

D 20577  
103. Band Heft 3  
ausgegeben am 14. 11. 2001

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



**B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Verlag:

GWV Fachverlage  
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden  
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden  
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden  
<http://www.teubner.de>  
<http://www.gwv-fachverlage.de>

*Geschäftsführer:* Dr. Hans-Dieter Haenel  
*Verlagsleitung:* Dr. Heinz Weinheimer  
*Gesamtleitung Anzeigen:* Thomas Werner  
*Gesamtleitung Produktion:* Reinhard van den Hövel  
*Gesamtleitung Vertrieb:* Heinz Detering

## Abo-/Leserservice:

Tatjana Hellwig  
Telefon: (06 11) 78 78-1 51  
Fax: (06 11) 78 78-4 23  
E-Mail: [tatjana.hellwig@bertelsmann.de](mailto:tatjana.hellwig@bertelsmann.de)

## Marketing/Sonderdrucke:

Stefanie Hoffmann  
Telefon: (06 11) 78 78-3 79  
Fax: (06 11) 78 78-4 39  
E-Mail: [stefanie.hoffmann@bertelsmann.de](mailto:stefanie.hoffmann@bertelsmann.de)

## Abonnenenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Postfach 7777, 33310 Gütersloh  
Ursula Müller  
Telefon: (0 52 41) 80-19 65  
Fax: (0 52 41) 80-96 20  
E-Mail: [ursula.mueller@bertelsmann.de](mailto:ursula.mueller@bertelsmann.de)

## Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von DM 178 (158 sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.  
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

## Copyright ©

B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2001. Printed in Germany. Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim  
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

## ***Eine anwendungsorientierte Einführung***

Albrecht Irle

### **Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**

Grundlagen - Resultate - Anwendungen

2001. 378 S. Br. DM 62,00/Euro 31,00

ISBN 3-519-02395-4

Inhalt: Wahrscheinlichkeitsraum - Zufallsvariable - Erwartungswert  
- Stochastische Unabhängigkeit - Gesetze der großen Zahlen -  
Zentraler Grenzwertsatz - Statistisches Experiment - Schätztheorie  
- Lineares Modell - Testtheorie

Aufbauend auf einer ausführlichen Darstellung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe und deren Anwendungen werden die Gesetze der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz behandelt, gefolgt von einer Darstellung der statistischen Modellbildung, der Schätztheorie und der Testtheorie. Ziel des Buches ist es, den mit den Grundlagen der Mathematik vertrauten Leser in die Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik so einzuführen, dass dieser ein verlässliches Fundament an Kenntnissen erwirbt, sowohl für die Anwendung dieser Methoden bei praktischen Problemen als auch für weiterführende Studien.



Teubner Verlag · Abraham-Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden

Fax 0611.7878-400 · [www.teubner.de](http://www.teubner.de)

Der genannte Europreis gilt ab 1.1.2002



## Inhalt Band 103, Heft 3

### 1. Abteilung

<b>H. Reitberger:</b> Vietoris-Beglesches Abbildungstheorem, Vietoris-Lefschetz-Eilenberg-Montgomery-Beglescher Fixpunktsatz und Wirtschaftsnobelpreise . . . . .	67
<b>B. Huppert:</b> Nachruf auf Prof. Dr. Dr. hc. Helmut Wielandt . . . . .	74
<b>C. Deninger:</b> Number theory and dynamical systems on foliated spaces . . . . .	79
<b>R. Mathar:</b> Mathematical Modeling, Design, and Optimization of Mobile Communication Networks . . . . .	101

### 2. Abteilung

Neukirch, J., Schmidt, A., Wingberg, K.: Cohomology of Number Fields ( <i>H. Koch</i> ) . . . . .	63
Krantz, S. G., Parks, H. R., The Geometry of Domains in Space ( <i>T. Runst</i> ) . . . . .	64
Birkenhake, Ch., Lange, H.: Complex Tori ( <i>J. Wolfart</i> ) . . . . .	65
Trott, M.: The imaginary made real (Graphica 1). Bakshee, I.: The pattern of beauty (Graphica 2). ( <i>W. Barth</i> ) . . . . .	67
Gromov, M.: Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces ( <i>W. Ballmann</i> ) . . . . .	68
Krause, U., Nesemann, T.: Differenzengleichungen und diskrete dynamische Systeme ( <i>K. Jacobs</i> ) . . . . .	71
Kozlov, V. A., Maz'ya, V. G.: Differential Equation with Operator Coefficients ( <i>N. Jacob</i> ) . . . . .	72
Rozanov, Y. A.: Random Fields and Stochastic Partial Differential Equations ( <i>W. Grecksch</i> ) . . . . .	73
Elliot, R. J., Kopp, E.: Mathematics for Finance ( <i>M. Schweizer</i> ) . . . . .	74
Landim, C., Kipnis, C.: Scaling Limits for Interacting Particle Systems ( <i>H. Rost</i> ) . . .	75
Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J.: Spectral/hp Element Methods for CFD ( <i>Th. Sonar</i> ) . . . . .	77

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

**R. Tobies, U. Görgen:** Mathematische Dissertationen an deutschen Hochschuleinrichtungen, WS 1907/08 bis WS 1944/45

---

### **Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen  
E-Mail: [krieg@mathA.rwth-aachen.de](mailto:krieg@mathA.rwth-aachen.de)

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund  
E-Mail: [gather@statistik.uni-dortmund.de](mailto:gather@statistik.uni-dortmund.de)

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg  
E-Mail: [heintze@math.uni-augsburg.de](mailto:heintze@math.uni-augsburg.de)

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln  
E-Mail: [kawohl@mi.uni-koeln.de](mailto:kawohl@mi.uni-koeln.de)

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$ , 91054 Erlangen  
E-Mail: [lange@mi.uni-erlangen.de](mailto:lange@mi.uni-erlangen.de)

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena  
E-Mail: [triebel@minet.uni-jena.de](mailto:triebel@minet.uni-jena.de)

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

# Vietoris-Beglesches Abbildungstheorem, Vietoris-Lefschetz-Eilenberg-Montgomery-Beglescher Fixpunktsatz und Wirtschaftsnobelpreise<sup>†</sup>

H. Reitberger

## 1 Einleitung

Im Mai 1946 führte J. Leray die heute zentralen Begriffe *Garbe*, *Garbenkohomologie* und *Spektralsequenz* ein. Seine Motivation war folgende Situation (vgl. Dieudonné [8]):

Seien  $X, Y$  topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Man kann dann den Räumen algebraische Invarianten, die *Homologiemoduln* zuordnen. Hauptproblem ist nun (nach Leray), die Homologie von  $X$  und die Homologie von  $Y$  miteinander in Beziehung zu bringen – allenfalls unter einschränkenden Bedingungen für  $f$ .

Leray erwähnt aber nicht, dass Leopold Vietoris 20 Jahre zuvor mit der Definition der Homologiegruppen für den Fall kompakter metrischer Räume auch gleich ein solches Ergebnis mitgeliefert hat (siehe [23]):

*Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume – und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97 (1927), 454–472.*

Mit dieser Arbeit und den sich aus ihr ergebenden historischen Entwicklungen wollen wir uns in dieser Note beschäftigen.

## 2 Vietoris-Komplex

Zunächst also zum sog. *Vietoris-Komplex*: Sei  $X$  ein metrischer Raum. Ein (geordnetes)  $n$ -dimensionales  $\epsilon$ -Simplex  $\sigma^n$  von  $X$  ist ein  $(n+1)$ -Tupel von Punkten  $e_0, e_1, \dots, e_n$  in  $X$ , sodass  $\text{diam}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} < \epsilon$ . Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Eine formale Linearkombination  $\sum g_i \sigma_i^n$  von  $\epsilon$ -Simplexien mit Koeffizienten  $g_i \in G$  nennt man eine  $\epsilon$ -Kette in  $X$ . Der Rand eines  $\epsilon$ -Simplexes  $\sigma^n = [e_0, \dots, e_n]$  ist definiert durch

$$\partial\sigma^n := \sum_i (-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n].$$

<sup>†</sup> basierend auf dem Festvortrag anlässlich des 110. Geburtstags von L. Vietoris am 4. Juni 2001.

Dies ist wiederum eine  $\epsilon$ -Kette. Durch lineare Fortsetzung ergibt sich der Rand einer beliebigen  $\epsilon$ -Kette.  $\epsilon$ -Ketten mit Rand null nennt man  $\epsilon$ -Zykeln. Eine  $\epsilon$ -Kette  $x^n$  heißt  $\eta$ -homolog null in  $X$ , geschrieben  $x^n \sim_\eta 0$ , falls  $x^n = \partial y^{n+1}$  für eine  $\eta$ -Kette  $y^{n+1}$  in  $X$ . Eine Folge  $z^n = (z_1^n, \dots, z_k^n, \dots)$  von  $\epsilon_k$ -Zykeln  $z_k^n$  in  $X$  nennt nun Vietoris *fundamental*, falls  $\epsilon_k \rightarrow 0$  (für  $k \rightarrow \infty$ ) und für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon)$  existiert, sodass für alle  $l, m > N(\epsilon)$ ,  $z_l^n \sim_\epsilon z_m^n$ , d. h.  $z_l^n - z_m^n \sim_\epsilon 0$  in  $X$ . Die Fundamentalfolgen bilden eine Gruppe  $Z_n(X, G)$ . Eine Fundamentalfolge  $z^n$  heißt genau dann nullhomolog, wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N$  existiert, sodass  $z_k^n \sim_\epsilon 0$  für alle  $k \geq N$ . Die Quotientengruppe (vgl. dazu auch Hirzebruch [11])

$$H_n(X, G) = Z_n(X, G) / \{\text{Nullfolgen}\}$$

ist nun das zentrale Objekt für die weiteren Untersuchungen von Vietoris.<sup>2</sup>

Zunächst dazu aber eine Episode am Rande: Bis zum 2. Weltkrieg gehörten der Vietoris-Komplex und V(ietoris)-Zykeln zum Standardwissen aller Topologen (vgl. [13]). Vor 20 Jahren wurde er allerdings von E. Rips bei der Untersuchung hyperbolischer metrischer Gruppen wiedererfunden, M. Gromov verwendet ihn bei seinen fundamentalen Arbeiten über diese Gruppen und erst J.-Cl. Hausmann hat 1995 gesehen, dass dieses Konzept auf Vietoris zurückgeht und nennt ihn nun *Vietoris-Rips-Komplex* [10].

### 3 Vietorissches Abbildungstheorem

Jetzt aber zum zweiten Teil der Vietorisschen Arbeit, dem Abbildungstheorem (in der Formulierung von Stephen Smale, der es nämlich 1957 verallgemeinert hat, worauf gleich eingegangen wird):

**3.1 Abbildungstheorem.** *Es seien  $X, Y$  kompakte metrische Räume,  $f: X \rightarrow Y$  surjektiv und stetig. Für alle  $0 \leq r \leq n-1$  und alle  $y \in Y$  sei  $H_r(f^{-1}(y)) = 0$  (bei Vietoris ist  $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und wird nun in der Bezeichnung der Homologiegruppen unterdrückt). Dann ist der induzierte Homomorphismus*

$$f_* : H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$$

*ein Isomorphismus für  $r \leq n-1$  und ein Epimorphismus für  $r = n$ .*

Die Fasern sind also als *azyklisch* („löcherfrei“) vorausgesetzt. (Anders ausgedrückt, sie besitzen dieselbe Homologie wie ein einzelner Punkt, da  $H_0$  als reduziert angenommen ist!)

