sei auf das Buch *Constructible Sets in Real Geometry* (Andradas, Bröcker, Ruiz, Springer 1996) hingewiesen.

Jeweils ein neuer Abschnitt findet sich auch in Kap. 8 („Nash functions"), über Familien von Nashfunktionen (8.10; Teile davon waren früher in 9.6 enthalten), und in Kap. 9 („Stratifications"), über die Triangulierbarkeit von semialgebraischen R-wertigen Funktionen, und über Endlichkeitssätze für den topologischen Typ von parameterabhängigen semialgebraischen Funktionen (9.4). Die attraktiven neueren Ergebnisse von Coste-

Ruiz-Shiota für kompakte Nashmannigfaltigkeiten (Trennung analytischer Komponenten, Fortsetzungssatz etc.) werden leider nicht dargestellt, und hätten wohl auch tatsächlich den Rahmen des Buches gesprengt.

In den Kapiteln 11–13 werden behandelt Topologie reeller algebraischer Varietäten (Homologie, Fundamentalklasse), Vektorbündel, und Abbildungen mit Werten in Sphären. Hier sind einige Abschnitte um zwischenzeitlich gefundene Resultate expandiert worden. So etwa 11.3, um Ergebnisse über algebraische Modelle kompakter Mannigfaltigkeiten mit vorgeschriebenem $H^1_{\mathrm{alg}}(V, \mathbb{Z}/2)$, oder auch 12.5 (algebraische Vektorbündel über Kurven und Flächen) und 13.3 (Approximation differenzierbarer Abbildungen nach S^1 oder S^2 durch algebraische). Die beiden letzten Kapitel (14, „Algebraic models of C^∞ manifolds", und 15, „Witt rings in real algebraic geometry") haben sich nicht wesentlich verändert.

Wie schon das französische Original, so ist auch die englische Version sehr sorgfältig verfaßt. Beim Vergleich zwischen beiden stößt man immer wieder auf Stellen, wo der ursprüngliche Text nicht nur einfach übersetzt, sondern im Interesse einer noch klareren Darstellung auch neu konzipiert worden ist. Kein Zweifel, daß die neue Fassung auch weiterhin die Rolle einer Standardreferenz spielen wird. Dennoch erhebt sie nicht den Anspruch, alle der reellen algebraischen Geometrie zuzurechnenden oder verwandten Gebiete darzustellen. Diese Beschränkung ist richtig, sonst müßte man bei einer reinen Aufzählung enden, die kaum mehr in die Tiefe ginge. Die (unvollständige) Liste von nicht erfaßten Gebieten enthält etwa die reell-analytische und semianalytische Geometrie, oder auch die vielfältigen und interessanten Ergebnisse und Methoden im Umkreis des 16. Hilbertschen Problems, die vor allem der russischen Schule zuzurechnen sind; letztere werden kaum mehr als berührt (in 11.6). Algorithmik und Komplexitätstheorie der reellen Geometrie sind zu sehr aktiven Gebieten mit wichtigen Anwendungen geworden, bleiben aber ganz ausgespart. Viele dieser Anwendungen haben ihre Wurzeln in theoretischen Grundlagen, die im vorliegenden Buch vermittelt werden.

Endete in der Originalfassung die Einleitung noch mit den Worten „La géométrie algébrique réelle n'en est encore qu'à ses débuts", so heißt es an derselben Stelle nunmehr: „Real algebraic geometry is still in its infancy". Man darf gespannt sein, wie das Kind sich weiter entwickeln wird.

Duisburg C. Scheiderer

Kulikov, V. S., Mixed Hodge Structures and Singularities, Cambridge University Press 1998, 186 S., £ 30.–

Singularitätentheorie ist ein Gebiet in der Mathematik, das Beziehungen zu vielen verschiedenen anderen Bereichen der Mathematik besitzt und diese miteinander verbindet. Z.B. Algebra und Algebraische Geometrie, Analysis und komplex analytische Geometrie, Topologie und differenzierbare Mannigfaltigkeiten, ..., bis hin zur theoretischen Physik.

Das vorliegende Buch ist ausschließlich dem komplex-analytischen Teil gewidmet und hat sich als Ziel gesetzt, einen Einblick in und Überblick über den Zusammenhang zwischen Singularitäten und gemischten Hodge-Strukturen zu geben.

Die Theorie der gemischten Hodge-Strukturen ist in der globalen algebraischen Geometrie entwickelt worden und beruht weitgehend auf Arbeiten von Deligne. Gemischte Hodge-Strukturen erscheinen heute als Verallgemeinerungen von reinen Hodge-Strukturen, die um 1930 von Hodge für kompakte, projektive Mannigfaltigkeiten (allgemeiner Kähler-Mannigfaltigkeiten) eingeführt wurden. Gemischte Hodge-Strukturen treten bei nicht-kompakten bzw. singulären algebraischen Varietäten auf.

Ein zentrales Problem ist die Variation der gemischten Hodge-Strukturen in einer Familie algebraischer Varietäten und das Studium der sogenannten Periodenabbildung, einer beeindruckenden Verallgemeinerung der Periodenintegrale algebraischer Funktionen, die von Abel und Jacobi studiert wurden. Die grundlegenden Untersuchungen, immer noch im globalen algebraischen Kontext, gehen auf Griffiths und Schmidt zurück.

Alle diese Ideen und Begriffe sind erfolgreich auf die lokale Situation übertragen worden und zwar auf den Fall der isolierten Singularität eines holomorphen Funktionskeims $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ übertragen worden, im wesentlichen durch die Arbeiten von Steenbrink, Varchenko und Scherk.

Wie in der globalen Situation ist der Ausgangspunkt, daß sich die Kohomologie einer komplexen Mannigfaltigkeit durch die (Hyper-)Kohomologie des Komplexes der holomorphen Differentialformen beschreiben läßt. Insofern ist die Theorie der gemischten Hodge-Strukturen eine Theorie der Differentialformen auf Varietäten bzw. Singularitäten. Die Einführung von Differentialformen bei Singularitäten und die Untersuchung des Gauß-Manin-Zusammenhangs für diese geht auf eine Arbeit von Brieskorn aus dem Jahr 1970 zurück. Brieskorns Untersuchungen wurden später in atemberaubender Weise von M. Saito mit einem gewaltigen Theorie-Überbau mittels D-Moduln verallgemeinert.

Arbeiten von Varchenko, Steenbrink, Scherk, K. und M. Saito und neuerdings Hertling haben gezeigt, daß die gemischten Hodge-Strukturen zu den feinsten und aussagekräftigsten Invarianten von Singularitäten gehören, allerdings auch zu den schwierigsten.

Valentin Kulikov hat sich in dem zu besprechenden Buch das Ziel gesetzt, die Hauptentwicklungslinie bei gemischten Hodge-Strukturen und Singularitäten mit den wichtigsten Definitionen und Sätzen in mehr oder weniger historisch-chronologischer Reihenfolge und möglichst konkret nachzuzeichnen.

Das Buch ist in drei Kapitel gegliedert:

I The Gauss-Manin connection (mit 10 Unterkapiteln, die wieder untergliedert sind).
II Limit mixed Hodge structure on the vanishing cohomology of an isolated hypersurface singularity (mit 8 untergliederten Unterkapiteln).
III The period map of a μ-const deformation of an isolated hypersurface singularity associated with Brieskorn lattices and MHS's (mit 5 untergliederten Unterkapiteln).

Damit gelingt es dem Autor, auf 186 Seiten alle wesentlichen Entwicklungen zu dem Thema darzustellen, mit Ausnahme von M. Saitos gemischten Hodge-Moduln.

So findet man im Kapitel I eine leserfreundliche Einführung in die Milnor-Faserung und Picard-Lefschetz-Monodromie, relative Differentialformen und Zusammenhänge, Gauß-Manin-Zusammenhang und Brieskorn-Gitter, regular-singuläre Differentialgleichungen und den Monodromiesatz.

In Kapitel II werden die Deligne-Schmidt sowie die Griffiths-Deligne-Theorien der gemischten Hodge-Strukturen und ihrer Variation eingeführt, die Konstruktion von Varchenko, Steenbrink und Steenbrink/Scherk für isolierte Singularitäten dargestellt sowie die Theorie des Spektrums einer isolierten und nicht-isolierten Hyperflächensingularität behandelt.

In Kapitel III geht es um die Periodenabbildung einer isolierten Hyperflächensingularität sowie (infinitesimale) Torelli-Sätze für spezielle Singularitäten, bis hin zu neuen Invarianten von Hertling.

In allen Kapiteln werden sämtliche Definitionen und alle wichtigsten Sätze sehr sorgfältig formuliert und referenziert.

Es ist klar, daß sich dies alles auf den wenigen Seiten nur unter Verzicht auf Beweise und Beispiele darstellen läßt. Die Beweise kann man in der angegebenen Originalliteratur nachlesen. Das Fehlen von Beispielen wird es demjenigen, der mit der Theorie nicht wenigstens etwas vertraut ist, schwierig machen, nach diesem Buch zu lernen. Es ist also kein Buch, das man ohne weiteres in Seminaren verwenden kann.

Für den Experten wie für den Halb-Experten ist das Buch aber sehr verdienstvoll. Es gibt eine sehr gut gegliederte Übersicht über ein schwieriges, wichtiges und bisher nur in verstreuten Originalarbeiten zugängliches Gebiet der Singularitätentheorie. Insofern ist es mehr als nur ein ziemlich vollständiges Nachschlagewerk, als daß es gut genutzt werden kann. Auch wenn das Buch nicht allein als Seminargrundlage gewählt werden kann, ist es doch sehr gut geeignet als Leitfaden für die Auswahl von Seminarvorträgen zu dem Thema.

Da es nicht durch unverdauliche Theorie überfrachtet ist, bleibt zu hoffen, daß das Buch mit dazu beiträgt, die interessante und spannende Theorie der gemischten Hodge-Strukturen von Singularitäten weiter zu verbreiten.

Kaiserslautern G.-M. Greuel

Milnor, J., Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures, Wiesbaden: Vieweg 1999, vii + 257 S., DM 49,80

Dies ist fern von meinem Gebiet, doch die Anziehung von Milnor überwog: ich verdanke ihm, wie viele meines Faches, wesentliche Teile meiner mathematischen Ausbildung – durch seine Bücher. Eigentlich sind diese ja gar nicht Bücher zu nennen, sie haben meist die eher flüchtige Form von Lecture Notes. Die Differentialtopologie, vor mehr als vierzig Jahren erschienen, besitze ich in einem zerfallenden Geheft von Fotos, und dies war die Grundlage für alle folgenden Lehrbücher. Milnor hat die Form der Lecture Notes zu unnachahmlicher Kunst erhoben. Man liest so gerne was er schreibt, weil man erfährt, was man schon längst wissen wollte, und weil man erstaunt feststellt, dass man es alles versteht.

So habe ich mich getraut, über dieses Buch, oder eben auch recht gesagt: über diese Lecture Notes zu berichten. Was Milnor an Kenntnissen voraussetzt ist schnell gesagt: Differentialrechnung aus den Anfängervorlesungen, Funktionentheorie wie sie in jedem einführenden Lehrbuch steht, etwas Übung mit Argumenten der mengentheoretischen Topologie, und das Grundlegende über Überlagerungen und die Fundamentalgruppe, besonders von Flächen. Der Uniformisierungssatz, dass es bis auf Isomorphie nur drei einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen gibt, nämlich die Riemannsphäre, die komplexe Halbebene und $\mathbb{C}$, wird vorausgesetzt. Und damit geht es los.