Um sich etwas mehr darunter vorstellen zu können, veranschaulichen wir uns dies in topologischen Vektorräumen: Für eine nichtleere Teilmenge  $A$  gilt hier:

$$\text{konvex} \Rightarrow \text{sternförmig} \Rightarrow \text{zusammenziehbar} \Rightarrow \text{azyklisch} \Rightarrow \text{zshgd.}$$

Die Azyklizität ist also doch keine so starke Voraussetzung, wie es auf den ersten Blick scheinen mag.

<sup>2</sup> Vietoris bemerkt übrigens: Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus.



Wir geben nun einen Abriss der an diesen Satz anknüpfenden historischen Entwicklung:

1949 verallgemeinert Edward G. Begle [1], ein Schüler von Lefschetz, dieses Theorem auf beliebige kompakte Hausdorff-Räume und allgemeinere Koeffizientengruppen und verbessert dabei „one minor slip“. In einem Nachruf meint allerdings Martha Zelinka 1979 [25]: „Ed wrote the first valid proof of the Vietoris theorem“.

1957 beweist S. Smale [21] das Vietorische Abbildungstheorem für die (höheren) Homotopiegruppen.

1960 gibt T. Wada [24] im Tohoku Math. J. einen neuerlichen Beweis, allerdings ohne jedwede lokale Voraussetzungen für die Räume. Massey (MR 23, A656) nennt den „Beweis“ vornehm inadäquat, da Smale an einfachen Beispielen gezeigt hat, dass ein solches Theorem nicht richtig sein kann.

1964 formuliert E.G. Sklyarenko das Vietoris-Beglesche Abbildungstheorem für Garbenkohomologie – in der russischen Literatur nun nach Vietoris-Begle-Sklyarenko benannt [5].

1992 gibt E. Spanier [22] die äquivariante Version für die Borelkohomologie parakompakter  $G$ -Räume.

Schließlich hat A. Bialynicki-Birula [3] 1963 eine Umkehrung des Theorems gezeigt.

## 4 Fixpunktsätze

Jetzt aber zur Anwendung des Abbildungstheorems bei der Gewinnung von Fixpunktsätzen für mehrdeutige Abbildungen!

Im letzten Abschnitt der Arbeit [23] geht Vietoris auf *mehr-mehrdeutige* Abbildungen (in heutiger Sprechweise *Relationen*) ein und beweist sein Abbildungstheorem in diesem Kontext.

Motivation für die Anwendbarkeit dieser Situation hätte er sich ab 1933 im Mengerschen *Mathematischen Kolloquium* [15] in Wien holen können, einem der Fundamente der mathematischen Wirtschaftstheorie – Vietoris war aber bereits 1930 endgültig aus Wien nach Innsbruck berufen worden:

Nach Karl Schlesinger sprach in diesem Kolloquium Abraham Wald über „die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen“ [15]. Menger bemerkt dazu: „Mit der Waldschen Arbeit erscheint mir die Periode abgeschlossen, in der die Ökonomen Gleichungen bloß aufgestellt haben, ohne sich um Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösungen zu kümmern, und bestenfalls darauf sahen, dass die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimme. Künftig werden sich die Ökonomen, wenn sie Gleichungen aufstellen, wohl auch (wie die Physiker seit jeher) um ihre Lösungen bemühen müssen.“

Die mathematischen Ökonomen hatten auch gesehen, dass in Wirtschaftsmodellen mehrdeutige Abbildungen benötigt werden: Ein Konsument (Spieler) ist nicht an allen Güterbündeln seiner Budgetmenge in gleicher Weise interessiert, er hat Vorlieben, mathematisch beschrieben durch

die *Nachfragemenge*  $D(p, e)$ ,  $p$  Preissystem,  $e$  Erstausrüstung. Dies führt zur *Nachfragekorrespondenz*  $p \mapsto D(p, e)$  ( $p > 0$ ), also einer Abbildung

$$(1) \quad F: X := \mathbf{R}_+^\ell \rightarrow P(X),$$

wobei  $P(Y)$  die Menge aller nichtleeren Teilmengen von  $Y$  ist.

Die Frage nach der Existenz von Lösungen bei Wald oder nach der Existenz von Wettbewerbsgleichgewichten bei Walras bzw. nach Gleichgewichtspunkten in  $n$ -Personen-Spielen bei Nash (1950) führt zur Suche nach Fixpunkten solcher Korrespondenzen, d. h. zu der Frage:

Gibt es für  $F: X \rightarrow P(X)$  ein  $x^*$  mit  $x^* \in F(x^*)$  ?

Für (eindeutige) Abbildungen gilt ja der Satz

**4.1 Theorem.** (Brouwer(1910) [6]) *Jede stetige Abbildung  $f$  der abgeschlossenen Einheitskugel des euklidischen  $\mathbf{R}^p$  in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

(Bei Bohl(1904)[4] ist  $f$  differenzierbar vorausgesetzt!)

Ein Genie wie John von Neumann hat sich gleich in der letzten Sitzung des erwähnten Kolloquiums (1937): „Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes“ selber das benötigte „Lemma“ zurechtgezimmert: Er approximiert die mehrdeutige Abbildung durch eine eindeutige so, dass er den Brouwerschen Fixpunktsatz anwenden kann.<sup>3</sup>

S. Kakutani [12] formuliert 1941 das von Neumannsche Lemma so um, dass es ein Fixpunktsatz für mehrdeutige Abbildungen im obigen Sinn wird – allerdings unter wesentlichen *Konvexitätsvoraussetzungen*. Unter dem Namen *Fixpunktsatz von Kakutani* wird dies zum „most powerful tool for proofs of existence in economics“ (G. Debreu [7]).

J. Nash [16] zitiert nur Brouwer und von Neumann, in einer Fußnote bemerkt er aber, dass ihn D. Gale auf Kakutani hingewiesen hat.

Vietoris schlägt aber auf der letzten Seite von [23] einen zweiten Weg vor: Man studiere die homologische Struktur des Graphen der Korrespondenz! Zum Graphen  $\Gamma_F = \{(x, y) \in X \times X : y \in F(x)\}$  betrachte die Restriktionen der Projektionen

$$t := pr_1 : \Gamma_F \rightarrow X, \quad s := pr_2 : \Gamma_F \rightarrow X,$$

sodass also  $F(x) = s(t^{-1}(x))$  für alle  $x \in X$ . Die induzierte Abbildung  $t_* : H_r(\Gamma_F) \rightarrow H_r(X)$  ist dann unter der Azyklizitätsvoraussetzung von Th. 3.1 und  $G$  ein Körper bijektiv, und somit ist auch

$$t_*^{-1} : H_r(X) \rightarrow H_r(\Gamma_F)$$

ein Isomorphismus, und mit  $s_* : H_r(\Gamma_F) \rightarrow H_r(X)$  ist

$$F_{*r} = s_* t_*^{-1} : H_r(X) \rightarrow H_r(\Gamma_F) \rightarrow H_r(X)$$

ein Endomorphismus.

<sup>3</sup> Wenn man diese Idee verallgemeinern will, stößt man übrigens wieder auf Vietoris – den Hyperraum [19].

Um zu einem Fixpunktsatz zu gelangen, fehlt nur noch die im Laufe der Dreißigerjahre von S. Lefschetz entwickelte Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Charakteristik, also letztlich der Eulerschen Polyederformel:

Für eine (eindeutige) Abbildung  $f: X \rightarrow X$  mit induzierter Abb.  $f_{\star r}: H_r(X) \rightarrow H_r(X)$  auf den mit obigen  $V$ -Zykeln definierten Homologiegruppen führt Lefschetz die (*Lefschetz*)-Zahl

$$(2) \quad L(f) := \sum_r (-1)^r \text{Spur } f_{\star r}$$

ein. Speziell für  $f = id$  also:  $\text{Spur}(id_{\star r}) = \dim H_r(X)$ , die  $r$ -te *Bettizahl* (für  $G = \mathbb{Q}$ ), und für Flächen vom Geschlecht  $g$  somit  $\sum_r (-1)^r \dim H_r(X) = 2 - 2g$ , die Euler-Poincaré-Charakteristik.

Lefschetz beweist das zentrale

**4.2 Theorem.** Falls  $L(f) \neq 0$ , dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt.

Lefschetz verwendet die erste Hälfte der Vietoris'schen Arbeit, aber erst Samuel Eilenberg und Deane Montgomery [9] sehen 1946, dass sich mit dem Vietoris'schen Abbildungstheorem unter dessen Azyklizitätsvoraussetzung („property V“) die Lefschetz-Zahl nach seiner Anleitung für Korrespondenzen berechnen läßt:

$$(3) \quad L(F) = \sum_r (-1)^r \text{Spur}(s_{\star r} t_{\star r}^{-1}).$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an  $X$  (absoluter Nachbarschaftsretrakt) ist  $L(F) \neq 0$ , also existiert mindestens ein Fixpunkt!

Falls insbesondere der kompakte Raum  $X$  selber azyklisch ist (bei Kakutani ja sogar konvex!), ist ja  $H_r(X) = 0$  für alle  $r > 0$ , also  $L(F) = \text{Spur}(s_{\star 0} t_{\star 0}^{-1}) = 1$  und somit existiert ein Fixpunkt.

Begle [2] verallgemeinert diesen Fixpunktsatz für Korrespondenzen kompakter metrischer Räume auf den Fall beliebiger kompakter Räume.

Im vergangenen Jahr verallgemeinert schließlich S. Park [18] das von Neumannsche *Minimax-Theorem* und die Gleichgewichtstheoreme von Nash und von Debreu vom konvexen auf den azyklischen Fall:

**4.3 Minimax-Theorem.** Sei  $X$  kompakt,  $Y$  eine (nach Klee) zulässige kompakte konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraums,  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Seien für jedes  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$  die Mengen

$$\{x \in X : f(x, y_0) = \max_{\xi \in X} f(\xi, y_0)\} \text{ und } \{y \in Y : f(x_0, y) = \min_{\eta \in Y} f(x_0, \eta)\}$$

azyklisch. Dann gilt

$$(4) \quad \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Für einen Spezialfall dieses Satzes hat G. Debreu 1983 den Wirtschaftsnobelpreis erhalten – aufbauend auf der Gleichgewichtstheorie von K.J. Arrow, der den Preis 1972 entgegennahm.

Schließlich hat J. Nash 1994 diesen Preis für eine spezielle Version des folgenden *Gleichgewichtssatzes* verliehen bekommen:

**4.4 Gleichgewichtssatz.** Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  eine Familie nichtleerer kompakter konvexer Teilmengen topologischer Vektorräume  $E_i$  und für jedes  $i$  sei  $f_i : X := \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbf{R}$  stetig, so dass für alle  $x^i := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X^i := \prod_{j \neq i} X_j$  und für alle  $\alpha \in \mathbf{R}$  die Menge  $\{x_i \in X_i : f_i(x^i, x_i) \geq \alpha\}$  nichtleer und azyklisch ist. Ist dann  $X$  in  $E = \prod_{i=1}^n E_i$  (im Sinne von Klee) zulässig, so existiert ein Punkt  $\hat{x} \in X$ , so dass

$$(5) \quad f_i(\hat{x}) = \max_{y_i \in X_i} f_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, y_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n) \quad \text{für alle } i, 1 \leq i \leq n.$$

Dazu eine abschließende Anekdote:

Als der junge John Nash seine Ergebnisse dem großen John von Neumann in Princeton vorzutragen beginnt, da fällt ihm dieser ins Wort [16]:

„Wissen Sie, das ist banal. Das ist ja lediglich ein *Fixpunktsatz*!“

*Ich danke Herrn O. Loos, dem Nach-Nachfolger von Vietoris, für seine wertvollen Anregungen bei der Formulierung der vorliegenden Arbeit.*

## References

- [1] E.G. Begle: The Vietoris mapping theorem for bicomact spaces, *Ann. of Math. (2)* **51** (1950), 534–543.
- [2] E.G. Begle: A fixed point theorem, *Ann. of Math. (2)* **51** (1950), 544–550.
- [3] A. Biaynicki-Birula: On Vietoris mapping theorem and its inverse, *Fund. Math.* **53** (1963/1964), 135–145.
- [4] P. Bohl: Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage, *J. für Math.* **127** (1904), 179–276.
- [5] Ju.G. Borisovic, B.D. Gelman, A.D. Myskis, V.V. Obuhovskii: Topological methods in the theory of fixed points of multivalued mappings (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **35** (1980), no. 1(211), 59–126, 255.
- [6] L.E.J. Brouwer: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* **71** (1910), 97–115. Berichtigung ebd. S. 598.
- [7] G. Debreu: Four aspects of the mathematical theory of economic equilibrium. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 1, pp. 65–77. *Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.*
- [8] J. Dieudonné: *A history of algebraic and differential topology. 1900–1960.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. xxii+648 pp. ISBN: 0-8176-3388-X
- [9] S. Eilenberg, D. Montgomery: Fixed point theorems for multi-valued transformations, *Amer. J. Math.* **68** (1946), 214–222.
- [10] J.-Cl. Hausmann: On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces, *Prospects in topology (Princeton, NJ, 1994)*, 175–188, *Ann. of Math. Stud.*, **138**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.
- [11] F. Hirzebruch: Emmy Noether and topology, *The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996)*, 57–65, *Israel Math. Conf. Proc.*, 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.
- [12] S. Kakutani: A generalization of Brouwer’s fixed point theorem, *Duke Math. J.* **8** (1941), 457–459.
- [13] S. Lefschetz: *Algebraic Topology.* American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 27. American Mathematical Society, New York, 1942. vi+389 pp.
- [14] R. Liedl, H. Reitberger: Leopold Vietoris – 90 Jahre. *Jb. Überblicke Math. BI Mannheim*, 1982, 169–170.

- [15] *K. Menger*: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. (German) [Results of a mathematical colloquium] With contributions by J. W. Dawson, Jr., R. Engelking and W. Hildenbrand, a foreword by G. Debreu and an afterword in English by F. Alt. Edited by E. Dierker and K. Sigmund. Springer-Verlag, Vienna, 1998. x+470 pp. ISBN: 3-211-83104-5
- [16] *S. Nasar*: A beautiful mind. Simon & Schuster, New York, 1998. 461 pp. ISBN: 0-684-81906-6
- [17] *J.F. Nash*: Equilibrium points in  $n$ -person games, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 48–49.
- [18] *S. Park*: Acyclic versions of the von Neumann and Nash equilibrium theorems. Fixed point theory with applications in nonlinear analysis. J. Comput. Appl. Math. **113** (2000), no. 1–2, 83–91.
- [19] *H. Reitberger*: The contributions of L.Vietoris and H.Tietze to the foundations of general topology. Handbook of the History of General Topology I (ed. by C.E.Aull and R.Lowen). Kluwer, 1997, 31–40.
- [20] *E.G. Sklyarenko*: Homology and cohomology theories of general spaces [MR 90h:55005]. General topology, II, 119–256, Encyclopaedia Math. Sci., **50**, Springer, Berlin, 1996.
- [21] *S. Smale*: A Vietoris mapping theorem for homotopy, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 604–610.
- [22] *E. Spanier*: On equivariant cohomology. Papers in honor of José Adem (Spanish). Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **37** (1992), no. 1–2, 519–524.
- [23] *L. Vietoris*: Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Ann. **97** (1927), 454–472.
- [24] *T. Wada*: Note on suspension and Hopf invariant, Tohoku Math. J. (2) **12** (1960), 361–368.
- [25] *M. Zelinka*: Edward Griffith Begle, Amer. Math. Monthly **85** (1978), no. 8, 629–631.

Heinrich Reitberger  
 Institut für Mathematik  
 Universität Innsbruck  
 Technikerstr. 25  
 A-6020 Innsbruck  
 heinrich.reitberger@uibk.ac.at

(Eingegangen 28.6.2001)

## Nachruf auf Professor Dr. Dr. hc. Helmut Wielandt

B. Huppert

Am 14.02.2001 verstarb Helmut Wielandt, emeritierter ordentlicher Professor der Mathematik der Universität Tübingen, Ehrendoktor der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Mainz, Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften.

Helmut Wielandt wurde am 19.12.1910 in Niedereggenen (bei Lörrach) geboren. Die Schule besuchte er von 1917 bis 1929 in Berlin, wohin der Vater, der Pfarrer Rudolf Wielandt, seine theologische Tätigkeit verlegt hatte. Nach dem Abitur konnte er für das Studium der Mathematik, Physik und Philosophie keine bessere Wahl treffen als Berlin. Damals hatte die Mathematik an der Friedrich-Wilhelms-Universität Weltruf. Zwei ihrer herausragenden Gelehrten, Issai Schur und Erhardt Schmidt, haben die wissenschaftliche Laufbahn von Helmut Wielandt entscheidend geprägt. Das Studium schloss er 1935 mit der Promotion ab, einer Arbeit über mehrfach transitive Permutationsgruppen (bei I. Schur). 1937 habilitierte sich Wielandt in Tübingen mit einer Arbeit über subnormale Untergruppen, der Beginn einer jahrzehntelangen fruchtbaren Arbeitsrichtung. Nach dem Kriegsdienst, zeitweise in der Luftfahrtforschung, war er von 1946–1951 außerordentlicher Professor der Mathematik in Mainz. 1951 wurde er als Nachfolger von Konrad Knopp nach Tübingen berufen, wo er bis zu seiner Emeritierung 1976 blieb. Wielandt war mehrfach als Gastprofessor in den USA, u. a. als Carl Schurz Memorial Professor in Madison (Wisconsin).

Meine erste Begegnung mit Wielandt fand im kalten Winter 1946/47 statt. Wielandt war gerade als Extraordinarius an die nach 150 Jahren wieder eröffnete Universität Mainz berufen worden. Als grünes zweites Semester besuchte ich seine Vorlesung über Integralgleichungen. Die Vorlesung war originell. Sie folgte nicht dem üblich gewordenen funktionalanalytischen Vorgehen, vielmehr wurden die Kerne der Integralgleichungen durch „Kerne von endlichem Rang“ approximiert, wodurch eine Reduktion auf lineare Gleichungssysteme erreicht wurde. Sicherlich haben auch numerische Überlegungen diesen Ansatz nahegelegt (siehe auch Werke 2, S. 190 ff). Wie originell diese Vorlesung war, habe ich freilich erst viel später erkannt.

Auch die nächste Vorlesung von Wielandt, nämlich Funktionentheorie I im SS 1947, ging ungewohnte Wege. Sie war ganz nach Weierstraß aufgebaut, nur mit Potenzreihen operierend, bis zum Ende ohne Cauchy'schen Integralsatz. Vorlesungen über Funktionentheorie hat Wielandt in Mainz und Tübingen vielfach gehalten. Das Experiment eines rein lokalen Weierstraß'schen Aufbaus hat er meines

Wissens aber nicht wiederholt. (Siehe auch den Brief von Wielandt an R. Remmert, Werke 2, S. 267).

Die Übungen zur Funktionentheorie I im SS 1947, wohl mit über 50 Teilnehmern, hat Wielandt alleine korrigiert; in Mainz gab es damals nur einen Assistenten. In lebendiger Erinnerung ist mir die Korrektur einer Aufgabe. Neben der eigentlichen Korrektur stand auf dem Rand meines Zettels:

„Zur Orientierung. Existiert  $\lim a_{n+1}/a_n = z_0$  so ist  $z_0$  singulärer Punkt der Funktion  $f = \sum_n a_n z^n$  (Satz von Fabry, Bieberbach 2, S. 309).“

Dieses Beispiel zeigt, mit welcher Sorgfalt Wielandt seine Lehraufgaben wahrgenommen hat. Bei den Studierenden waren seine Vorlesungen wegen ihrer Klarheit sehr beliebt.

Im SS 1949 begann Wielandt eine Vorlesung über „Eigenwerte von Matrizen und Differentialgleichungen“. Ein Blick in Werke, Band 2 zeigt, dass in diesen Jahren die Eigenwerttheorie in der Forschung von Wielandt im Vordergrund stand. Die Vorlesung war ein großer Erfolg, mehrere meiner Kommilitonen schrieben ihre Staatsexamensarbeit über Eigenwerte.

Auf mich hat Wielandt's Arbeit über nichtnegative Matrizen von 1950 (Sätze von Perron und Frobenius) den nachhaltigsten Eindruck gemacht (Werk 2, S. 100ff). Die hocheleganten Beweise gehören zu den Edelsteinen in Wielandt's Werk, sie sind weitgehend in der Literatur übernommen worden (siehe dazu H. Schneider, Werke 2, S. 107). In neuerer Zeit haben die Sätze über nichtnegative Matrizen bei vielen Anwendungen (stochastische Prozesse, Wachstumsmodelle) eine zentrale Rolle gespielt.

Ohne Zweifel wurden Wielandt's Arbeiten zur Eigenwerttheorie durch seine Tätigkeit im Kriege angeregt, sie lagen aber auch in der Berliner Tradition von Frobenius zu Schur.

Nun zu Wielandt's Arbeiten zur Gruppentheorie. Sie beginnen mit der Dissertation über mehrfach transitive Permutationsgruppen im Jahre 1934. Während 2-fach transitive Permutationsgruppen unter den klassischen linearen Gruppen mehrfach auftreten, sind 3-fach transitive Permutationsgruppen selten. An 4-fach und höher transitiven Permutationsgruppen kannte man damals neben den alternierenden und symmetrischen Gruppen nur die Mathieu'schen Gruppen  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{24}$ . In wesentlicher Verschärfung früherer Ergebnisse bewies Wielandt: Ist  $G$  eine  $t$ -fach transitive Permutationsgruppe vom Grad  $n$ , welche die alternierende Gruppe  $A_n$  nicht enthält, so ist  $t < 3 \log n$ .

Erst viel später (1960) kam Wielandt auf diese Frage zurück. In einer zweiseitigen Arbeit, welche zu den elegantesten von Wielandt zählt, bewies er: Sei  $G$  eine 8-fach transitive Permutationsgruppe vom Grad  $n$ . Ist die äußere Automorphismengruppe jeder einfachen Untergruppe von  $G$  auflösbar (Schreiersche Vermutung), so enthält  $G$  die alternierende Gruppe  $A_n$ . (Mit derselben Beweisidee, aber mehr technischem Aufwand, konnten Suzuki und O'Nan zeigen, dass bereits jede 6-fach transitive Permutationsgruppe die alternierende Gruppe enthält; siehe Blackburn, Huppert, Finite Groups III, S. 339). Heute weiß man, dass die äußere Automorphismengruppe jeder einfachen Gruppe auflösbar ist und man kennt alle mehrfach transitiven Permutationsgruppen. Eine klassische Frage aus dem 19.

Jahrhundert ist damit abschließend beantwortet. Freilich beruhen diese Ergebnisse auf der Kenntnis aller einfachen Gruppen.