Und es geht wunderbar. Das Buch hat 19 Abschnitte, ein jeder etwas über 10 Seiten lang. Ich konnte etwa drei Wochen bis zum Beginn der Vorlesungen daran wenden, und nie waren drei Wochen besser angelegt. Mit jedem Tag, mit jedem Abschnitt, eröffnet sich etwas Neues, und nicht irgendetwas, sondern eben was jetzt am Platze ist. Und nie wird das reine Vergnügen, das Vergnügen nämlich an reiner Mathematik, durch Werbespots unterbrochen. Man findet nichteinmal didaktische Ermunterung oder motivierende Hinweise, die man aber auch gar nicht vermisst, weil man ohnehin nie zweifelt, dass es gut wäre, das jetzt zu verstehen, was der Autor eben erklärt.

Zunächst wird der Uniformisierungssatz eingehender erklärt durch Beschreibung der Automorphismengruppen der drei einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen. Das weiß man wohl meistens aus den Anfängervorlesungen, man fängt nur meistens nichts damit an. Wichtig und später das A und Ω vieler Argumente ist der hyperbolische Fall, also Riemannsche Flächen, deren universelle Überlagerung die Halbebene (oder der Einheitskreis) ist. Diesem sind die Abschnitte 2, 3 und, nach Eröffnung des Themas, der Dynamik iterierter holomorpher Abbildungen, auch Abschnitt 5 gewidmet. Die hyperbolische Geometrie ist ja nicht ein Endziel und Gegenbeispiel gegen Vorurteile vergangener Philosophen, sondern vielmehr der Anfang und das beherrschende Werkzeug zum Studium der Flächen und ihrer holomorphen (aber auch topologischen) Abbildungen. Eine holomorphe Abbildung hyperbolischer Riemannscher Flächen kontrahiert (Satz von Pick), eine holomorphe Familie zwischen hyperbolischen Flächen ist normal (Satz von Montel). Ist $S \subset S'$ eine Inklusion hyperbolischer Flächen, so kann man ε-Kugeln in S auch in der Metrik von S'vermessen. Wichtig ist eine erste Aussage des Typs, dass diese Kugeln in der S'-Metrik auf einen Punkt zusammenschrumpfen, wenn man sich einem Punkt $p \in \partial S \subset S'$ nähert.

In § 5 beginnt es mit dem eigentlichen Thema: Iterierte holomorphe Abbildungen, also Familien $\{f^{\circ n} : S \to S \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vor allem geht es in diesem Buch um das Studium der Dynamik rationaler Abbildungen der Riemann-Sphäre. Die Fatou-Menge ist die maximale offene Menge, auf der die Familie $\{f^{\circ n}\}$ lokal normal ist. Das Komplement ist die Julia-Menge. Beide Mengen sind unter f invariant. Das gibt der Julia-Menge ihr fast überall im Kleinen selbstähnliches Aussehen. Wir lernen, warum Julia-Mengen, wenn nicht jeder Punkt dazugehört, ein spiralig-krauses Aussehen haben und entweder zusammenhängen oder in überabzählbar viele Komponenten zerfallen.

Hier ist ein Wort zu den Figuren und Illustrationen am Platze: Auch sie haben sehr zu meinem Gefallen an dem Buch beigetragen. Das Urteil mag verwundern, wenn man nur flüchtig darin blättert: Die Auflösung des Druckers für die Vorlage ist nicht besonders fein, und für einen Diavortrag vor Laien oder Dekoration eines Bankgebäudes findet man hier keine geeigneten Vorlagen, nichtmal etwas Farbiges. Die Schönheit ist nicht plakativ sondern sie zeigt sich darin, dass man, wie Kenntnis und mathematisches Verständnis zunehmen, auch immer mehr in den errechneten Bildern erkennt.

Die Dynamik im hyperbolischen Fall (§ 5) erweist sich als sehr einfach, ist aber grundlegend für das Folgende, weil ja eine offene Teilmenge der Riemannsphäre, der mindestens drei Punkte fehlen, hyperbolisch ist. In dem flachen (euklidischen) Fall (§ 6) ist der Torus schnell erledigt, während die anderen Fälle, also transzendente Funktionen, nur vorgestellt aber nicht weiter behandelt werden.

Mit 8 beginnt das Studium der lokalen Struktur der Fixpunkte einer holomorphen Abbildung. Hier werden die Linearisierungssätze von Koenigs (§ 8) und Böttcher (§ 9) vorgestellt und bewiesen, in § 10 wird der parabolische Fall behandelt und in § 11 geht es um den Fall, dass das Differential von f am Fixpunkt den Betrag 1 hat aber keine Einheitswurzel ist. Hier stößt man an eine klassische Wegscheide, markiert durch den Satz über Nicht-Linearisierung von Cremer und den Linearisierungssatz von Siegel, geschieden durch eine Bedingung diophantischer Approximation für das Differential am Fixpunkt. Der Siegelsche Satz wird nicht bewiesen, aber in aufklärender Weise durch seine Beziehung zum Transzendenzsatz von Liouville und zu Kettenbruchentwicklungen erläutert.

Die Abschnitte 12 bis 14 erklären globale Aussagen über Fixpunkte und periodische Orbits: Nur endlich viele Zykel einer rationalen Abbildung sind attrahierend oder indifferent, die abstoßenden Zykel hingegen liegen dicht in der Julia-Menge. Die Abschnitte 15 und 16 beschreiben Sullivans Klassifikation der Fatou-Komponenten. Hier sind die Beweise nicht vollständig und teils in den Anhang verwiesen, wo denn als gewichtige analytische Zutat der messbare Riemannsche Abbildungssatz von Morrey, Ahlfors und Bers benutzt wird.

Unmittelbar zugänglich ist hingegen § 17, der das Randverhalten der Riemannschen Abbildung beschreibt: Carathéodorys Theorie der Enden. Ich wüsste übrigens auch keine bessere Quelle für die hier mit enthaltenen rein topologischen Aussagen, etwa den Satz von Jordan-Schönflies in der Ebene, als eben diesen Zugang über die Funktionentheorie. Autoren von Lehrbüchern der Funktionentheorie kann man nur empfehlen, sich hier zu versorgen. In dem vorliegenden Buch dient dies als Vorbereitung zum Studium der Dynamik polynomialer Abbildungen mit zusammenhängender Juliamenge in § 18....

Das soll als Skizze des Inhalts genügen (und fragmentarisch bleiben). Besser, Sie lesen selbst in dem Buch oder, wie ich: Sie kündigen nach der Funktionentheorie I sogleich eine Funktionentheorie II an, in der Sie vertrauensvoll diesem Buch von Milnor folgen. Es wird Sie nie unversehens im Regen stehen lassen. Sogar für sehr aufklärende und – wie meine Studenten das nennen – faire Aufgaben ist gesorgt. Das Register ist zwar kurz, hat mich aber nie verlassen. Das Stichwort Chaos kommt nicht vor.

Regensburg Th. Bröcker

D. Pumplün, Elemente der Kategorientheorie, Heidelberg u. a.: Spektrum Akademischer Verlag, 1999, 311 S., DM 48,–

Ein Handbuch der elementaren Kategorientheorie, – so sieht der Autor dieses Werk, und das ist es auch – ein ausführliches und sehr sorgfältig geschriebenes Einführungswerk. Wer immer genauere Eigenschaften von kategorietheoretischen Grundbegriffen, von Monomorphismen, von Pushouts, von darstellbaren Funktoren oder vom Yoneda Lemma nachschlagen möchte, wird in diesem Buch fündig werden. Für den Anfänger schwierige Begriffe werden ausführlich diskutiert. Viele Beispiele aus Topologie und Algebra werden herangezogen, und das Buch ist eine Fundgrube für interessante Aufgaben. Für den mit der Kategorientheorie erstmals konfrontierten Studenten sind zunächst mengentheoretische Kuriositäten attraktiv. Das Buch baut auf der Mengenlehre nach von-Neumann-Bernays-Gödel auf, auf dem Unterschied zwischen Mengen und Klassen, und verwendet ein Auswahlaxiom für Klassen, Folgerung aus einem Wohlordnungssatz für Klassen, mit dem die Schwierigkeiten bei Funktorkategorien oder bei natürlichen Transformationen geschickt umschifft werden können.

Die Definition einer Kategorie klingt zunächst etwas ungewöhnlich und abseits von den üblichen Anwendungen. Sie wird definiert als eine Klasse $\mathbf{K}$ zusammen mit einer partiell definierten assoziativen Multiplikation mit Einheiten. Es werden also nur Morphismen in der Definition vorausgesetzt. Objekte entstehen aus den geforderten Einheiten. Es wird allerdings bald gezeigt, daß diese Definiton mit der üblichen Definition einer Kategorie mit Objekten und Morphismen äquivalent ist. Mit der hier gewählten Definition hat es der Autor jedoch nur mit einer einzigen Klasse zu tun, der Klasse der Morphismen. Das erleichtert die Anwendung der mengentheoretischen Hilfsmittel. Bei der Definition von Funktoren schlägt diese Definition wieder durch in der Vorgabe nur einer Abbildung $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ zwischen den beiden Klassen von Morphismen. Die Objekte oder Einheiten müssen natürlich vom Funktor erhalten bleiben. Die ersten fast 50 Seiten des Buches sind so einer sehr durchdachten und behutsamen Einführung von Kategorien, Unterkategorien und Funktoren gewidmet. Die vielleicht wichtigsten Grundobjekte der Kategorientheorie, die natürlichen Transformationen, werden erst im dritten Kapitel eingeführt. Vorher werden Monomorphismen, Epimorphismen, spezielle Typen von solchen Morphismen und gewisse interessante Objekte eingeführt und studiert.

Mit der Behandlung der natürlichen Transformationen verfolgt der Autor weiterhin sein Prinzip, möglichst alle Begriffe nur auf der Klasse der Morphismen einer Kategorie zu behandeln. Er zeigt, daß eine natürliche Transformation ebenfalls als eine Abbildung $\alpha : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ auf der Klasse der Morphismen einer Kategorie aufgefaßt werden kann. Dadurch können zwei Verknüpfungen von natürlichen Transformationen, ein $\circ$-Produkt und ein „gewöhnliches" Produkt definiert werden, und es kann ein einziges Distributivgesetz abgeleitet werden, das die häufig nach Godement benannten Regeln der Komposition mit Funktoren als Spezialfall umfaßt. Es folgen in diesem Kapitel kleine Kategorien, Diagrammkategorien und Funktorkategorien, darstellbare Funktoren und das Yoneda Lemma.

Auch bei der Einführung von Limiten zeigt sich das didaktische Geschick des Autors. Zunächst werden wiederum die einfachen Fälle, Produkte, Egalisatoren, Pullbacks und Kernpaare und ihre dualen Begriffe (im 4. Kapitel) eingeführt, ehe die allgemeinen Limiten mit vielen ihrer Eigenschaften und ihrem Zusammenspiel mit Funktoren (im 5. Kapitel) untersucht werden. Schließlich werden adjungierte Funktoren, ihr Verhalten gegenüber Limiten und ihre Übersetzung in universelle Probleme diskutiert. Es werden einige Existenzsätze hergeleitet, reflexive Unterkategorien studiert und schließlich der Spezialfall von adjungierten Dreiecken betrachtet. Hier enden die Grundbegriffe der Kategorientheorie, denen das Buch gewidmet ist.