Grundlegend für die Wiederbelebung des Interesses an der Theorie der Permutationsgruppen ist Wielandt's Vorlesung von 1954/55 in Tübingen. Durch ihre Übersetzung ins Englische (Academic Press 1964) fand sie weite Verbreitung, und war für viele Jahre die Bibel. Erwähnt sei hier auch eine spätere Vorlesung (1969) an der Ohio State University. Sie behandelt Permutationsgruppen systematisch mit Hilfe invarianter Relationen. Neben einer großen Zahl anderer Ergebnisse enthält sie einen „charakterfreien“ Beweis eines Satzes von W. Burnside, nach dem Wielandt lange gesucht hatte. W. Burnside zeigte 1911 mit Hilfe der Gruppencharaktere: Sei  $G$  eine transitive Permutationsgruppe von Primzahlgrad  $p$ . Dann ist  $G$  auflösbar (und nach Galois metazyklisch mit normaler Sylow- $p$ -Gruppe) oder  $G$  ist 2-fach transitiv. In endgültiger Form findet sich ein Beweis ohne Verwendung der Charaktertheorie in den Ohio Lecture Notes (Werke 1, S. 273).

Für weitere Beiträge von Wielandt zur Theorie der Permutationsgruppen, insbesondere auch zu unendlichen Permutationsgruppen, verweise ich auf den ausgezeichneten Bericht von P. Neumann (Werke 1, S. 3 ff).

Mit Wielandt's Habilitationsschrift von 1939 beginnt eine lange Reihe von Arbeiten und Vorlesungen über subnormale (zuerst nachinvariant genannte) Untergruppen, d. h. Untergruppen, welche in einer Normalreihe vorkommen. Ein Hauptergebnis von Wielandt besagt, dass die subnormalen Untergruppen einer endlichen Gruppe  $G$  einen Verband bilden, d. h. dass das Erzeugnis von subnormalen Untergruppen wieder subnormal ist. In unendlichen Gruppen ist das Erzeugnis von zwei subnormalen Untergruppen nicht immer subnormal. Wielandt's Arbeit hat eine umfangreiche Literatur über subnormale Untergruppen in unendlichen Gruppen ausgelöst (siehe das Buch von Lennox und Stonehewer).

Als wichtige Anwendung der Theorie der subnormalen Untergruppen bewies Wielandt den sog. Automorphismenurmsatz:

Sei  $G$  eine endliche Gruppe mit  $Z(G) = E$ . Dann ist  $G \cong \text{Inn}G$  normal in der Automorphismengruppe  $\text{Aut } G$  von  $G$ . Man kann nun den Automorphismenturm

$G \cong A_1(G) \trianglelefteq A_2(G) \trianglelefteq \dots$  bilden vermöge  $A_{i+1}(G) = \text{Aut}A_i(G)$ . Wielandt's Ergebnis besagt, dass dieser Prozess abbricht, d. h., dass es ein  $A_n(G)$  gibt, dessen sämtliche Automorphismen innere sind.

Wielandt selbst hat subnormale Untergruppen in endlichen Gruppen in zahlreichen weiteren Arbeiten behandelt. Besonders bemerkenswert erscheint mir ein Ergebnis von 1958:

Sei  $P$  eine Sylow- $p$ -Gruppe von  $G$ . Dann ist die Abbildung  $N \rightarrow N \cap P$  für subnormale  $N$  ein Verbandshomomorphismus. Das bedeutet vor allem

$$\langle N_1, N_2 \rangle \cap P = \langle N_1 \cap P, N_2 \cap P \rangle$$

für subnormale  $N_1, N_2$ . Das Bild des Verbandes der subnormalen Untergruppen im Verband der Untergruppen von  $P$  ist in der Regel klein, falls nicht  $G$   $p$ -auflösbar von  $p$ -Länge 1 ist. Die Frage nach der Vertauschbarkeit von subnormalen Untergruppen und nach dem Normalisator von subnormalen Untergruppen hat Wielandt mehrfach behandelt (1957, 1958, 1960).



Die Arbeit von Wielandt über Verlagerung von 1940 lieferte wichtige Hilfsmittel für den ersten Beweis des  $p$ -Nilpotenzsatzes von J. Thompson 1958. Eine lange Unterhaltung zwischen Wielandt und Thompson im Sommer 1958 in Tübingen ging Thompson's Beweis voraus.

Mehrere Arbeiten von Wielandt behandeln den folgenden Satz über faktorisierbare Gruppen.

(S) Sei  $G = H_1 \cdots H_n$  mit nilpotenten Untergruppen  $H_i$  von  $G$ , welche paarweise vertauschbar sind, d. h. es gilt  $H_i H_j = H_j H_i$  für alle  $i, j$ . Dann ist  $G$  auflösbar.

Den ersten Schritt zum Beweis dieses Satzes tat Wielandt 1951. Er zeigte, dass (S) für alle  $n$  stimmt, falls es für  $n = 2$  (d. h.  $G = H_1 H_2$ ) stimmt.

1958 folgte der entscheidende Schritt, nämlich der Beweis, dass  $G = H_1 H_2$  auflösbar ist, falls  $H_1$  und  $H_2$  nilpotent sind mit teilerfremden Ordnungen. Ich hatte das Vergnügen, den Beweis dieses Satzes schon vor der Veröffentlichung in Vorträgen von Wielandt zu erleben. Dies ist ein Höhepunkt in Wielandt's Werk. Es hat einen besonderen Reiz, bei jedem Beweisschritt deutlich zu sehen, wie der Lebensraum für ein angenommenes Gegenbeispiel immer kleiner wird.

Den Beweis des Satzes (S) schloss O. Kegel 1961 ab mit der überraschend eleganten Zurückführung des allgemeinen Falles  $G = H_1 H_2$  (mit  $H_i$  nilpotent) auf den von Wielandt erledigten Fall, dass  $H_1$  und  $H_2$  teilerfremde Ordnungen haben (siehe etwa Huppert, Endliche Gruppen I, S. 678).

Die Frage, wie man die Stufe (derived length) von  $G = H_1 H_2$  durch die Nilpotenzklassen von  $H_1$  und  $H_2$  abschätzen kann, ist noch nicht abschließend beantwortet (siehe Bericht von O. Kegel in Werke I, S. 483 ff).

Zur Untersuchung allgemeiner Sylowsätze hat Wielandt wichtige Beiträge geliefert. Sei  $\pi$  eine Menge von Primzahlen. Eine Untergruppe  $H$  einer endlichen Gruppen  $G$  heißt eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$ , falls  $H$  eine  $\pi$ -Gruppe ist (d. h. nur Primzahlen aus  $\pi$  teilen die Ordnung von  $H$ ) und der Index von  $H$  in  $G$  durch keine Primzahl aus  $\pi$  teilbar ist.

Man sagt, dass der  $\pi$ -Sylowsatz in  $G$  gilt, wenn folgendes zutrifft:

- (1)  $G$  besitzt eine  $\pi$ -Hallgruppe  $H$ .
- (2) Ist  $U$  eine  $\pi$ -Untergruppe von  $G$ , so gibt es ein  $g \in G$  mit  $g^{-1} U g \leq H$ .

Der klassische Satz von Sylow besagt dann, dass der  $\pi$ -Sylowsatz in jeder endlichen Gruppe gilt, falls  $\pi$  nur eine Primzahl enthält. Philipp Hall bewies 1928, dass in auflösbaren Gruppen der  $\pi$ -Sylowsatz für alle Primzahlmengen  $\pi$  gilt; und 1937 konnte Hall umgekehrt zeigen, dass die Gültigkeit des  $\pi$ -Sylowsatzes in  $G$  für alle  $\pi$  die Auflösbarkeit von  $G$  nach sich zieht.

Wielandt's wichtigster Beitrag lautet: Besitzt  $G$  eine nilpotente  $\pi$ -Hallgruppe  $H$ , so gilt der  $\pi$ -Sylowsatz, d. h. jede  $\pi$ -Untergruppe von  $G$  kann in  $H$  konjugiert werden.

Weitere Arbeiten von Wielandt befassen sich mit der Vererbbarkeit von  $\pi$ -Sylowsätzen von Hauptfaktoren auf die ganze Gruppe oder von subnormalen Untergruppen auf deren Erzeugnis. Sie sind Teil der Bemühungen um eine allgemeine Theorie zusammengesetzter Gruppen (siehe auch B. Hartley in Werke I, S. 511 ff).

Der Klassifikation der einfachen Gruppen stand Wielandt kritisch gegenüber, wie gelegentliche Bemerkungen zeigten. Die Mammutbeweise entsprachen nicht seiner Vorstellung von Schönheit in der Mathematik. Wielandt's Anspruch kann man am besten mit einer Bemerkung beschreiben, welche Philipp Hall mir gegenüber einmal machte: „He is an artist“.

Der Einfluss von Wielandt auf die Theorie der endlichen Gruppen vor der Klassifikation der einfachen Gruppen kann nicht hoch genug eingeschätzt werden. Das nach 1945 wiedererwachte Interesse an endlichen Gruppen geht zum erheblichen Teil auf seine Arbeiten und seine Vorlesungen zurück.

Als geschäftsführender Herausgeber der Mathematischen Zeitschrift von 1952 bis 1972 hat Wielandt die hohe Qualität dieser Zeitschrift entscheidend bestimmt.

Erholung von der wissenschaftlichen und redaktionellen Arbeit fand Wielandt im Kreise seiner Familie, besonders seiner Frau Annemarie (geb. Bothe), die er beim Studium in Berlin kennen lernte. Wielandt war ein geschätzter Violinspieler, er pflegte diese Liebe im kleinen Kreise von Tübinger Kollegen. In seiner Jugend betrieb er das Bergsteigen. Nach einem noch glücklich verlaufenen Unfall gab er diesen Sport mit Rücksicht auf seine Familie auf. Geblieben ist die Liebe zu den Bergen. Sie war wohl der Grund für die Wahl des Alterssitzes in Schliersee. Dort fand er auf dem Friedhof seine letzte Ruhe.

Bertram Huppert  
Weinbietstr. 26  
67117 Limburgerhof

*(Eingegangen 02.07.2001)*

# Number theory and dynamical systems on foliated spaces

Christopher Deninger

## 1 Introduction

In this paper we report on some developments in the search for a dynamical understanding of number theoretical zeta functions that have taken place since my ICM lecture [D2]. We also point out a number of problems in analysis that will have to be solved in order to make further progress.

In section 2 we give a short introduction to foliations and their cohomology. Section 3 is devoted to progress on the dynamical Lefschetz trace formula for one-codimensional foliations mainly due to Álvarez López and Kordyukov. In section 4 we make the comparison with the “explicit formulas” in analytic number theory. Finally in section 5 we generalize the conjectural dynamical Lefschetz trace formula of section 3 to phase spaces which are more general than manifolds. This was suggested by the number theoretical analogies of section 4.

This account is written from an elementary point of view as far as arithmetic geometry is concerned, in particular motives are not mentioned. In spirit the present article is therefore a sequel to [D1].

There is a different approach to number theoretical zeta functions using dynamical systems by A. Connes [Co]. His phase space is a non-commutative quotient of the adèles. Although superficially related, the two approaches seem to be deeply different. Whereas Connes’ approach generalizes readily to automorphic  $L$ -functions [So] but not to motivic  $L$ -functions, it is exactly the opposite with our picture. One may wonder whether there is some kind of Langlands correspondence between the two approaches.

I would like to thank the Belgium and German mathematical societies very much for the opportunity to lecture about this material during the joint BMS-DMV meeting in Liège 2001.

## 2 Foliations and their cohomology

A  $d$ -dimensional foliation  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_X$  on a smooth manifold  $X$  of dimension  $a$  is a partition of  $X$  into immersed connected  $d$ -dimensional manifolds  $F$ , the “leaves”. Locally the induced partition should be trivial: Every point of  $X$  should

have an open neighborhood  $U$  diffeomorphic to an open ball  $B$  in  $\mathbb{R}^d$  such that the leaves of the induced partition on  $U$  correspond to the submanifolds  $B \cap (\mathbb{R}^d \times \{y\})$  of  $B$  for  $y$  in  $\mathbb{R}^{d-d}$ .

One of the simplest non-trivial examples is the one-dimensional foliation of the two-dimensional torus  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  by lines of irrational slope  $\alpha$ . These are given by the immersions

$$\mathbb{R} \hookrightarrow T^2, t \mapsto (x + t\alpha, t) \bmod \mathbb{Z}^2$$

parametrized by  $x \bmod \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . In this case every leaf is dense in  $T^2$  and the intersection of a global leaf with a small open neighborhood  $U$  as above decomposes into countably many connected components. It is the global behaviour which makes foliations complicated. For a comprehensive introduction to foliation theory, the reader may turn to [Go] for example.

To a foliation  $\mathcal{F}$  on  $X$  we may attach its tangent bundle  $T\mathcal{F}$  whose total space is the union of the tangent spaces to the leaves. By local triviality of the foliation it is a sub vector bundle of the tangent bundle  $TX$ . It is integrable i.e. the commutator of any two vector fields with values in  $T\mathcal{F}$  again takes values in  $T\mathcal{F}$ . Conversely a theorem of Frobenius asserts that every integrable sub vector bundle of  $TX$  arises in this way.

Differential forms of order  $n$  along the leaves are defined as the smooth sections of the real vector bundle  $\Lambda^n T^*\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^n(X) = \Gamma(X, \Lambda^n T^*\mathcal{F}).$$

The same formulas as in the classical case define exterior derivatives along the leaves:

$$d_{\mathcal{F}}^n : \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^n(X) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{n+1}(X).$$

They satisfy the relation  $d_{\mathcal{F}}^{n+1} \circ d_{\mathcal{F}}^n = 0$  so that we can form the leafwise cohomology of  $\mathcal{F}$ :

$$H_{\mathcal{F}}^n(X) = \text{Ker } d_{\mathcal{F}}^n / \text{Im } d_{\mathcal{F}}^{n-1}.$$

For our purposes these invariants are actually too subtle. We therefore consider the reduced leafwise cohomology

$$\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) = \text{Ker } d_{\mathcal{F}}^n / \overline{\text{Im } d_{\mathcal{F}}^{n-1}}.$$

Here the quotient is taken with respect to the topological closure of  $\text{Im } d_{\mathcal{F}}^{n-1}$  in the natural Fréchet topology on  $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^n(X)$ . The reduced cohomologies are nuclear Fréchet spaces. Even if the leaves are dense, already  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$  can be infinite dimensional.

The cup product pairing induced by the exterior product of forms along the leaves turns  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(X)$  into a graded commutative  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^0(X)$ -algebra.

The Poincare Lemma extends to the foliation context and implies that

$$H_{\mathcal{F}}^n(X) = H^n(X, \mathcal{R}).$$

Here  $\mathcal{R}$  is the sheaf of smooth real valued functions which are locally constant on the leaves. In particular

$$\bar{H}_{\mathcal{F}}^0(X) = H_{\mathcal{F}}^0(X) = H^0(X, \mathcal{R})$$

consists only of constant functions if  $\mathcal{F}$  contains a dense leaf.

For the torus foliation above with  $\alpha \notin \mathbf{Q}$  we therefore have  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^0(T^2) = \mathbf{R}$ . Some Fourier analysis reveals that  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^1(T^2) \cong \mathbf{R}$ . The higher cohomologies vanish since almost by definition we have

$$H_{\mathcal{F}}^n(X) = 0 \quad \text{for all } n > d = \dim \mathcal{F} .$$

For a smooth map  $f : X \rightarrow Y$  of foliated manifolds which maps leaves into leaves, continuous pullback maps

$$f^* : \mathcal{A}_{\mathcal{F}_Y}^n(Y) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}_X}^n(X)$$

are defined for all  $n$ . They commute with  $d_{\mathcal{F}}$  and respect the exterior product of forms. Hence they induce a continuous map of reduced cohomology algebras

$$f^* : \bar{H}_{\mathcal{F}_Y}^{\bullet}(Y) \longrightarrow \bar{H}_{\mathcal{F}_X}^{\bullet}(X) .$$

A (complete) flow is a smooth  $\mathbf{R}$ -action  $\phi : \mathbf{R} \times X \rightarrow X, (t, x) \mapsto \phi^t(x)$ . It is called  $\mathcal{F}$ -compatible if every diffeomorphism  $\phi^t : X \rightarrow X$  maps leaves into leaves. If this is the case we obtain a linear  $\mathbf{R}$ -action  $t \mapsto \phi^{t*}$  on  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  for every  $n$ . Let

$$\Theta : \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) \longrightarrow \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$$

denote the infinitesimal generator of  $\phi^{t*}$ :

$$\Theta h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi^{t*} h - h) .$$

The limit exists and  $\Theta$  is continuous in the Fréchet topology. As  $\phi^{t*}$  is an algebra endomorphism of the  $\mathbf{R}$ -algebra  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(X)$  it follows that  $\Theta$  is an  $\mathbf{R}$ -linear derivation. Thus we have

$$(1) \quad \Theta(h_1 \cup h_2) = \Theta h_1 \cup h_2 + h_1 \cup \Theta h_2$$

for all  $h_1, h_2$  in  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(X)$ .

For arbitrary foliations the reduced leafwise cohomology does not seem to have a good structure theory. For Riemannian foliations however the situation is much better. These foliations are characterized by the existence of a “bundle-like” metric  $g$ . This is a Riemannian metric whose geodesics are perpendicular to all leaves whenever they are perpendicular to one leaf. For example any one-codimensional foliation given by a closed one-form without singularities is Riemannian.

The graded Fréchet space  $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(X)$  carries a canonical inner product:

$$(\alpha, \beta) = \int_X \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathcal{F}} \text{vol} .$$

Here  $\langle, \rangle_{\mathcal{F}}$  is the Riemannian metric on  $\Lambda^{\bullet} T^* \mathcal{F}$  induced by  $g$  and  $\text{vol}$  is the volume form or density on  $X$  coming from  $g$ . Let

$$\Delta_{\mathcal{F}} = d_{\mathcal{F}} d_{\mathcal{F}}^* + d_{\mathcal{F}}^* d_{\mathcal{F}}$$

denote the Laplacian using the formal adjoint of  $d_{\mathcal{F}}$  on  $X$ . Since  $\mathcal{F}$  is Riemannian the restriction of  $\Delta_{\mathcal{F}}$  to any leaf  $F$  is the Laplacian on  $F$  with respect to the induced metric [AK1] Lemma 3.2, i.e.

$$(\Delta_{\mathcal{F}} \alpha)|_F = \Delta_F(\alpha|_F) \quad \text{for all } \alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(X) .$$

We now assume that  $T\mathcal{F}$  is orientable. Via  $g$  the choice of an orientation determines a volume form  $\text{vol}_{\mathcal{F}}$  in  $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^d(X)$  and hence a Hodge  $*$ -operator

$$*_{\mathcal{F}} : \Lambda^n T_x^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{d-n} T_x^* \mathcal{F} \quad \text{for every } x \text{ in } X .$$

It is determined by the condition that

$$v \wedge *_{\mathcal{F}} w = \langle v, w \rangle_{\mathcal{F}} \text{vol}_{\mathcal{F}, x} \quad \text{for } v, w \text{ in } \Lambda^{\bullet} T_x^* \mathcal{F} .$$

These fibrewise star-operators induce the leafwise  $*$ -operator on forms:

$$*_{\mathcal{F}} : \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^n(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{d-n}(X) .$$

We now list some important properties of leafwise cohomology.

**Properties** Assume that  $X$  is compact,  $\mathcal{F}$  a  $d$ -dimensional oriented Riemannian foliation and  $g$  a bundle-like metric for  $\mathcal{F}$ .

Then the natural map

$$(2) \quad \text{Ker } \Delta_{\mathcal{F}}^n \xrightarrow{\sim} \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) , \quad \omega \mapsto \omega \bmod \overline{\text{Im } d_{\mathcal{F}}^{n-1}}$$

is a topological isomorphism of Fréchet spaces. We denote its inverse by  $\mathcal{H}$ .

This result is due to Álvarez López and Kordyukov [AK1]. It is quite deep since  $\Delta_{\mathcal{F}}$  is only elliptic along the leaves so that the ordinary elliptic regularity theory does not suffice. For non-Riemannian foliations (2) does not hold in general [DS1]. All the following results are consequences of this Hodge theorem.

The Hodge  $*$ -operator induces an isomorphism

$$*_{\mathcal{F}} : \text{Ker } \Delta_{\mathcal{F}}^n \xrightarrow{\sim} \text{Ker } \Delta_{\mathcal{F}}^{d-n}$$

since it commutes with  $\Delta_{\mathcal{F}}$  up to sign. From (2) we therefore get isomorphisms for all  $n$ :

$$(3) \quad *_{\mathcal{F}} : \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) \xrightarrow{\sim} \bar{H}_{\mathcal{F}}^{d-n}(X) .$$

For the next property define the trace map

$$\text{tr} : \bar{H}_{\mathcal{F}}^d(X) \longrightarrow \mathbf{R}$$

by the formula

$$\text{tr}(h) = \int_X *_{\mathcal{F}}(h) \text{vol} := \int_X *_{\mathcal{F}}(\mathcal{H}(h)) \text{vol} .$$

It is an isomorphism if  $\mathcal{F}$  has a dense leaf. Note that for *any* representative  $\alpha$  in the cohomology class  $h$  we have

$$\text{tr}(h) = \int_X *_{\mathcal{F}}(\alpha) \text{vol} .$$

Namely  $\alpha - \mathcal{H}(h) = d_{\mathcal{F}}\beta$  and

$$\begin{aligned} \int_X *_{\mathcal{F}}(d_{\mathcal{F}}\beta) \text{vol} &= \pm \int_X d_{\mathcal{F}}^*(*_{\mathcal{F}}\beta) \text{vol} \\ &= \pm(1, d_{\mathcal{F}}^*(*_{\mathcal{F}}\beta)) \\ &= \pm(d_{\mathcal{F}}(\mathbf{1}), *_{\mathcal{F}}\beta) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Alternatively the trace functional is given by

$$\text{tr}(h) = \int_X \alpha \wedge *_\perp(1)$$

where  $*_\perp(1)$  is the transverse volume element for  $g$  c.f. [AK1], § 3.

It is not difficult to see using (2) that we get a scalar product on  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  for every  $n$  by setting:

$$(4) \quad \begin{aligned} (h, h') &= \text{tr}(h \cup *_\mathcal{F} h') \\ &= \int_X \langle \mathcal{H}(h), \mathcal{H}(h') \rangle_{\mathcal{F}} \text{vol} . \end{aligned}$$

It follows from this that the cup product pairing

$$(5) \quad \cup : \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) \times \bar{H}_{\mathcal{F}}^{d-n}(X) \longrightarrow \bar{H}_{\mathcal{F}}^d(X) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbf{R}$$

is non-degenerate.