Es fehlen viele wichtige weiterführende Begriffe, die der Leser an anderen Stellen in der Literatur aufsuchen muß, so etwa additive und abelsche Kategorien, die Diskussion von Monaden (oder Tripeln) im Zusammenhang mit adjungierten Funktoren und mit den ihnen zugeordneten Algebren, Kan-Erweiterungen, Komma-Kategorien, monoidale und symmetrische monoidale Kategorien und die höherdimensionale Kategorientheorie, die heute noch stark in der Entwicklung begriffen ist. Ebenso fehlen tiefere Verbindungen mit der homologischen Algebra sowie mit der algebraischen Topologie.

Das Buch enthält erstaunlich wenige Druckfehler. Und auch sie wären durch Anwendung eines automatischen Korrekturprogramms wohl noch vermeidbar gewesen. Sie sind aber eher amüsamt als entstellend, wie etwa Transforamtionen oder Linksdadjungierte. Den Index hätte man sich etwas vollständiger gewünscht, es gibt z. B. durchaus den Begriff der Doppelkategorie auf Seite 98, aber dieser wie auch einige andere interessante Begriffe sind im Index nicht zu finden.

Insgesamt ist es dem Autor jedoch gelungen ein sehr lesbares und ansprechendes Einführungswerk vorzulegen, das so mancher Mathematikstudent, aber auch der Fachwissenschaftler mit Gewinn in seiner eigenen Arbeit verwenden wird.

München B. Pareigis

Zong, C., Sphere Packings. Berlin u. a.: Springer 1999, 241 S., DM 79,–

Der erste Satz des Vorwortes kann als das Motto des Buches gelten: „Sphere Pakkings is one of the most fascinating and challenging subjects in mathematics".

Es ist der Gegensatz zwischen direkter geometrischer Anschauung einerseits und der Tiefe der Probleme andererseits, der die Faszination und den Reiz dieses Gebietes ausmacht. Starke Hilfsmittel aus Gruppentheorie, Zahlentheorie, Analysis etc. werden benötigt. Hinzu kommen klassische Anwendungen wie der Aufbau der festen Materie (Gitter, Kristalle) und neuere wie Kodierungstheorie.

In den 13 Kapiteln des Buches werden u. a. behandelt: Obere und untere Schranken für die Kugelpackungsdichte, darunter die Sätze von Minkowski-Hlawka, Blichfeldt, Rogers und Kabatjanski-Levenstein sowie Siegels Mittelwert-Formel. Weiterhin Reduktionstheorie sowie Kugelpackungen mit Hilfe von Codes (nach Leech und Sloane), Mehrfach-Packungen, Blocking Light Rays (Sichtbehinderungen), Löcher in Packungen und finite Kugelpackungen, darunter ein Teilbeweis von Fejes Toths Wurstvermutung sowie Schranken zur Wurstkatastrophe.

Der Autor versteht es geschickt, die wesentlichen Aspekte der Kugelpackungen herauszuarbeiten, und das auf nur 240 Seiten (incl. Literatur mit Index). Dabei werden die meisten wichtigen Sätze bewiesen. Nur wenn Tiefgang und technischer Aufwand bei einigen Beweisen zu umfangreich werden und den Aufbau des Buches zu sehr stören würden, wird nur die Idee skizziert und auf die Originalliteratur verwiesen. Das gilt natürlich auch für Tom Hales' Beweis der berühmten Kepler-(Hilbert)-Vermutung, wobei Ch. Zong sowohl Hales' Ansatz skizziert als auch den von Hsiang. Hsiangs umstrittener Beweis gilt als lückenhaft und derzeit nicht reparabel; aber auch Hales' Beweis ist wegen der vielen computer-gestützten Fälle nur bedingt nachvollziehbar. Insofern sind Ch. Zongs Beweisskizzen durchaus hilfreich.

Ein Schwerpunkt des Buches sind Verallgemeinerungen des klassischen Newton-Gregory-Problems („Wieviele Kugeln können eine gegebene Kugel berühren?"). Zu diesem Gebiet hat der Autor selbst Wesentliches beigetragen, und so ist es verständlich, daß in 5 der 13 Kapitel dieses Thema behandelt wird, aber nicht als Selbstzweck, sondern immer elegant mit dem Hauptthema der dichtesten Kugelpackungen verknüpft. Angenehme Ergänzungen zu Sätzen und Beweisen sind Kurzbiographien der bedeutendsten Forscher auf diesem Gebiet, die die historische Entwicklung des Gebietes beleuchten.

Ch. Zongs Buch muß sich neben starker Konkurrenz behaupten, die er auch selbst im Vorwort aufzählt. Erwähnt seien vor allem die beiden eher enzyklopädischen Werke von Conway und Sloane sowie Gruber und Lekkerkerker, von denen das erste stark in Richtung Codes und Gruppen abhebt und das zweite die Geometrie der Zahlen allgemein behandelt und beide daher eine andere Zielsetzung als das vorliegende Buch haben.

Von den kleineren Büchern sei vor allem C. A. Rogers' zeitloses Büchlein „Pakking and Covering" von 1964 erwähnt, das aber, wie schon der Titel indirekt verrät, hauptsächlich allgemeine konvexe Körper und deren Packungs- und Überdeckungseigenschaften untersucht. Dies gilt ähnlich für L. Fejes Toths Springer Buch von 1971, das vor allem eine ausgezeichnete Problemsammlung für niederdimensionale Packungen und Überdeckungen ist. Unter diesen illustren Nachbarn und Konkurrenten behauptet sich Ch. Zongs Buch durch seine eigenständige Thematik sowie durch eigene Akzente und den insgesamt übersichtlichen Aufbau. Das Buch zu lesen, macht Spaß. Es ist daher nicht nur für die Forschung, sondern insbesondere auch für Seminare und Spezialvorlesungen sehr gut geeignet.

Siegen J. M. Wills

Frederikson, G. N., Dissections: Plane and Fancy, Cambridge University Press 1998, 310 + XI S., £ 19.95

Das englische Wort ‚dissection' im Titel dieses Buches würde ich mit ‚Zerlegung' übersetzen. Es handelt sich um Zerlegungen von (meist ebenen) Figuren in Teilfiguren. Das wesentliche ist dabei, daß sich diese Teilfiguren auf andere Weise wieder zusammen setzen lassen, um eine neue Figur zu ergeben. Ein klassisches Beispiel dafür ist der Beweis des Pythagoras durch Zerlegung der beiden Quadrate mit den Kantenlängen a und b, und Zusammensetzung der Einzelteile zum Quadrat der Kantenlänge c.

Das Buch gibt Beispiele für solche Zerlegungen, und Methoden zu deren Konstruktion. Der Autor sieht einen Zusammenhang mit Mathematik vor allem darin, daß das Verfahren ‚exakt' sein muß. Sonst kommen in dem Buch an Mathematik eigentlich nur noch die Parkettierungen der Ebene durch (mehr oder weniger) reguläre Polygone und die Kenntnis der Kantenlängen regulärer Polygone vor. Damit fällt das Buch in die Kategorie ‚Recreational Mathematics', die im angelsächsischen Sprachraum viel populärer zu sein scheint, als bei uns. Weitaus die Mehrzahl der Quellen und Referenzen stammen auch von englischsprachigen Autoren.

Die allgemeine mathematische Theorie wird nur kurz gestreift (auf p. 3, unten): In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde der Satz von Bolyai-Gerwien bewiesen: Gegeben zwei ebene Figuren gleicher Fläche, die von geraden Linien begrenzt werden, so gibt es eine Zerlegung der einen Figur, deren Teile man zur anderen Figur zusammensetzen kann. Im Jahr 1900 stellte Hilbert das Problem (Nummer drei seiner berühmten Liste), zu zeigen, daß das räumliche Analogon dieser Tatsache falsch ist. Wenige Monate später wurde das von Dehn erledigt.

Nachdem also eine Zerlegung zu zwei Figuren gleicher Fläche immer existiert, bleibt die Frage nach der Zerlegung mit den wenigsten Teilstücken, oder nach der schönsten, oder der symmetrischsten. Oder nach Zerlegungen ohne Umklappen, oder unter ausschließlicher Verwendung von Translationen der Teilfiguren, oder ausschließlich von Rotationen.

In diesem Sinn werden eine Vielfalt von Figuren behandelt: Dreiecke, Vierecke, reguläre Polygone (mit bis zu 16 Ecken), reguläre Sterne, verschiedene Sorten von Kreuzen (griechisches, lateinisches, Lothringer, Malteser-Kreuz) und sogar krummlinig begrenzte Figuren. Auch dreidimensionale Figuren werden zerlegt.

Das Buch hat den Charakter eines Lexikons. Es ist zwar systematisch gegliedert, aber ein Haupt-Ziel ist doch eine gewisse Vollständigkeit im Erfassen der bekannten Beispiele, und aller bekannten Quellen. Großen Wert legt der Verfasser darauf, den ersten Entdecker einer interessanten Zerlegung oder Konstruktionsmethode auszumachen. Für einige der produktivsten Autoren in diesem Gebiet werden auch die Lebensgeschichten kurz skizziert. Es gibt Verweise zu griechischen, arabischen und chinesischen Mathematikern.

So ist das Buch eine systematische Zusammenstellung geometrischer Puzzles. Es dürfte von unschätzbarem Wert für jeden sein, der sich für diese Art von Puzzle interessiert. Ich kann nicht von mir sagen, daß ich dazu gehöre. Aber auch auf mich übt das Buch einen starken Reiz aus. Wahrscheinlich wegen seiner Einzigartigkeit (soweit ich weiß) und der Konsequenz und der Systematik, mit der hier Zerlegungen aufgeführt werden. Es gibt Einblick in eine mir bisher fremde Welt von (meist) Amateur-Mathematikern. So hat das Buch weniger mit Mathematik, mehr mit Kultur zu tun.

Erlangen W. Barth

Hallinan, P.L., Gordon, G.G., Yuille, A.L., Giblin, P., Mumford, D., Two- and Three-dimensional Patterns of the Face, Natick, Massachusetts: A.K. Peters 1999, 262 S., $ 48,–

Das menschliche Gesicht spielt für uns eine wesentliche Rolle: Wir sind imstande, Personen anhand ihres Gesichtes wiederzuerkennen, beispielsweise durch die „Paßbilder" in Lichtbildausweisen, wir können aber auch – mehr oder weniger erfolgreich – von Gesichtern Emotionen ablesen. Der Nutzen einer Automatisierung dieses Erkennungsprozesses liegt auf der Hand, man denke nur an die allgegenwärtige Diskussion über „biometrische Identifikationssysteme" für die Zugangskontrolle beispielsweise zu Computeranlagen oder Geldautomaten.

Das vorliegende Buch beschreibt Methoden zur Erkennung und Unterscheidung von Gesichtern aus zweidimensionalen (z. B. Fotografie) und dreidimensionalen (z. B. Laserscanner) Datensätzen. Daß hierfür auch einiges an Mathematik, insbesondere Statistik und Differentialgeometrie, vonnöten ist, macht die Sache nur interessanter. Entsprechend dem Titel läßt sich das Buch grob in zwei Bereiche aufteilen. Der erste, zweidimensionale Teil beschäftigt sich nach einem Überblick über allgemeine Methoden der Mustererkennung im Detail mit zwei „gesichtsspezifischen" Aspekten, nämlich der Behandlung verschiedener Beleuchtungssituationen, die dasselbe Gesicht sehr unterschiedlich erscheinen lassen können, und mit Transformationen der „Geometrie" des Gesichts, dem sogenannten *„warping"*. Letzteres hängt nicht nur von der Drehung des Kopfes sondern eben auch vom Gesichtsausdruck – „Ein langes Gesicht machen" wird hier von der Redensart zum geometrischen Sachverhalt und verlangt somit einige Sorgfalt bei der Wahl der Abbildung. Im zweiten, dreidimensionalen Teil wird nach einer kurzen Einführung in die benötigten Methoden aus der Differentialgeometrie eine Beschreibung der Gesichtsoberfläche als algebraische Fläche angegeben, die im wesentlichen auf *Krümmungswerten* beruht, denn die wesentlichen erkennbaren „Konturen" des Gesichts sind gerade diejenigen Stellen, an denen die Krümmung extremal wird. Was nicht beschrieben wird, im Kontext dieses Buches aber auch irrelevant ist, sind Ansätze aus der Computergrafik, bei denen Gesichter „nur" modelliert und animiert werden, beispielsweise für „Special Effects" oder computeranimierte Trickfilme.

Die Autoren beschreiben und, was noch wichtiger ist, illustrieren die wesentlichen Ideen aus der *Computer Vision* und geben einen Einblick, wie zugrundeliegenden mathematischen Prinzipien angewendet werden. Daß dabei auf nicht ganz 250 Seiten mit fast 100 teils ganzseitigen Abbildungen Details und strikte mathematische Rigorosität zu kurz kommen müssen, liegt in der Natur der Sache. Trotzdem ist es manchmal schon etwas störend, daß man die Tatsache, daß dieses Buch von fünf Autoren geschrieben wurde, leider auch daran erkennt, daß bei den mathematischen Formeln eine gelegentlich inkonsistente Notation verwendet wird. Da aber auch die Formeln eher der Illustration und Beschreibung der Ideen dienen und nicht im Detail hergeleitet und bewiesen werde, ist dies durchaus zu verschmerzen.

Somit bleibt abschließend zu sagen: Auch wenn dieses Buch für eine „echte" Monografie zu kurz und oftmals auch zu knapp ist, weckt es doch auf jeden Fall das Interesse an einem faszinierenden und aktuellen Bereich der angewandten Mathematik, indem es die zentralen Ideen und auch die unvermeidlichen Heuristiken anschaulich und übersichtlich beschreibt – nur die Details muß man sich eben selbst beschaffen. Empfehlenswert ist das Buch auf alle Fälle für alle, die sich für aktuelle Anwendungen der Mathematik in der „realen Welt" interessieren ohne sich gleich mit allen Details konfrontiert zu sehen.

Gießen T. Sauer

Boissonnat, J.-D., Yvinec, M., Algorithmic Geometry, Cambridge University Press 1998, 519 S. paperback, £ 24.95

Algorithmische Geometrie behandelt die Verwaltung und Berechung grundlegender geometrischer Objekte. Sie ist Grundlage von Anwendungen in der Robotik, im rechnergestützten Konstruieren, im Computersehen und in der Computergraphik. Die Quellen der algorithmischen Geometrie sind die kombinatorische Geometrie und die effizienten Datenstrukturen und Algorithmen. Das Gebiet hat sich in den letzten 20 Jahren gewaltig entwickelt. Die Autoren Jean-Daniel Boissonnat und Mariette Yvinec haben mit ihren Forschungsarbeiten die Entwicklung des Gebiets wesentlich mitbestimmt und legen nun eine koherente Darstellung wesentlicher Aspekte des Gebiets vor. *Der Rezensent ist von dem Buch begeistert.*

Das Buch gliedert sich in 5 Teile: Algorithmische Grundlagen, Konvexe Hüllen, Triangulierungen, Arrangements und Vornoidiagramme, von denen ein jedes ungefähr 100 Seiten hat. In jedem Teil werden zunächst die kombinatorischen Grundlagen gelegt und dann Algorithmen vorgestellt und analysiert. Dabei werden jeweils Verfahren vorgestellt, die in beliebigen Dimensionen anwendbar sind, und dann erst die Spezialfälle in zwei und drei Dimensionen behandelt. Die Vorgehensweise ist ungewöhnlich, aber sehr überzeugend. Es erlaubt den Autoren nämlich zunächst die kombinatorische Struktur und die allgemeinen Prinzipien herauszuarbeiten; auf diese Weise wird der Stoff insbesondere für Mathematiker, die keine Experten in Algorithmik sind, leichter zugänglich. Die effizienteren Methoden, die in zwei- und drei-dimensionalen Räumen möglich sind, verlangen oft besondere Datenstrukturen, die mehr Informatikwissen voraussetzen.

Die algorithmische Methode der Randomisierung ist zentral für die Darstellung. Der Ablauf eines randomisierten Algorithmus hängt von Münzwürfen ab, die vom Algorithmus durchgeführt werden. Randomisierung hat sich in den letzen 10 Jahren als höchst fruchtbar erwiesen; sie hat zu einfachen und effizienten Lösungen für eine Vielzahl geometrischer Probleme geführt. Das vorliegende Buch ist nach dem Buch von Mulmuley [Mul94] die zweite geschlossene Darstellung der randomisierten Methode. Sie hat gegenüber der Darstellung von Mulmuley zwei Vorteile: Die Darstellung zieht die Ergebnisse auch nach 94 mit ein, und die Darstellung ist ausführlicher und daher leichter zu lesen.

Natürlich ist das vorliegende Buch nicht das einzige Buch über algorithmische Geometrie. Ich möchte besonders auf die Bücher von Preparata und Shamos [PS85], Edelsbrunner [Ede87], Klein [Kle97], Mulmuley [Mul94], O'Rourke [O'R94], de Berg, Kreveld, Overmars und Schwarzkopf [dBKOS97] und die Bücher des Rezensenten [Meh84, MN98] hinweisen. Ich benutze die Bücher von Klein und von de Berg et al für die Lehre und die anderen Bücher als Nachschlagewerke. Für geometrische Probleme in allgemeinen d-dimensionalen Räumen und für die Verbindungen zur kombinatorischen Geometrie ist das vorliegende Buch meine erste Wahl, und für Fragen über randomisierte Algorithmen ist es neben dem Buch von Mulmuley meine erste Wahl. Für geometrische Algorithmen im zwei- und drei-dimensionalen benutze ich alle erwähnten Bücher. Die Implemetierung geometrischer Algorithmen wird in [O'R94, MN98] behandelt. Die Systeme LEDA [LED] und CGAL [CGA] enthalten Implementierungen von vielen geometrischen Algorithmen.

[CGA] http://www.cs.uu.nl/CGAL

[dBKOS97] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M, Schwarzkopf, O. *Computational Geometry: Algorithms and Applications.* Springer, 1997

[Ede87] Edelsbrunner, H. *Algorithms in Combinatorial Geometry.* Springer, 1987

[Kle97] Klein, R. *Algorithmische Geometrie.* Addison-Wesley, 1997

[LED] http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/leda.html

[Meh84] Mehlhorn, K. *Data Structures and Algorithms 3: Multidimensional Seaching and Computational Geometry.* Springer, 1984

[MN98] Mehlhorn, K., Näher, S. *The LEDA Platform for Combinatorial and Geometric Computing.* Cambridge University Press, 1998. Draft versions of some chapters are available at http://mpi-sb.mpg.de/~mehlhorn

[Mul94] Mulmuley, K. *Computational Geometry.* Prentice Hall, 1994

[O'R94] O'Rourke, J. *Computational Geometry in C.* Cambridge University Press, 1994

[PS85] Preparata, F. P., Shamos, M. I. *Computational Geometry: An Introduction.* Springer, 1985

Saarbrücken K. Mehlhorn

Müller, C., Analysis of Spherical Symmetries in Euclidean Spaces (Appl. Math. Sciences 129), Berlin u.a.: Springer 1998, 223 S., DM 128,–

Das vorliegende Buch behandelt Kugelfunktionen in diversen Variationen mit Anwendungen vom konstruktiven Standpunkt. Es ist seine Intention, die außerordentlich umfangreichen klassischen Werke [Hob 31] und [Wat 44], welche in vielen Auflagen erschienen sind, durch eine straffere Darlegung mit weniger Formeln und mehr Begrifflichkeit weitgehend zu ersetzen und darüber hinaus einige dort nicht behandelte Anwendungen zu geben wie z. B. die heute durch die Computertomographie sehr aktuelle Radontransformation. Die höhere Begrifflichkeit wird erzielt durch Einbringen gruppen- und darstellungstheoretischer Konzepte, die auf die Operation der orthogonalen Gruppe auf den Kugelfunktionen angewandt werden, ohne jedoch Vorkenntnisse aus der Algebra vorauszusetzen, die über den Standardstoff einer Anfängervorlesung in linearer Algebra hinausgehen. Das erste Kapitel behandelt das Zusammenspiel von Kugelfunktionen, harmonischen Polynomen und orthogonaler Gruppe. Es ist in seinem Entwurf inspiriert durch [Wey 34], wo Weyl den Satz von Peter-Weyl für homogene Räume neu herleitet, bleibt jedoch in der Durchfuehrung des konkreten Beispiels der n-Sphäre elementar. Der Kenner wird hier einige neue Ideen finden, etwa beim Vollständigkeitsbeweis, die den Stoff in diesem Teil des Buches für Studenten mittlerer Semester leicht zugänglich macht. Auf Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, wie z. B. Distributionentheorie wird bewußt verzichtet, ebenso weitgehend auf Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie. Ebenfalls erliegt der Autor nicht der Versuchung, die Kugelfunktionen als Nebenprodukt der Darstellungstheorie der kompakten Liegruppen zu behandeln, wie dies etwa in vielen Büchern aus der russischen Literatur geschieht, sondern bleibt seinem Anliegen treu, die Anwendungen auf Differentialgleichungen, also insbesondere der Laplaceschen Gleichung und der Helmholtzgleichung darzustellen.