Next we discuss the Künneth formula. Assume that  $Y$  is another compact manifold with a Riemannian foliation  $\mathcal{F}_Y$ . Then the canonical map

$$H_{\mathcal{F}_X}^n(X) \otimes H_{\mathcal{F}_Y}^m(Y) \longrightarrow H_{\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y}^{n+m}(X \times Y)$$

induces a topological isomorphism [M]:

$$(6) \quad \bar{H}_{\mathcal{F}_X}^n(X) \hat{\otimes} \bar{H}_{\mathcal{F}_Y}^m(Y) \xrightarrow{\sim} \bar{H}_{\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y}^{n+m}(X \times Y) .$$

Since the reduced cohomology groups are nuclear Fréchet spaces, it does not matter which topological tensor product is chosen in (6). The proof of this Künneth formula uses (2) and the spectral theory of the Laplacian  $\Delta_{\mathcal{F}}$ .

Before we deal with more specific topics let us mention that also Hodge-Kähler theory can be generalized. A complex structure on a foliation  $\mathcal{F}$  is an almost complex structure  $J$  on  $T\mathcal{F}$  such that all restrictions  $J|_F$  to the leaves are integrable. Then the leaves carry holomorphic structures which vary smoothly in the transverse direction. A foliation  $\mathcal{F}$  with a complex structure  $J$  is called Kähler if there is a hermitian metric  $h$  on the complex bundle  $T_c \mathcal{F} = (T\mathcal{F}, J)$  such that the Kähler form along the leaves

$$\omega_{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2} \text{im } h \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^2(X)$$

is closed. Note that for example any foliation by orientable surfaces can be given a Kählerian structure by choosing a metric on  $X$ , c.f. [MS] Lemma A.3.1. Let

$$L_{\mathcal{F}} : \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) \longrightarrow \bar{H}_{\mathcal{F}}^{n+2}(X) , \quad L_{\mathcal{F}}(h) = h \cup [\omega_{\mathcal{F}}]$$

denote the Lefschetz operator.

The following assertions are consequences of (2) combined with the classical Hodge-Kähler theory. See [DS3] for details. Let  $X$  be a compact orientable manifold and  $\mathcal{F}$  a Kählerian foliation with respect to the hermitian metric  $h$  on  $T_c \mathcal{F}$ . Assume in addition that  $\mathcal{F}$  is Riemannian. Then we have:

$$(7) \quad \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{pq} , \quad \text{where } \overline{H^{pq}} = H^{qp} .$$

Here  $H^{pq}$  consists of those classes that can be represented by  $(p, q)$ -forms along the leaves. Moreover there are topological isomorphisms

$$H^{pq} \cong \bar{H}^q(X, \Omega_{\mathcal{F}}^p)$$

with the reduced cohomology of the sheaf of holomorphic  $p$ -forms along the leaves.

Furthermore the Lefschetz operator induces isomorphisms

$$(8) \quad L_{\mathcal{F}}^i : \bar{H}_{\mathcal{F}}^{d-i}(X) \xrightarrow{\sim} \bar{H}_{\mathcal{F}}^{d+i}(X) \quad \text{for } 0 \leq i \leq d.$$

Finally the space of primitive cohomology classes  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)_{\text{prim}}$  carries the structure of a polarizable ind  $\mathbf{R}$ -Hodge structure of weight  $n$ .

After this review of important properties of the reduced leafwise cohomology of Riemannian foliations we turn to a specific result relating flows and cohomology.

**2.1 Theorem** *Let  $X$  be a compact 3-manifold and  $\mathcal{F}$  a Riemannian foliation by surfaces with a dense leaf. Let  $\phi^t$  be an  $\mathcal{F}$ -compatible flow on  $X$  which is conformal on  $T\mathcal{F}$  with respect to a metric  $g$  on  $T\mathcal{F}$  in the sense that for some constant  $\alpha$  we have:*

$$(9) \quad g(T_x \phi^t(v), T_x \phi^t(w)) = e^{\alpha t} g(v, w) \text{ for all } v, w \in T_x \mathcal{F}, x \in X \text{ and } t \in \mathbf{R}.$$

*Then we have for the infinitesimal generator of  $\phi^{t*}$  that:*

$$\Theta = 0 \text{ on } \bar{H}_{\mathcal{F}}^0(X) = \mathbf{R} \quad \text{and} \quad \Theta = \alpha \text{ on } \bar{H}_{\mathcal{F}}^2(X) \cong \mathbf{R}.$$

*On  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$  the operator  $\Theta$  has the form*

$$\Theta = \frac{\alpha}{2} + S$$

*where  $S$  is skew-symmetric with respect to the inner product  $(,)$  above.*

**Remark** For the bundle-like metric on  $X$  required for the construction of  $(,)$  we take any extension of the given metric on  $T\mathcal{F}$  to a bundle-like metric on  $TX$ . Such extensions exist.

**Proof of 2.1** Because we have a dense leaf,  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^0(X) = H_{\mathcal{F}}^0(X)$  consists only of constant functions. On these  $\phi^{t*}$  acts trivially so that  $\Theta = 0$ . Since

$$*_{\mathcal{F}} : \mathbf{R} = \bar{H}_{\mathcal{F}}^0(X) \xrightarrow{\sim} \bar{H}_{\mathcal{F}}^2(X)$$

is an isomorphism and since

$$\phi^{t*}(*_{\mathcal{F}}(1)) = e^{\alpha t}(*_{\mathcal{F}}1)$$

by conformality, we have  $\Theta = \alpha$  on  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^2(X)$ .

For  $h_1, h_2$  in  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$  we find

$$(10) \quad \alpha(h_1 \cup h_2) = \Theta(h_1 \cup h_2) \stackrel{(1)}{=} \Theta h_1 \cup h_2 + h_1 \cup \Theta h_2.$$

By conformality  $\phi^{t*}$  commutes with  $*_{\mathcal{F}}$  on  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$ . Differentiating, it follows that  $\Theta$  commutes with  $*_{\mathcal{F}}$  as well. Since by definition we have

$$(h, h') = \text{tr}(h \cup *_{\mathcal{F}} h') \quad \text{for } h, h' \in \bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X),$$



it follows from (15) that as desired:

$$\alpha(h, h') = (\Theta h, h') + (h, \Theta h') .$$

### 3 Dynamical Lefschetz trace formulas

The formulas we want to consider in this section relate the compact orbits of a flow with the alternating sum of suitable traces on cohomology. A suggestive but non-rigorous argument of Guillemin [Gu] later rediscovered by Patterson [P] led to the following conjecture [D2] §3. Let  $X$  be a compact manifold with a one-codimensional foliation  $\mathcal{F}$  and an  $\mathcal{F}$ -compatible flow  $\phi$ . Assume that the fixed points and the periodic orbits of the flow are non-degenerate in the following sense: For any fixed point  $x$  the tangent map  $T_x \phi^t$  should have eigenvalues different from 1 for all  $t > 0$ . For any closed orbit  $\gamma$  of length  $l(\gamma)$  and any  $x \in \gamma$  and integer  $k \neq 0$  the automorphism  $T_x \phi^{kl(\gamma)}$  of  $T_x X$  should have the eigenvalue 1 with algebraic multiplicity one. Observe that the vector field  $Y_\phi$  generated by the flow provides an eigenvector  $Y_{\phi,x}$  for the eigenvalue 1.

Recall that the length  $l(\gamma) > 0$  of  $\gamma$  is defined by the isomorphism:

$$\mathbb{R}/l(\gamma)\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \gamma, \quad t \longmapsto \phi^t(x) .$$

For a fixed point  $x$  we set<sup>1</sup>

$$\varepsilon_x = \operatorname{sgn} \det(1 - T_x \phi^t | T_x \mathcal{F}) .$$

This is independent of  $t > 0$ . For a closed orbit  $\gamma$  and  $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$  set<sup>1</sup>

$$\varepsilon_\gamma(k) = \operatorname{sgn} \det(1 - T_x \phi^{kl(\gamma)} | T_x X / \mathbb{R} Y_{\phi,x}) = \operatorname{sgn} \det(1 - T_x \phi^{kl(\gamma)} | T_x \mathcal{F}) .$$

It does not depend on the point  $x \in \gamma$ .

Finally let  $\mathcal{D}'(J)$  denote the space of Schwartz distributions on an open subset  $J$  of  $\mathbb{R}$ .

**3.1 Conjecture** For  $X, \mathcal{F}$  and  $\phi$  as above there exists a natural definition of a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{>0})$ -valued trace of  $\phi^*$  on the reduced leafwise cohomology  $\bar{H}^\bullet_{\mathcal{F}}(X)$  such that in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{>0})$  we have:

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\dim \mathcal{F}} (-1)^n \operatorname{Tr}(\phi^* | \bar{H}^n_{\mathcal{F}}(X)) = \sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_\gamma(k) \delta_{kl(\gamma)} + \sum_x \varepsilon_x |1 - e^{\kappa_x t}|^{-1} .$$

Here  $\gamma$  runs over the closed orbits of  $\phi$  which are not contained in a leaf and  $x$  over the fixed points. For  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_a$  is the Dirac distribution in  $a$  and  $\kappa_x$  is defined by the action of  $T_x \phi^t$  on the 1-dimensional vector space  $T_x X / T_x \mathcal{F}$ . That action is multiplication by  $e^{\kappa_x t}$  for some  $\kappa_x \in \mathbb{R}$  and all  $t$ .

The conjecture is not known (except for  $\dim X = 1$ ) if  $\phi$  has fixed points. It may well have to be amended somewhat in that case. The analytic difficulty in the presence of fixed points lies in the fact that in this case  $\Delta_{\mathcal{F}}$  has no chance to be

<sup>1</sup> This is different from the normalization in [D2] §3.

transversally elliptic to the  $\mathbf{R}$ -action by the flow, so that the methods of transverse index theory do not apply directly. In the simpler case when the flow is everywhere transversal to  $\mathcal{F}$ , Álvarez López and Kordyukov have proved a beautiful strengthening of the conjecture. Partial results were obtained by other methods in [Laz], [DS2]. We now describe their result in a convenient way for our purposes:

**3.2** Assume  $X$  is a compact oriented manifold with a one codimensional foliation  $\mathcal{F}$ . Let  $\phi$  be a flow on  $X$  which is everywhere transversal to the leaves of  $\mathcal{F}$ . Then  $\mathcal{F}$  inherits an orientation and it is Riemannian [Go] III 4.4. Fixing a bundle-like metric  $g$  the cohomologies  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  acquire pre-Hilbert structures (4) and we can consider their Hilbert space completions  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$ . For every  $t$  the linear operator  $\phi^{t*}$  is bounded on  $(\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X), \|\cdot\|)$  and hence can be continued uniquely to a bounded operator on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  c.f. theorem 3.4.

By transversality the flow has no fixed points. We assume that all periodic orbits are non-degenerate.

**3.3 Theorem (IAK2)** *Under the conditions of (3.2), for every test function  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) = C_0^\infty(\mathbf{R})$  the operator*

$$A_\varphi = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) \phi^{t*} dt$$

on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  is of trace class. Setting:

$$\text{Tr}(\phi^* | \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X))(\varphi) = \text{tr} A_\varphi$$

defines a distribution on  $\mathbf{R}$ . The following formula holds in  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ :

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\dim \mathcal{F}} (-1)^n \text{Tr}(\phi^* | \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)) = \chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}, \mu) \delta_0 + \sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \varepsilon_{\gamma}(k) \delta_{kl(\gamma)} .$$

Here  $\chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}, \mu)$  denotes Connes' Euler characteristic of the foliation with respect to the transverse measure  $\mu$  corresponding to  $*_{\perp}(1)$ . (See [MS].)

It follows from the theorem that if the right hand side of (12) is non-zero, at least one of the cohomology groups  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  must be infinite dimensional. Otherwise the alternating sum of traces would be a smooth function and hence have empty singular support.