Nachdem in den ersten drei Kapiteln die Theorie der Kugelfunktionen kurz und elegant auf weniger als 100 Seiten über die Funk-Hecke-Formel, Legendre-Polynome, Maxwellsche Theorie der Multipole, bis hin zur Eigenwertbestimmung des Laplace-Beltrami-Operators auf der Sphäre abgehandelt ist, kommt ein nicht ganz so elementares Kapitel über die komplexe Einheitssphäre, dessen Wert der Anfänger erst im nachfolgenden Kapitel über Bessel- und Hankelfunktionen schätzen lernt. Ausgehend von einem Produktansatz für die Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u \pm u = 0$ mit einem radialen und einem Kugelfunktionsanteil, erweisen sich die Bessel- bzw. Hankelfunktionen als die radialen Anteile dieser Lösungen. Nach dem Vorbild von Sommerfeld, vergl. [Som 47] Kap. IV (übrigens dem Anfänger als Vorbereitungslektüre zu diesem Teil des Buches wärmestens empfohlen), wird eine Zerlegung nach ebenen Wellen für diese Lösungen vorgenommen. Die auftauchenden Integrale sind genau die, welche bereits in Kapitel 4 über die komplexe Einheitssphäre behandelt worden sind. Es ergeben sich Integraldarstellungen für die Hankelfunktionen, asymptotische Abschätzungen, Rekursionen etc.. Dieser Zugang zu den Bessel- und Hankelfunktionen ist neu und stärker physikalisch motiviert. Wie im ersten Teil des Buches die Funk-Hecke-Formel sich bereits als Wundermittel bei der Integration über die Sphäre erwies, indem es gewisse derartige Integrationen auf ein eindimensionales Integral reduzierte, so erweisen sich hier zusätzlich die komplexen Versionen der Funk-Hecke Formel aus Kap. 4 ihren Wert. Die beiden Kapitel 4 und 5 stellen einen Höhepunkt des vorliegenden Buches dar, da sie die signifikanten Ergebnisse des Autors aus den fünfziger und sechziger Jahren, wo er die zweidimensionale Sommerfeldtheorie auf den allgemeinen n-dimensionalen Fall übertragen hat, erstmals in Buchform sehr ansprechend und in weiterentwickelter Form wiedergeben.

Es folgen zwei Kapitel über Integraltransformationen. Ausgehend von der Beobachtung, daß die meisten bekannten Integraltransformationen die Produktstruktur von Funktionen mit radialen und sphärischen Anteil respektiert, etwa wenn der Kern nur von den Normen und dem Skalarprodukt der Argumente abhängt, werden Fourier-, Gauß- und Weierstraßintegrale solcher Produkte diskutiert. Zur Funktionalanalysis wird nur das wichtigste gesagt, insbesondere unterbleiben Untersuchungen über größtmögliche Definitionsbereiche der Operatoren. Die allgemeine Theorie wird angewandt und weiter ausgeführt in dem letzten Kapitel über die Radontransformation, die erstmalig von F. John in den fünfziger Jahren so benannt wurde [Joh 55] und neue Relevanz in der Computertomographie und in der Asymptotik elektromagnetischer Schwingungen [Mül 69] erhielt. Das Buch schließt mit einem kurzen Appendix über die Gammafunktion, hypergeometrische Funktion und elementare Asymptotik.

Das Buch zeigt, daß ein systematisches Werk nicht notwendig einen großen seitenmäßigen Umfang haben muß, wenn nämlich – wie im vorliegenden Fall – die Theorie einerseits ein hohes Maß an Begrifflichkeit erreicht hat und andererseits der Autor willens und fähig ist, die wichtigen Gesichtspunkte zu betonen und sich nicht in ein Formelgestrüpp oder theoretischen Nebenspekulationen zu verlieren. Sicherlich wird dieses Buch viele Freunde bei den Analytikern finden, aber auch Anwendern wird es von Nutzen sein, wenn sie sich schnell in die Theorie der Kugelfunktionen einarbeiten wollen. Die ersten drei Kapitel und Teile von Kapitel 5 eignen sich sehr gut für eine elementare Vorlesung, die nur Kenntnisse aus dem Grundkurs Analysis und Lineare Algebra voraussetzt. Was noch fehlt, ist – wie am Ende des Buches angedeutet – die Anwendung auf Optik und Akustik. Man kann dem Autor nur Mut machen, der mathematischen Öffentlichkeit auch diesen Teil seiner Einsichten zugänglich zu machen.

[Hob 31] E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Cambridge University Press (1931)
[Joh 55] F. John, *Plane Waves and Spherical Means.* Interscience (1955)
[Mül 69] C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of electromagnetic Waves.* Springer (1969)
[Som 47] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI.* Akademieverlag (1947)
[Wat 44] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press (1944)
[Wey 34] H. Weyl, *Harmonics on homogeneous manifolds.* Ann. of Math. **35** 486-499 (1934)

Aachen Wilhelm Plesken

Arnold, L., Random Dynamical Systems (Springer Monographs in Mathematics), Berlin u. a.: Springer, 1998, 586 S., DM 149,–

The theory of random dynamical systems, the foundations of which are systematically expounded in this monograph, is a rich and profound synthesis of ideas, methods and results from ergodic theory and stochastic analysis (e. g. [3]) combined with those from the theory of deterministic dynamical systems (e. g. [2]). Much of its development over the past 25 years, particularly from the perspective presented in this book, was carried out by Ludwig Arnold and his coworkers in Bremen and elsewhere. The initial emphasis was on stability questions in linear random systems, but gradually evolved into an interest in nonlinear random systems, in particular, in the stochastic bifurcations that might occur following the loss of stability following the change of a parameter. Clarifying just how a stochastic bifurcation should be defined was a major motivation for the research program and its resolution is presented in the final chapter of the book. But before this matter could be well understood, it was first necessary to determine a suitable formulation of an abstract random dynamical system that could subsume systems governed by either random or stochastic differential equations (the former being pathwise ordinary differential equations with differentiable solution paths and the latter Ito or Stratonovich equations with continuous but nonsmooth sample paths, thus requiring stochastic analysis rather than pathwise deterministic analysis).

The now long established theory of deterministic dynamical systems centers on a group $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ or semi-group $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ of mappings (typically homeomorphisms or diffeomorphisms) of a state space $\mathbb{R}^d$ (more generally, a manifold or topological space) into itself, the original motivation being that $\phi_t(x_0)$ is the solution of an underlying autonomous ordinary differential equation $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^d$ or on some manifold in $\mathbb{R}^d$. The classification of the possible long term behaviour of such solutions is of major theoretical and practical interest. At its simplest this concerns behaviour in the vicinity of a stationary or steady state solution, i. e. with $\phi_t(\bar{x}_0) \equiv \bar{x}_0$ for all $t \in \mathbb{R}$, for which Linear Algebra provides an indispensible tool starting with eigenvalues, eigenspaces and leading to stable and unstable manifolds of the linearized system $\dot{z} = \nabla f(\bar{x}_0)z$ and their nonlinear counterparts. Bifurcations arise when the vector field f also depends on a parameter and the sign of the real part of the leading eigenvalue changes from negative ($\bar{x}_0$ asymptotically stable) to positive ($\bar{x}_0$ now unstable) as the parameter increases and new steady state (or periodic) solutions come into existence.

The nonautonomous case is considerably more complicated and, although extensively investigated, much remains to be satisfactorily understood and resolved. The essential difference is that the solution $\phi_{t,t_0}(x_0)$ of a nonautonomous initial value problem $\dot{x} = f(t,x)$ with $x(t_0) = x_0$ now depends on both the starting time t_0 and current time t. An immediate consequence is that the group or semi-group evolutionary property of autonomous systems no longer holds and many limiting objects are no longer invariant like the steady state solution of an autonomous system. How should one characterize the stability of steady state solutions or formulate abstractly nonautonomous dynamical systems? These issues also arise in the random context too, with the added complication that many nice topological properties are replaced by measurable counterparts. While Lyapunov exponents, which generalize the real parts of eigenvalues, provide a means to characterize stability in nonautonomous systems, much of the technical simplicity offered by Linear Algebra in the autonomous case is now lost. However, the solution mappings $(t, t_0, x_0) \mapsto \phi_{t,t_0}(x_0)$ do satistify a generalization of the (semi-)group property called the *cocycle property*, namely $\phi_{t_2,t_0}(x_0) = \phi_{t_2,t_1} \circ \phi_{t_1,t_0}(x_0)$ for $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Writing $\Phi(\tau, t_0, x_0)$ for $\phi_{t_0+\tau,t_0}(x_0)$, where $\tau \geq 0$ is the time elapsed since starting at t_0, and defining a group of shift operators $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ on $\mathbb{R}$ through $\theta_t t_0 = t_0 + t$, the cocycle property takes the form $\Phi(\tau + \rho, t_0, x_0) = \Phi(\rho, \theta_\tau t_0, \Phi(\tau, t_0, x_0))$ for $\tau,\ \rho \geq 0$. The product system generated by $(\theta_\tau t_0, \Phi(\tau, t_0, x_0))$ then forms an autonomous semi-dynamical system, i.e a semi-group of mappings, on the product state space $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, which is called a *skew product flow*. Of course, little has been gained so far, especially since this particular skew-product flow has no steady state solutions, but the advantages become apparent when other types of "driving systems" are used instead of the above shift operators on $\mathbb{R}$. In particular, G. Sell [4] showed that almost periodic differential equations could be expressed as a skew-product flow in terms of a group of mappings $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ of a compact metric space P into itself, where P is a space of admissible nonautonomous vector fields $p(t,x)$ with θ_t a shift of such vector fields defined by $\theta_t p(\cdot,\cdot) = p(t + \cdot, \cdot)$ and the cocycle property now expressed as

$$\Phi(\tau + \rho, p, x_0) = \Phi(\rho, \theta_\tau p, \Phi(\tau, p, x_0)) \qquad \text{for} \quad \tau, \rho \geq 0. \tag{1}$$

The compactness of P is a big advantage here and many results of autonomous dynamical systems theory can be gainfully transferred to the nonautonomous system (though, of course, there are many issues of a specific nonautonomous nature that cannot be handled in this way). See [1] for more recent developments on topological skew-product flows.

The random dynamical systems in Arnold's book are essentially *measurable* skew-product flows. In this case the topological space P is replaced by a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and a measurable ergodic dynamical system given by group $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ of measurable mappings of Ω into itself is considered as the random "driving force" in the dynamics. An immediate task is to show that admissible types of noise in random differential equations and two-sided Wiener process in stochastic differential equations generate such a measurable dynamical system and the next is to show that the solution mapping $\Phi(\tau, \omega, x_0)$ is a cocycle, this being considerably complicated for the required "perfected" version of the cocycle property where the null set of ω for which equation (1) (with p replaced by ω) holds does not depend on the specific τ, ρ and x_0. These and similar matters along with background material constitute Part I (with 2 chapters) of the book. Part II (with 4 chapters) focuses on linear systems, in particular on the Multiplicative Ergodic Theorem of Oseledets that substitutes for the role played by Linear Algebra in deterministic autonomous systems, providing a finite number of nonrandom Lyapunov exponents (formerly real parts of eigenvalues) and the corresponding Oseledets spaces (formerly eigenspaces), which are random. Part III (with 3 chapters) turns to nonlinear random systems, in which the cocycle mapping Φ is a diffeomorphism in its state (x) variable (though considerably less regular in the other two variables). Constructions for stable, unstable and centre mainfolds are presented, leading to a global Invariant Manifold Theorem, and a random counterpart of the Grobman-Hartman Theorem is proved (i. e. the linearized dynamics is homeomorphically mapped onto the nonlinear in a random neighbourhood of a stationary solution). Local manifolds and normal forms are then treated. The introduction of random or ω-dependent norms here provides a very useful means of absorbing nonuniformities of the random dynamics into the norm, thus allowing nonrandom constants to be used in various estimates. The ninth and final chapter, where the more formal and mathematical rigorous style of the first 8 chapters is relaxed, considers stochastic bifurcations, distinguishing between a phenomological bifurcation or noise induced phase transition that have been extensively discussed in the physics literature (i. e. where the stationary solution of a Fokker-Planck equation changes for single humped to double humped) with a dynamical bifurcation where the leading Lyapunov exponent changes from sign from negative to positive as a parameter changes. Simple examples and results of numerical simulations are used throughout this chapter to motivate and illustrate these ideas. The book has two appendices, one on measurable dynamical systems and the other on smooth dynamical systems.

This magnificent book is very much the labour of love of one of the creators and most enthusiastic masters of the field. It is intentionally foundational and referential, taking great effort to provide details for those ubiquitous "obviouslys" and "it can be showns" that one is confronted with in research papers. Its systematic and logical structure and clear writing style ease the reader's way through some heavy and often technically detailed mathematics. While encyclopaedic in topics that represent the culmination of many years of research, it is far from the final word on the subject, but rather the opening adjar of a gate that will allow the real action to get underway, especially for those who are interested in applications. Ludwig Arnold's monograph is going to make a very big impact for many years to come.

[1] C. Chicone and Y. Latushkin, *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations.* Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
[2] A.E. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
[3] Y. Kifer *Ergodic Theory of Random Transformations*, Birkh"auser, Basel, 1996
[4] G.R. Sell, *Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations,* Van Nostrand-Reinbold, London, 1971.

Frankfurt am Main P. E. Kloeden

Yu V. Prokhorov, A. N. Shiryaev (Eds), Probability Theory III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 45, Springer 1998, 254 S., DM 158,–

Aus der ursprünglichen großen russischen Enzyklopädie ist der Bereich Wahrscheinlichkeitstheorie in übersetzter Form im Springer Verlag nur durch diesen Band vertreten. Er ist einem partiellen Überblick über den Stand der stochastischen Analysis in den späten 80er Jahren gewidmet. Es handelt sich demnach nicht um einen einführenden Text, sondern um eine Zusammenstellung der den jeweiligen Autoren – Krylov, (Anulova und) Veretennikov, Liptser, Shiryaev – damals zentral erscheinenden Resultaten, meist ohne Beweise aber mit erläuternden Zwischenbemerkungen.

Der Band kann heute unter drei Gesichtspunkten gelesen werden, wobei sich der Gewinn der Lektüre im letzten Jahrzehnt in Richtung des zweiten und dritten verschoben hat. Dies ist das natürliche Schicksal eines enzyklopädischen Anspruchs in einer sich rasant entwickelnden Wissenschaft.

1. Im Sinn der ursprünglichen Absicht als Leitfaden, um einen Überblick über die behandelten Gebiete zu bekommen.
2. Als zeitgeschichtliches Dokument über eine Einschätzung der Lage in der stochastischen Analysis, Sicht vor 10–15 Jahren.
3. Als Referenzquelle für die frühere Entwicklung der stochastischen Analysis, insbesondere ergiebig bzgl. der vielen wichtigen sowjetischen Arbeiten der 70er Jahre.

Es gibt insgesamt 4 Kapitel:

Chapter 1 N. V. Krylov: Introduction to Stochastic Calculus

Chapter 2 A. Yu. Veretennikov: Stochastic Differential and Evolution Equations (pp. 38–110)

I: (with S.V. Anulova) Stochastic Differential Equations (SDEs)

II. Stochastic Evolution Equations

III. Stochastic Calculus (Malliavin Calculus). Applications to SDEs

Chapter 3 R. Sh. Liptser, A.N. Shiryaev: Stochastic Calculus on Filtered Probability Spaces (pp. 111–157)

I. Elements of the General Theory of Stochastic Processes

II. Semimartingales. Stochastic Integrals

III. Absolute Continuity and Singularity of Probability Distributions.

Chapter 4 R. Sh. Liptser, A.N. Shiryaev: Martingales and Limit Theorems for Stochastic Processes (pp. 158–248)

I. Theory: Weak Convergence of Probability Measures on Metric Spaces

II. Applications: The Invariance Principle and Diffusion Approximation

Wir sehen: manches ist nicht berücksichtigt, was teilweise damals schon existierte und jedenfalls heute nicht fehlen dürfte, u. a. Mannigfaltigkeiten, stochastische Flüsse, Superprozesse, maßwertige Diffusionen, Dirichlet-Formen, optionale Zerlegungen. Die Motivation der dargelegten Strukturen durch Probleme aus Nachbarfächern bleibt wenig beachtet. Darüberhinaus ist schon die russische Literatur etwas bevorzugt.

Aber in den behandelten Bereichen wird m.E. oft der Kern getroffen. Das erste Kapitel von N. Krylov ist nach des Referenten Geschmack ein Kleinod: Kaum eine andere Darstellung, die auf gut 30 Seiten so elegant den Leser zu tiefen Aspekten der stochastischen Analysis führt. Nützlich ist Chapter 2, I zur Orientierung im Bereich der grundlegenden Begriffe der stochastischen Differentialgleichungen. Interessant ist es Chapter 2, II neben die inzwischen vorliegenden weit ausgreifenderen Darstellungen von daPrato-Zabczyk zu halten. Gut gefällt mir, wie in Chapter 2, III der einzige ausführliche Beweis dem Lemma von Kusuoka-Stroock gewidmet ist. Die Auswahl in Chapter 3 ist als Hinführung zur älteren Semimartingal-Theorie m.E. nach wie vor sehr gut geeignet, In Chapter 4 vermißt man doch die Emery-Topologie. Dies Kapitel ist am deutlichsten durch die persönlichen Vorlieben der Verfasser geprägt.

Insgesamt läßt gerade der historische Blick auf diesen Band den Leser den Mangel an ähnlichen, aber aktuelleren Darstellungen deutlich spüren. Dem Vernehmen nach bereiten A. Sznitman und S.R.S. Varadhan die Herausgabe weiterer Enzyklopädie-Bände aus der Wahrscheinlichkeitstheorie vor. Wir drücken ihnen mit Spannung die Daumen.

Kaiserslautern Heinrich v. Weizsäcker

Keller, G.: Equilibrium States in Ergodic Theory (London Mathematical Society, Student Texts 42), Cambridge University Press 1998, 178 pp., £ 13,95

Das vorliegende Buch von G. Keller ist eine unkonventionelle und elegante Einführung in die Theorie der Gleichgewichtszustände aus ergodentheoretischer Sicht.

Anwendungen des sogenannten thermodynamischen Formalismus haben sich als besonders fruchtbar in vielen Disziplinen erwiesen, wie auch konformer Geometrie, der Theorie Kleinscher Gruppen oder fraktaler Geometrie. Eine systematische Beschreibung der Grundlagen dieser Theorie und ihrer vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten wird nun wohl zum ersten Mal in der Monographie von G. Keller geliefert. Sie soll vor allem dem Ziel dienen, eine Einführung in diese Thematik für Studenten und Interessierte zu geben.

Die Wurzeln dieser Theorie liegen sicherlich in der statistischen Mechanik (z. B. Ising Modell) und der Theorie der topologischen Markoffketten. Beides wird zur Motivation und Veranschaulichung genutzt. Diesem Ziel dient auch ein einführendes Kapitel über endliche Systeme.

Seinem Wesen nach basiert der thermodynamische Formalismus auf einem Variationsprinzip, das ein Energiefunktional über invariante Maße maximiert. Die Lösungen dieses Problems können oftmals als Gibbsmaße identifiziert werden, die eine durchschlagende Bedeutung in den oben genannten Anwendungen besitzen. Das Prinzip ist ergodentheoretischer Natur, weshalb die wesentlichen Begriffe der Ergodentheorie in den Kapiteln 2 und 3 eingeführt werden. Das Variationsprinzip wird im folgenden Kapitel bewiesen und Gibbsmaße erscheinen in Kapitel 5.

Das letzte Kapitel gibt einen sehr kurzen Einblick in einige Anwendungen: das Sinai-Bowen-Ruelle Maß für Diffeomorphismen, den Transfer-Operator, der den thermodynamischen Formalismus steuert, absolut stetige Maße als Gleichgewichte, iterierte Funktionensysteme und Anwendung auf die Hausdorff Dimension solcher Systeme. Obwohl die Anwendungen, wie oben angedeutet, vielfältiger sind, ist die Auswahl der Beispiele hier repräsentativ und dem Ziel der Monographie angemessen.

Neuartig ist die Darstellung der allgemeinen Theorie für Halbgruppenaktionen von $\mathbb{R}^d$. Was man vielleicht dagegen vermißt, sind zusätzliche Eigenschaften von Gibbsmaßen. Obwohl das ‚Large Deviation Principle' bewiesen wird, sind tiefergehende wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen und eine Behandlung von Zetafunktionen nicht besprochen.

Insgesamt bleibt festzuhalten, daß das Buch eine gelungene Darstellung der Theorie der Gleichgewichtszustände gibt. Sicherlich ist die im Vorwort gemachte Bemerkung richtig, daß das Buch eine einsemestrige 4stündige Veranstaltung abdeckt. Ich kann dieses Buch nur wärmstens dafür empfehlen. Es ist auch bestens als Grundlage eines Seminars zu empfehlen.

Göttingen M. Denker

Kozlov, V. A., Maz'ya, V., Rossmann, J., Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities (Mathem Surveys ans Monographs 52), Oxford University Press 1998, 414 S., £ 70,–

Die mathematische Modellierung von stationären Problemen der Physik und der Ingenieurwissenschaften führt zumeist zu elliptischen Randwertproblemen. Wichtige Eigenschaften von linearen elliptischen Problemen in glatt berandeten Gebieten wurden in den bereits klassischen Arbeiten von S. Agmon, F.E. Browder, A. Douglis, L. Hörmander, L. Nirenberg, M. Schechter, V.A. Solonnikov, M.I. Vishik, L.R. Volevich, Ya.A. Roitberg und vielen anderen ausführlich untersucht. Ein fundamentales Resultat dieser Theorie ist die Äquivalenz zwischen der Elliptizität des Randwertproblems und der Fredholmeigenschaft des zugehörigen Operators. An der Entwicklung einer analogen Theorie für nur stückweise glatt berandete Gebiete waren die Autoren der vorliegenden Monographie maßgebend beteiligt. In diesem Fall führen die Singularitäten des Randes zu Singularitäten der Lösung. Als ein erfolgreiches Instrument bei der Untersuchung von Isomorphie und Fredholmeigenschaften der Operatoren hat sich die Einführung gewichteter Sobolev-Räume, welche die Singulariäten der Geometrie und der Lösungen berücksichtigen, erwiesen.

Ziel der vorliegenden Monographie ist es, eine systematische und in sich geschlossene Darstellung der Theorie allgemeiner linearer elliptischer Randwertprobleme sowohl in glatt berandeten Gebieten als auch in Gebieten mit konischen und cuspidalen Randpunkten vorzulegen. Dies ist den Autoren hervorragend gelungen.Die Autoren betrachten eine erweiterte Klasse von elliptischen Problemen, bei welchen außer der unbekannten Funktion im Gebiet zusätzlich eine unbekannte Funktion auf dem Rand auftritt. Das hat den Vorteil, daß man immer ein formal adjungiertes Problem definieren kann, das vom gleichen Typ wie das Ausgangsproblem ist. Dadurch wird z.B. die Untersuchung von Problemen mit schiefer Ableitung wesentlich erleichtert.Diese erweiterte Klasse von elliptischen Randwertproblemen wurde im Fall von glatt berandeten Gebieten bereits in einer Reihe von Arbeiten von B. Lawruk, Ya.A. Roitberg und Z.G. Sheftel' behandelt. Hier findet man sie zum ersten Mal in Buchform.