By the Hodge isomorphism (2) one may replace cohomology by the spaces of leafwise harmonic forms. The left hand side of the dynamical Lefschetz trace formula then becomes the  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ -valued transverse index of the leafwise de Rham complex. Note that the latter is transversely elliptic for the  $\mathbf{R}$ -action  $\phi^t$ . Transverse index theory with respect to compact group actions was initiated in [A]. A definition for non-compact groups of a transverse index was later given by Hörmander [Si] Appendix II.

As far as we know the relation of (12) with transverse index theory in the sense of Connes-Moscovici still needs to be clarified.

Let us now make some remarks on the operators  $\phi^{t*}$  on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  in a more general setting:

**3.4 Theorem** *Let  $\mathcal{F}$  be a Riemannian foliation on a compact manifold  $X$  and  $g$  a bundle like metric. As above  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  denotes the Hilbert space completion of  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  with respect to the scalar product (4). Let  $\phi^t$  be an  $\mathcal{F}$ -compatible flow. Then the linear operators  $\phi^{t*}$  on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  induce a strongly continuous operator group on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$ . In particular the infinitesimal generator  $\Theta$  exists as a closed densely defined operator. On  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  it agrees with the infinitesimal generator in the Fréchet topology defined earlier. There exists  $\omega > 0$  such that the spectrum of  $\Theta$  lies in  $-\omega \leq \text{Re } s \leq \omega$ . If the operators  $\phi^{t*}$  are orthogonal then  $T = -i\Theta$  is a self-adjoint operator on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X) \otimes \mathbf{C}$  and we have*

$$\phi^{t*} = \exp t\Theta = \exp itT$$

*in the sense of the functional calculus for (unbounded) self-adjoint operators on Hilbert spaces.*

**Sketch of proof** Estimates show that  $\|\phi^{t*}\|$  is locally uniformly bounded in  $t$  on  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$ . Approximating  $h \in \hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  by  $h_\nu \in \bar{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$  one now shows as in the proof of the Riemann-Lebesgue lemma that the function  $t \mapsto \phi^{t*}h$  is continuous at zero, hence everywhere. Thus  $\phi^{t*}$  defines a strongly continuous group on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^n(X)$ . The remaining assertions follow from semigroup theory [DSch], Ch. VIII, XII, and in particular from the theorem of Stone.

We now combine theorems 2.1, 3.3 and 3.4 to obtain the following corollary:

**3.5 Corollary** *Let  $X$  be a compact 3-manifold with a foliation  $\mathcal{F}$  by surfaces having a dense leaf. Let  $\phi^t$  be a non-degenerate  $\mathcal{F}$ -compatible flow which is everywhere transversal to  $\mathcal{F}$ . Assume that  $\phi^t$  is conformal (9) with respect to a metric  $g$  on  $T\mathcal{F}$ . Then  $\Theta$  has pure point spectrum  $\text{Sp}^1(\Theta)$  on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$  which is discrete in  $\mathbf{R}$  and we have the following equality of distributions on  $\mathbf{R}$ :*

$$(13) \quad 1 - \sum_{\rho \in \text{Sp}^1(\Theta)} e^{t\rho} + e^{t\alpha} = \chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}, \mu)\delta_0 + \sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus 0} \varepsilon_{\gamma}(k)\delta_{kl(\gamma)}.$$

In the sum the  $\rho$ 's appear with their geometric multiplicities. All  $\rho \in \text{Sp}^1(\Theta)$  have  $\text{Re } \rho = \frac{\alpha}{2}$ .

**Remarks** 1) Here  $e^{t\rho}, e^{t\alpha}$  are viewed as distributions so that evaluated on a test function  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  the formula reads:

$$(14) \quad \Phi(0) - \sum_{\rho \in \text{Sp}^1(\Theta)} \Phi(\rho) + \Phi(\alpha) = \chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}, \mu)\varphi(0) + \sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus 0} \varepsilon_{\gamma}(k)\varphi(kl(\gamma)).$$

Here we have put

$$\Phi(s) = \int_{\mathbf{R}} e^{ts}\varphi(t) dt.$$

2) Actually the conditions of the corollary force  $\alpha = 0$  i.e. the flow must be isometric with respect to  $g$ . We have chosen to leave the  $\alpha$  in the formulation since there are good reasons to expect the corollary to generalize to more general phase

spaces  $X$  than manifolds, where  $\alpha \neq 0$  becomes possible i.e. to Sullivan's generalized solenoids. More on this in section 5.

3) One can show that the group generated by the lengths of closed orbits is a finitely generated subgroup of  $\mathbf{R}$  under the assumptions of the corollary. In order to achieve an infinitely generated group the flow must have fixed points.

**Proof of 3.5** By 2.1, 3.3 we need only show the equation

$$(15) \quad \text{Tr}(\phi^{t*} | \bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X)) = \sum_{\rho \in \text{Sp}^1(\Theta)} e^{t\rho}$$

and the assertions about the spectrum of  $\Theta$ . As in the proof of 2.1 one sees that on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$  we have

$$(\phi^{t*}h, \phi^{t*}h') = e^{\alpha t}(h, h') .$$

Hence  $e^{-\frac{\alpha}{2}t} \phi^{t*}$  is orthogonal and by the theorem of Stone

$$T = -iS$$

is selfadjoint on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^1(X) \otimes \mathbf{C}$ , if  $\Theta = \frac{\alpha}{2} + S$ . Moreover

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t} \phi^{t*} = \exp itT ,$$

so that

$$(16) \quad \phi^{t*} = \exp t \Theta .$$

In [DS2] proof of 2.6, for isometric flows the relation

$$-\Theta^2 = \Delta^1 |_{\ker \Delta_{\mathcal{F}}^1}$$

was shown. Using the spectral theory of the ordinary Laplacian  $\Delta^1$  on 1-forms it follows that  $\Theta$  has pure point spectrum with finite multiplicities on  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X) \cong \ker \Delta_{\mathcal{F}}^1$  and that  $\text{Sp}^1(\Theta)$  is discrete in  $\mathbf{R}$ . Alternatively, without knowing  $\alpha = 0$ , that proof gives:

$$-\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \Delta^1 |_{\ker \Delta_{\mathcal{F}}^1} .$$

This also implies the assertion on the spectrum of  $\Theta$  on  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$ . Now (15) follows from (16) and the fact that the operators  $A_\varphi$  are of trace class.

**Remark** In more general situations where  $\Theta$  may not have a pure point spectrum of  $\hat{H}_{\mathcal{F}}^1(X)$  but where  $e^{-\frac{\alpha}{2}t} \phi^{t*}$  is still orthogonal, we obtain:

$$\langle \text{Tr}(\phi^{t*} | \bar{H}_{\mathcal{F}}^1(X)), \varphi \rangle = \sum_{\rho \in \text{Sp}^1(\Theta)_{\text{point}}} \Phi(\rho) + \int_{\alpha/2-i\infty}^{\alpha/2+i\infty} \Phi(\lambda)m(\lambda) d\lambda$$

where  $m(\lambda) \geq 0$  is the spectral density function of the continuous part of the spectrum of  $\Theta$ .

## 4 Comparison with the “explicit formulas” in analytic number theory

Consider a number field  $K/\mathbb{Q}$ . The explicit formulas in analytic number theory relate the primes of  $K$  to the non-trivial zeroes of the Dedekind zeta function  $\zeta_K(s)$  of  $K$ .

**4.1 Theorem.** *For  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  define  $\Phi(s)$  as in the preceding section. Then the following formula holds:*

$$(17) \quad \begin{aligned} \Phi(0) - \sum_{\rho} \Phi(\rho) + \Phi(1) &= -\log |d_{K/\mathbb{Q}}| \varphi(0) \\ &+ \sum_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \log N\mathfrak{p} \left( \sum_{k \geq 1} \varphi(k \log N\mathfrak{p}) + \sum_{k \leq -1} N\mathfrak{p}^k \varphi(k \log N\mathfrak{p}) \right) \\ &+ \sum_{\mathfrak{p} \mid \infty} W_{\mathfrak{p}}(\varphi). \end{aligned}$$

Here  $\rho$  runs over the non-trivial zeroes of  $\zeta_K(s)$  i.e. those that are contained in the critical strip  $0 < \text{Re } s < 1$ . Moreover  $\mathfrak{p}$  runs over the places of  $K$  and  $d_{K/\mathbb{Q}}$  is the discriminant of  $K$  over  $\mathbb{Q}$ . For  $\mathfrak{p} \mid \infty$  the  $W_{\mathfrak{p}}$  are distributions which are determined by the  $\Gamma$ -factor at  $\mathfrak{p}$ . If  $\varphi$  has support in  $\mathbb{R}^{>0}$  then

$$W_{\mathfrak{p}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{1 - e^{\kappa_{\mathfrak{p}} t}} dt$$

where  $\kappa_{\mathfrak{p}} = -1$  if  $\mathfrak{p}$  is complex and  $\kappa_{\mathfrak{p}} = -2$  if  $\mathfrak{p}$  is real. If  $\varphi$  has support on  $\mathbb{R}^{<0}$  then

$$W_{\mathfrak{p}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{1 - e^{\kappa_{\mathfrak{p}} |t|}} e^t dt.$$

There are different ways to write  $W_{\mathfrak{p}}$  on all of  $\mathbb{R}$  but we will not discuss this here. See for example [Ba] which also contains a proof of the theorem for much more general test functions.

Formula (17) implies the following equality of distributions on  $\mathbb{R}^{>0}$ :

$$(18) \quad 1 - \sum_{\rho} e^{t\rho} + e^t = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \log N\mathfrak{p} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k \log N\mathfrak{p}} + \sum_{\mathfrak{p} \mid \infty} (1 - e^{\kappa_{\mathfrak{p}} t})^{-1}.$$

This fits rather nicely with formula (16) and suggests the following analogies:

- $\text{spec } \mathfrak{o}_K \cup \{\mathfrak{p} \mid \infty\}$   $\hat{=}$  3-dimensional dynamical system  $(X, \phi^t)$  with a one-codimensional foliation  $\mathcal{F}$  satisfying the conditions of conjecture 3.1
- finite place  $\mathfrak{p}$   $\hat{=}$  closed orbit  $\gamma = \gamma_{\mathfrak{p}}$  not contained in a leaf and hence transversal to  $\mathcal{F}$  such that  $l(\gamma_{\mathfrak{p}}) = \log N\mathfrak{p}$  and  $\varepsilon_{\gamma_{\mathfrak{p}}}(k) = 1$  for all  $k \geq 1$ .
- infinite place  $\mathfrak{p}$   $\hat{=}$  fixed point  $x_{\mathfrak{p}}$  such that  $\kappa_{x_{\mathfrak{p}}} = \kappa_{\mathfrak{p}}$  and  $\varepsilon_{x_{\mathfrak{p}}} = 1$ .

In order to understand number theory more deeply in geometric terms it would be very desirable to find a system  $(X, \phi^t, \mathcal{F})$  which actually realizes this correspondence. For this the class of compact 3-manifolds as phase spaces has to be generalized as will become clear from the following discussion.