Das Buch besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil werden elliptische Randwertprobleme in glatt berandeten Gebieten behandelt. Ausgehend von Randwertproblemen für Differentialgleichungen gerader Ordnung auf der Halbachse und im Halbraum gehen die Autoren zu Problemen in beschränkten glatt berandeten Gebieten über. Besondere Aufmerksamkeit wird den Fragen der Lösbarkeit und der Regularität des Ausgangs- und des formal adjungierten Problems gewidmet. Dieses klassische Vorgehen wird dann auf elliptische Systeme in Sobolev-Räumen mit beliebiger reeller Differentiationsordnung übertragen.Weitere Schwerpunkte sind: Existenz von Greenschen Funktionen, elliptische Probleme mit einem Parameter und elliptische Probleme in Variationsform.

Im zweiten Teil der Monographie betrachten die Autoren Probleme in Gebieten mit konischen Punkten. Dazu wurden die bisher bekannten Resultate überarbeitet und auf die erweiterte Klasse elliptischer Probleme übertragen. Ausgangspunkt sind die klassischen Resultate von V.A. Kondrat'ev über Existenz und Regularität der Lösungen in gewichteten Sobolev-Räumen sowie asymptotische Entwicklungen der Lösungen in der Nähe von konischen Punkten. Die Autoren behandeln analoge Fragen in weiteren Klassen von Funktionenräumen, die auch gewöhnliche Sobolev-Räume umfassen. Zunächst werden elliptische Randwertprobleme in einem unendlichen Zylinder betrachtet, deren Lösbarkeit und Asymptotik durch Eigenschaften zugehöriger Operatorbündel beschrieben werden. Diese Aussagen werden zur Untersuchung des Verhaltens von Lösungen in der Nähe konischer Randpunkte mittels Euler-Transformation benötigt.Klassen von zulässigen Differentialoperatoren werden eingeführt, die eine asymptotische Entwicklung der Lösungen bezüglich des Abstandes zu den singulären Randpunkten erlauben. Zur Berechnung der Koeffizienten in den asymptotischen Entwicklungen werden Formeln in Form von Integralfunktionalen (Mazya/Plamenevsky Funktionale) hergeleitet. Weitere Resultate wie das Miranda-Agmon Maximum-Prinzip, Abschätzungen von Greenschen Funktionen, Beschreibung von Relationen zwischen Sobolev-Räumen mit homogenen und nichthomogenen Normen sowie die Einbeziehung von elliptischen Randwertproblemen in Variationsform stellen neuerere Ergebnisse der Autoren dar.

Im dritten Teil wird die Theorie elliptischer Probleme in Gebieten mit ein- und ausspringenden cuspidalen Spitzen dargestellt. Wieder werden dieser Geometrie angepaßte gewichtete Räume eingeführt, in welchen die Lösbarkeit und das asymptotische Verhalten der Lösungen untersucht werden.

Das Buch ist eine sehr anspruchsvolle Darstellung der allgemeinen mathematischen Theorie, aufgelockert durch Beispiele. Anwendungen aus Natur- und Ingenieurwissenschaften wie z.B. aus Bruch- oder Strömungsmechanik, wo Singularitäten der Lösungen oft eine entscheidende Rolle spielen, werden jedoch nicht vorgestellt. Für skalare Gleichungen ist die Darstellung lückenlos, alle Behauptungen werden detalliert bewiesen. Man findet hier zum ersten Mal viele vollständige Beweise, die in den Originalarbeiten überhaupt nicht oder nur in angedeuteter Form vorhanden sind. Entsprechende Aussagen für elliptische Systeme und Variationsprobleme werden meistens ohne Beweis angegeben.

Die vorliegende Monographie ist nicht nur als Nachschlagewerk für die Theorie linearer elliptischer Probleme bestens geeignet sondern sie ist auch unverzichtbar für alle Studenten, die diese Theorie gründlich kennenlernen wollen.

Stuttgart M. Bochniak, A.-M. Sändig, W.L. Wendland

V. Koshmanenko, Singular Quadratic Forms in Perturbation Theory, (Mathem. and its Appl. 474), Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 320 S., \$ 165,–

Skalarprodukte $\gamma : D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einem dichten Teilraum D eines Hilbertraumes $(H, (\cdot,\cdot))$, die $\gamma(x,x) \geq (x,x)$, $x \in D$, erfüllen, werden seit geraumer Zeit, etwas irreführend, als quadratische Form in H bezeichnet. Die Einbettung $\iota : D \longrightarrow H$ kann eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung $\bar{\iota} : \tilde{D} \longrightarrow H$ fortgesetzt werden, wobei $\tilde{D}$ die Vervollständigung von D bezüglich γ bezeichnet. Die quadratische Form γ wird als abschließbar bezeichnet, wenn die Abbildung $\bar{\iota}$ injektiv ist, anderenfalls als singulär.

Um Existenz und Eindeutigkeit gewisser Anfangswertprobleme (im Zusammenhang mit der Schrödinger – und der Wärmeleitungsgleichung oder, wie neuere Arbeiten von Albeverio, Röckner und Zhang gezeigt haben, mit stochastischen Differentialgleichungen) zu beweisen, reicht es oftmals, die Abschließbarkeit einer geeigneten quadratischen Form γ nachzuweisen. Der Abschluss $\bar{\gamma}$ kann dann zum Studium der Lösung des Anfangwertproblems verwendet werden. Entsprechend existiert eine umfangreiche Literatur über Abschließbarkeit quadratischer Formen.

In zahlreichen Modellen der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie sowie in der Theorie der Dirichlet Formen betrachtet man quadratische Formen $\alpha + \gamma$, wobei α abschließbar und γ singulär ist. In der Störungstheorie sind Methoden zum Nachweis der Abschließbarkeit solcher Summen entwickelt worden. Ferner ist bekannt, daß jede quadratische Form γ im Hilbertraum eine eindeutige Darstellung der Form

$$\gamma = \gamma_r + \gamma_s,$$

γ_r abschließbar, γ_s singulär, besitzt („Kato – Zerlegung").

Nun zum Buch: In den §§ 1–4 werden bekannte Ergebnisse über quadratische Formen in Hilberträumen, insbesondere über Abschließbarkeit, Störungstheorie und den Zusammenhang mit selbstadjungierten Operatoren, zusammengetragen. Zahlreiche Beispiele, die ihre Wurzeln in Anwendungen haben, vertiefen das Verständnis der Theorie. Dieser Teil des Buches kann als Grundlage für eine Vorlesung verwandt werden, evtl. ergänzt durch die §§ 7 und 14, in denen u. a. auf die von Studenten gelegentlich gestellte Frage, wieso es singuläre quadratische Formen gibt, wo doch jeder Raum vervollständigbar ist, eingegangen wird.

Der Autor hat eine Theorie singulärer quadratischer Formen entwickelt, die in den §§ 5–15 erstmals auf Englisch in Buchform vorgestellt wird. Dieser Teil ist ebenfalls sehr klar geschrieben, und zahlreiche Beipiele runden die Theorie ab. Die zum Studium dieses Abschnittes benötigten Vorkenntnisse findet man beispielsweise in den Kapiteln 1–8 + 10 des Buches „Lineare Operatoren in Hilberträumen" von J. Weidmann.

Intuitiv ist klar, daß eine singuläre quadratische Form „singulärer" als eine andere sein kann, sowie man etwa auch Distributionen verschiedener Ordnung betrachtet. Der Autor hat es geschafft, diese intuitive Vorstellung in eine exakte mathematische Definition umzuwandeln. Es ergibt Sinn, von quadratischen Formen mit einer „Singularität der Ordnung n" zu sprechen. Schwerpunkt der §§ 5–15 ist eine Erweiterung des Zerlegungssatzes von Kato. U. a. wird gezeigt, daß jede quadratische Form γ eine Darstellung der Form

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$$

besitzt, wobei γ_0 abschließbar ist und γ_n singulär der Ordnung n ist für $n = 1, 2, \ldots$ (Theorem 8.2). Weitere Fragen die behandelt werden sind, wie singuläre quadratische Formen durch abschließbare approximiert werden können und unter welchen minimalen Bedingungen an α die Summe $\alpha + \gamma$ abschließbar ist, obwohl γ singulär ist.

In den §§ 16–18, die nur mit umfangreichen Spezialkenntnissen zugänglich sind, werden einige Klassen singulärer quadratischer Formen betrachtet, die in der Quantenfeldtheorie bzw. der Quantenmechanik auftreten. U. a. wird gezeigt, daß Wick-Monome quadratischen Formen mit Singularität der Ordnung ∞ entsprechen und eine Lösungsformel für die Lippman-Schwinger Gleichung für Schrödinger Operatoren mit singulärem Potential hergeleitet.

Göteburg J. Brasche

Pietsch, A., Wenzel, J., Orthonormal Systems and Banach Space Geometry (Encycl. of Math. and Appl. 70), Cambridge University Press 1998, 553 S., £ 55,-

Basierend auf Pionierarbeiten von James, Kwapień, Maurey, Pisier, Burkholder und Bourgain (chronologische Ordnung) entwickelt das vorliegende Buch von A. Pietsch und J. Wenzel auf originelle und eigenständig neue Art eine allgemeine Theorie orthogonaler Reihen mit Banachraum-wertigen Koeffizienten. Die hier dargestellte Mathematik ist Teil dessen, was heute als lokale Banachraumtheorie verstanden wird – diese untersucht und klassifiziert Banachräume über ihre lokalen Eigenschaften. Dabei wird eine Eigenschaft eines Raumes lokal genannt, wenn sie sich über eine quantitative Aussage (etwa eine Ungleichung) für je endlich viele Vektoren oder endlich dimensionale Teilräume definieren läßt. Anders formuliert: die lokale Banachraumtheorie versucht durch systematische Ausnutzung endlich dimensionaler Konzepte mittels asymptotischer Betrachtungen, unendlich dimensionale Aussagen über einen gegebenen Banachraum zu gewinnen.

In diesem Buch werden nun verstärkt diejenigen lokalen Eigenschaften untersucht, die durch Fragestellungen der harmonischen Analysis etwa der Theorie orthogonaler Reihen oder der Theorie singulärer Integraloperatoren geprägt sind, und durch ein verwobenes Geflecht von Beziehungen eine enge Verwandtschaft mit klassischen Begriffen der Geometrie in Banachräumen zeigen.

Die Autoren stellen ihr Werk unter die folgenden zwei Mottos: Welche Banachräume können mit Hilfe von Orthogonalsystemen unterschieden werden? Welche Orthogonalsysteme können mit Hilfe von Banachräumen unterschieden werden?

Der erste dieser beiden roten Fäden wird gleich in der Einleitung folgendermaßen illustriert: Für einen Banachraum X und eine quadrat-integrierbare Funktion $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow X$ sei

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt \in X$$

der k-te Fourierkoeffizient sowie

$$\varphi_n(X) := \sup\left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} \|a_k(f)\|_X^2 \right)^{1/2} \,\middle|\, \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(t)\|_X^2 \, dt \right)^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Welche Banachräume haben die lokale Eigenschaft, daß die Folge $(\varphi_n(X))$ beschränkt ist, oder anders gefragt, für welche X gilt (bis auf eine Konstante) die Besselsche Ungleichung? Die Antwort gibt ein gefeiertes Resultat von Kwapień, nach dem dies für genau diejenigen X wahr ist, die isomorph zu einem Hilbertraum sind.

Den theoretischen Rahmen dieses Buches stellt die durch A. Pietsch und seine Jenenser Schule in den letzten 30 Jahren entwickelte Theorie der sogenannten Banachschen Operatorenideale und Idealnormen – *der* ordnungsschaffende Begriff in der Strukturtheorie (beschränkter, linearer) Operatoren auf Banachräumen. Neu und hier im absoluten Mittelpunkt stehend sind die Begriffe Riemannsche Idealnorm und Dirichletsche Idealnorm. Letztere ist u. a. motiviert durch die eben erläuterten vektorwertigen Besselschen Ungleichungen. Hier soll aus Platzgründen nur die Definition der Riemannschen Idealnorm angedeutet werden.

Den historischen Ausgangspunkt bilden wieder Ergebnisse von Kwapień. Man betrachte zu je n Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ eines Banachraumes X das trigonometrische Mittel

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \sum_{k=1}^{n} \exp(ikt) x_k \right\|_X^2 dt \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Falls X ein Hilbertraum ist, so ist (1) identisch mit $\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^2\right)^{1/2}$, und Kwapień zeigte, daß X genau dann isomorph zu einem Hilbertraum ist, falls sich die Mittel in (1) für jede Wahl der $x_1, \ldots, x_n$ nach oben (und dann auch nach unten) bis auf eine universelle Konstante durch $\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^2\right)^{1/2}$ abgeschätzen lassen. Was passiert, wenn man in (1) das Orthogonalsystem der trigonometrischen Funktionen $\exp(ikt)$ durch das Orthogonalsystem der Rademacherfunktionen $r_k(t)$ ersetzt? Um auf die Isomorphie von X zu einem Hilbertraum schließen zu dürfen, müssen in diesem Fall alle Mittel sowohl nach unten als auch nach oben (bis auf universelle Konstanten) durch $\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^2\right)^{1/2}$ abschätzbar sein – man sagt, X hat Rademacher Type 2 und Rademacher Cotype 2. Man beachte nun, daß auch der Ausdruck $\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^2\right)^{1/2}$ von der Form des Mittels in (1) ist, falls man die Funktionen $\exp(ikt)$ ersetzt durch das kanonische Orthogonalsystem der „Funktionen" e_k des n-dimensionalen Hilbertraumes ℓ_2^n:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_X^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k(j) x_k \right\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

In Kwapieńs Resultaten werden also somit Hilberträume als Teilklasse aller Banachräume dadurch charakterisiert, daß zwei Mittel der Form (1) bzgl. verschiedener Orthogonalsysteme miteinander verglichen werden, und von hier ist es nur noch ein kleiner Schritt bis zur Definition allgemeiner Riemannscher Idealnormen für Operatoren in Banachräumen, gebildet bzgl. zweier Systeme von jeweils n orthogonalen Funktionen.

Das Buch ist klar und übersichtlich gegliedert. Die ersten drei Kapitel entwickeln die benötigte Idealtheorie, insbesondere werden Riemannsche und Dirichletsche Idealnormen definiert und studiert sowie ihre Spezialfälle der Type und Cotype Idealnormen. Die verbleibenden sechs Kapitel formieren dann den Kern des Buches, eine systematische und anwendungsreiche Darstellung der Theorie vektorwertiger Orthogonalreihen der in der harmonischen Analysis klassischen Systeme orthogonaler Funktionen: Rademacher, Bernoulli und Gaußfunktionen, trigonometrische Funktionen, Walshfunktionen, Haarfunktionen sowie „unbedingte" Varianten davon. Das Buch schließt mit einem historischen Abriß und einem Epilog.

Die hier dargestellte Mathematik ist gemessen an ihrer Tiefe und Ästhetik beeindruckend. Daß ihre Präsentation makellos und bis in das kleinste Detail ausgeklügelt ist, versteht sich bei Kenntnis der anderen so erfolgreichen Werke des ersten Autors von selbst. Die gesamte Theorie von Type und Cotype, die Anfang der 70er Jahre maßgeblich initiiert durch Maurey und Pisier zur sogenannten „Französischen Revolution" in der Banachraumtheorie geführt hatte, wird in all ihren Facetten ausgeführt (Rademacher und Gauß, Fourier, Walsh, Haar, Martingal Type/Cotype ...). Ihr Zusammenhang mit klassischen Fragestellungen der harmonischen Analysis und modernen Entwicklungen der Banachraumtheorie wird erläutert, insbesondere finden sich tiefliegende Aussagen über vektorwertige Rademacher- und Rieszprojektionen sowie vektorwertige Varianten der Fourier- und Hilberttransformation (UMD-Räume). Meilensteine der Theorie werden detailliert entwickelt, neben den bereits erläuterten Theoremen von Kwapień etwa Pisiers Theorem, welches besagt, daß ein Banachraum genau dann nicht-trivialen Rademacher Type hat, wenn er B-konvex ist, und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn alle ℓ_1^n gleichmäßig enthalten sind. Oder Bourgains Theorem: Ein Operator hat genau dann Fourier Subtype, wenn er Rademacher Subtype hat. James phantastische Theorie superreflexiver Banachräume wird hier wohl erstmals in ihrer ganzen Allgemeinheit dargestellt. Und vieles, vieles mehr ....

Dieses Buch präsentiert große Sätze großer Protagonisten der Analysis unserer Zeit, deren Beweise ganze Laboratorien spezifischer Ideen, Methoden und Tricks sind. Sie ergeben sich nicht als Korollare einer allumfassenden Maschinerie, was zur Folge hat, daß der theoretische Überbau des Buches knapp gehalten ist, und wohl eher dazu dient, das Material in seiner ästhetischen Geschlossenheit als Ganzes zu beleuchten. Für dieses insgesamt gelungen dargestellte Erlebnis muß der Leser einen angemessenen Preis bezahlen: Eine oft aufwendige und für Vorgebildete gewöhnungsbedürftige (weil zu Beginn ungewohnte) Notation.

Trotz Überschneidungen mit zahlreichen in den letzten zehn Jahren zu diesem Teil der Funktionalanalysis publizierten Werke, erscheint mir das vorliegende Buch auf den aktuellen Markt konkurrenzlos. Für Anfänger und Fortgeschrittene aber auch Spezialisten wird es von großem Nutzen sein. Die zahlreiche Schülerschar von A. Pietsch in und außerhalb Jenas zeigt, wie gewinnbringend der oft emotionslose aber dafür absolut verläßliche Stil der „Pietsch-Bücher" für die erste Gruppe ist. Die zweite Gruppe wird anfänglich vielleicht etwas Zurückhaltung zeigen, ihr Appetit wird sich bei entsprechendem wissenschaftlichem Eigenbedarf aber bald einstellen.

Dieses wertvolle Buch assoziiert bei dem Referenten nicht zu allerletzt auch Begriffe wie Dank und Respekt.

Oldenburg A. Defant

Number Theory

Proceedings of the Turku Symposium on Number Theory in Memory of Kustaa Inkeri, May 31–June 4, 1999

Edited by Matti Jutila and Tauno Metsänkylä

2001. 24 x 17 cm. X, 328 pages. Hardcover. DM 268,– / € 137,03 / öS 1956,–*/ sFr 230,– / US$ 128.95 • ISBN 3-11-016481-7

These Proceedings contain 22 refereed research and survey articles based on lectures given at the Turku Symposium on Number Theory in Memory of Kustaa Inkeri, held in Turku, Finland, from May 31 to June 4, 1999. The subject of the symposium was number theory in a broad sense with an emphasis on recent advances and modern methods. The topics covered in this volume include various questions in elementary number theory, new developments in classical Diophantine problems – in particular of the Fermat and Catalan type, the ABC-conjecture, arithmetic algebraic geometry, elliptic curves, Diophantine approximations, Abelian fields, exponential sums, sieve methods, box splines, the Riemann zeta-function and other Dirichlet series, and the spectral theory of automorphic functions with its arithmetical applications.

Prices are subject to change / *suggested retail price

Groups and Computation III

Proceedings of the International Conference at The Ohio State University, June 15–19,1999

Edited by William M. Kantor and Ákos Seress

2001. 24 x 17 cm. VIII, 368 pages. Hardcover. DM 248,– / € 126,80 / öS 1810,–* / sFr 213,– / US$ 128.95 • ISBN 3-11-016721-2
(Ohio State University Mathematical Research Institute Publications 8)

This volume contains contributions by the participants of the conference "Groups and Computation", which took place at The Ohio State University in Columbus, Ohio, in June 1999. This conference was the successor of two workshops on "Groups and Computation" held at DIMACS in 1991 and 1995.

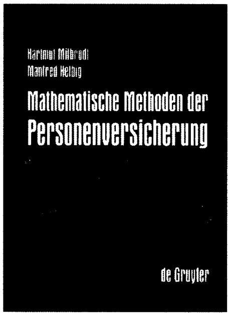
There are papers on permutation group algorithms, finitely presented groups, polycyclic groups, and parallel computation, providing a representative sample of the breadth of Computational Group Theory. On the other hand, more than one third of the papers deal with computations in matrix groups, giving an in-depth treatment of the currently most active area of the field.

The points of view of the papers range from explicit computations to group-theoretic algorithms to group-theoretic theorems needed for algorithm development.

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0
Fax +49-(0)30-2 60 05-251
www.deGruyter.de

W DE G
de Gruyter
Berlin · New York

de Gruyter Mathematics



Hartmut Milbrodt /
Manfred Helbig

Mathematische Methoden der Personenversicherung

1999. 24 x 17 cm. XI, 654 Seiten.
Mit 40 Abbildungen und 26 Tabellen.
Gebunden. DM 178,– / öS 1.299,–* /
sFr 153,– / approx. US$ 89.00
Ab 1.1.2002: € 88,00 [D]
• ISBN 3-11-014226-0

„... Mit diesem umfang- und inhaltsreichen Werk leisten die Autoren einen bedeutenden Beitrag zur Schließung der Lücke zwischen der klassischen, quasideterministischen Lebensversicherungstechnik und der modernen Mathematischen Stochastik.“

Der Aktuar

de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications

Volume 6

Jianhong Wu

Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay

2001. 24 x 17 cm. X, 182 pages.
Hardcover. DM 99,90 / öS 729,–* /
sFr 88,– / US$ 49.95
Ab 1.1.2002: € 49,95 [D]
• ISBN 3-11-016988-6

In the design of a neural network, either for biological modeling, cognitive simulation, numerical computation or engineering applications, it is important to investigate the network's computational performance which is usually described by the long-term behaviors, called dynamics, of the model equations. The purpose of this book is to give an introduction to the mathematical modeling and analysis of networks of neurons from the viewpoint of dynamical systems.

Contents:

Preface · The structure of neural networks · Dynamic models of networks · Simple networks · Content-addressable memory storage · Signal transmission delays.
References · Index

Prices are subject to change / *suggested retail price

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0
Fax +49-(0)30-2 60 05-251
www.deGruyter.de

W DE G
de Gruyter
Berlin · New York