Formula (17) can be written equivalently as an equality of distributions on all of  $\mathbb{R}$ :

$$(19) \quad \begin{aligned} & 1 - \sum_{\rho} e^{t\rho} + e^t = -\log |d_{K/\mathbb{Q}}| \delta_0 \\ & + \sum_{\mathfrak{p} \mid \infty} \log N_{\mathfrak{p}} \left( \sum_{k \geq 1} \delta_{k \log N_{\mathfrak{p}}} + \sum_{k \leq 1} N_{\mathfrak{p}}^k \delta_{k \log N_{\mathfrak{p}}} \right) \\ & + \sum_{\mathfrak{p} \mid \infty} W_{\mathfrak{p}} . \end{aligned}$$

Let us compare this with formula (13) in Corollary 3.5. This corollary is the best result yet on the dynamical side but still only a first step since it does not allow for fixed points which as we have seen must be expected for dynamical systems of relevance for number fields.

Ignoring the contributions  $W_{\mathfrak{p}}$  from the infinite places for the moment we are suggested that

$$(20) \quad -\log |d_{K/\mathbb{Q}}| \hat{=} \chi_{Co}(\mathcal{F}, \mu) .$$

There are two nice points about this analogy. Firstly there is the following well known fact due to Connes:

**4.2 Fact.** Let  $\mathcal{F}$  be a foliation of a compact 3-manifold by surfaces such that the union of the compact leaves has  $\mu$ -measure zero, then

$$\chi_{Co}(\mathcal{F}, \mu) \leq 0 .$$

Namely the non-compact leaves are known to be complete in the induced metric. Hence they carry no non-zero harmonic  $L^2$ -functions, so that Connes' 0-th Betti number  $\beta_0(\mathcal{F}, \mu) = 0$ . Since  $\beta_2(\mathcal{F}, \mu) = \beta_0(\mathcal{F}, \mu)$  it follows that

$$\begin{aligned} \chi_{Co}(\mathcal{F}, \mu) &= \beta_0(\mathcal{F}, \mu) - \beta_1(\mathcal{F}, \mu) + \beta_2(\mathcal{F}, \mu) \\ &= -\beta_1(\mathcal{F}, \mu) \leq 0 . \end{aligned}$$

The reader will have noticed that in accordance with 4.2 the left hand side of (20) is negative as well:

$$-\log |d_{K/\mathbb{Q}}| \leq 0 \quad \text{for all } K/\mathbb{Q} .$$

The second nice point about (20) is this. The bundle-like metric  $g$  which we have chosen for the definition of  $\Delta_{\mathcal{F}}$  and of  $\chi_{Co}(\mathcal{F}, \mu)$  induces a holomorphic structure of  $\mathcal{F}$  [MS], Lemma A 3.1. The space  $X$  is therefore foliated by Riemann surfaces. Let  $\chi_{Co}(\mathcal{F}, \mathcal{O}, \mu)$  denote the holomorphic Connes Euler characteristic of  $\mathcal{F}$  defined using  $\Delta_{\bar{\partial}}$ -harmonic forms on the leaves instead of  $\Delta$ -harmonic ones. According to Connes' Riemann–Roch Theorem [MS] Cor. A. 2.3, Lemma A 3.3 we have:

$$\chi_{Co}(\mathcal{F}, \mathcal{O}, \mu) = \frac{1}{2} \chi_{Co}(\mathcal{F}, \mu) .$$

Therefore  $\chi_{Co}(\mathcal{F}, \mathcal{O}, \mu)$  corresponds to  $-\log \sqrt{|d_K/\mathbb{Q}|}$ .

For completely different reasons this number is defined in Arakelov theory as the Arakelov Euler characteristic of  $\overline{\text{spec } \mathfrak{o}_K} = \text{spec } \mathfrak{o}_K \cup \{\mathfrak{p} \mid \infty\}$ :

$$(21) \quad \chi_{Ar}(\mathcal{O}_{\overline{\text{spec } \mathfrak{o}_K}}) = -\log \sqrt{|d_K/\mathbb{Q}|}.$$

See [N] for example. Thus we see that

$$\chi_{Ar}(\mathcal{O}_{\overline{\text{spec } \mathfrak{o}_K}}) \quad \text{corresponds to} \quad \chi_{Co}(\mathcal{F}, \mathcal{O}, \mu).$$

It would be very desirable of course to understand Arakelov Euler characteristics in higher dimensions even conjecturally in terms of Connes' holomorphic Euler characteristics. Note however that Connes' Riemann–Roch theorem in higher dimensions does not involve the  $R$ -genus appearing in the Arakelov Riemann–Roch theorem. The ideas of Bismut [Bi] may be relevant in this connection. He interpretes the  $R$ -genus in a natural way via the geometry of loop spaces.

Further comparison of formulas (13) and (19) shows that in a dynamical system corresponding to number theory we must have  $\alpha = 1$ . This means that the flow  $\phi^{t*}$  would act by multiplication with  $e^t$  on the one-dimensional space  $\bar{H}_{\mathcal{F}}^2(X)$ . As explained before this would be the case if  $\phi^t$  were conformal on  $T\mathcal{F}$  with factor  $e^t$ :

$$(22) \quad g(T_x \phi^t(v), T_x \phi^t(w)) = e^t g(v, w) \quad \text{for all } v, w \in T_x \mathcal{F}.$$

However as mentioned before, this is not possible in the manifold setting of corollary 3.5 which actually implies  $\alpha = 0$ .

An equally important difference between formulas (13) and (19) is between the coefficients of  $\delta_{k l(\gamma)}$  and of  $\delta_{k \log N_{\mathfrak{p}}}$  for  $k \leq -1$ . In the first case they are  $\pm 1$  whereas in the second they are  $N_{\mathfrak{p}}^k = e^{k \log N_{\mathfrak{p}}}$  which corresponds to  $e^{k l(\gamma)}$ .

Thus it becomes vital to find phase spaces  $X$  more general than manifolds for which the analogue of corollary 3.5 holds and where  $\alpha \neq 0$  and in particular  $\alpha = 1$  becomes possible. In the new context the term  $\varepsilon_{\gamma}(k) \delta_{k l(\gamma)}$  for  $k \leq -1$  in formula (13) should become  $\varepsilon_{\gamma}(k) e^{\alpha k l(\gamma)} \delta_{k l(\gamma)}$ . The next section is devoted to a discussion of certain laminated spaces which we propose as possible candidates for this goal.

## 5 Remarks on dynamical Lefschetz trace formulas on laminated spaces

In this section we extend the previous discussion to more general phase spaces than manifolds. The class of spaces we have in mind are the foliated spaces with totally disconnected transversals in the sense of [MS]. We will call them laminated spaces for short. They also go by the name of (generalized) solenoids c.f. [Su].

**5.1.** An  $a$ -dimensional laminated space is a second countable metrizable topological space  $X$  which is locally homeomorphic to the product of a non-empty open subset of  $\mathbb{R}^a$  with a totally disconnected space. Then  $a$  is the topological dimension of  $X$ .

Transition functions between local charts  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  have the following form locally:

$$(23) \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(y)) .$$

Here  $x, y$  denote the euclidean resp. totally disconnected components. This is due to the fact, that continuous functions from connected subsets of  $\mathbb{R}^a$  into a totally disconnected space are constant.

Because of (23) the inverse images  $\varphi^{-1}(\cdot, *)$  patch together, to give a partition  $\mathcal{L}$  of  $X$  into  $a$ -dimensional topological manifolds. These *leaves* of the laminated space  $X$  are exactly the path components of  $X$ . The classical solenoid

$$(24) \quad \mathbb{S}_p^1 = \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \varprojlim (\dots \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \dots)$$

is an example of a compact connected one-dimensional laminated space with dense leaves homeomorphic to the real line.

A  $C^{\infty,0}$ -structure on a laminated space is a maximal atlas of local charts whose transition functions are smooth in the euclidean component and continuous in the totally disconnected one. Furthermore all derivatives in the euclidean directions should be continuous in all components. The leaves then become  $a$ -dimensional smooth manifolds.

$C^{\infty,0}$ -laminated spaces are examples of foliated spaces in the sense of [MS] Def. 2.1.

A stronger structure that may exist on a laminated space was introduced by Sullivan []. A  $C^{\infty,\infty}$ - or *TLC*-structure on a laminated space  $X$  is given by a maximal atlas whose transition functions are smooth in the euclidean component and uniformly locally constant in the totally disconnected one. That is, locally they have the form:

$$(25) \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = (F_1(x), F_2(y))$$

with  $F_1$  smooth and  $F_2$  locally constant. Every  $C^{\infty,\infty}$ -structure gives rise to a  $C^{\infty,0}$ -structure. It is clear that  $\mathbb{S}_p^1$  is naturally a  $C^{\infty,\infty}$ -laminated space.

For a  $C^{\infty,0}$ -laminated space  $X$  let  $TX = T\mathcal{L}$  denote its tangent bundle in the sense of [MS] p. 43. For a point  $x \in X$ , the fibre  $T_x X$  is the ordinary tangent space to the leaf through  $x$ . A Riemannian metric on  $X$  is one on  $TX$ . Morphisms between  $C^{\infty,0}$ -laminated spaces are continuous maps which induce smooth maps between the leaves of the lamination. They induce morphisms of tangent bundles.

The two most prominent places in mathematics where laminated spaces occur naturally are in number theory e.g. as adelic points of algebraic groups and in the theory of dynamical systems as attractors.

**5.2.** We now introduce foliations of laminated spaces. Let  $X$  be an  $a$ -dimensional laminated space. For our purposes, a foliation  $\mathcal{F}$  of  $X$  by laminated spaces is a partition of  $X$  into  $d$ -dimensional laminated spaces. The foliation is supposed to be locally trivial with euclidean transversals. More precisely  $\mathcal{F}$  is given by a maximal atlas of local charts on  $X$

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V_1 \times V_2 \times Y$$



with  $V_1 \subset \mathbb{R}^d$ ,  $V_2 \subset \mathbb{R}^{a-d}$  open and  $Y$  totally disconnected, having the following property:

The transition maps have the form:

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, y) = (G_1(x_1, x_2, y), G_2(x_2, y), G_3(y))$$

where  $G_1, G_2$  are smooth in the  $x_1, x_2$  components and  $G_3$  and all  $\partial_{x_1, x_2}^{\alpha_1, \alpha_2} G_1$  and  $\partial_{x_2}^{\alpha_2} G_2$  are continuous. Setting  $x = (x_1, x_2)$ ,

$$F_1(x, y) = (G_1(x_1, x_2, y_2), G_2(x_2, y))$$

and  $F_2 = G_2$  this induces a  $C^{\infty, 0}$ -structure on  $X$  which is supposed to agree with the given one.

The leaves of  $\mathcal{F}$  are obtained by patching together the sets  $\varphi^{-1}(V_1 \times \{*\} \times Y)$ . They are  $d$ -dimensional  $C^{\infty, 0}$ -laminated spaces with local transition functions given by:

$$(x_1, y) \longmapsto (G_1(x_1, *, y), G_3(y)) .$$

Their leaves are  $d$ -dimensional manifolds which foliate the  $a$ -dimensional manifolds which occur as leaves of the lamination on  $X$ . Thus  $X$  is partitioned into  $a$ -dimensional manifolds each of which carries a  $d$ -dimensional foliation in the usual sense.

Besides  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{F}$  there is a third foliated structure denoted  $\mathcal{FL}$  on  $X$ . The space  $X$  is foliated with leaves the  $d$ -dimensional manifolds that occur as path components of the  $\mathcal{F}$ -leaves. Here the transverse space is of the form

open subspace of  $\mathbb{R}^{a-d} \times$  totally disconnected.

The local transition maps are given by:

$$(x_1, z) \longmapsto (H_1(x_1, z), H_2(z))$$

with  $z = (x_2, y)$ ,  $H_1(x_1, z) = G_1(x_1, x_2, y)$  and  $H_2(z) = (G_2(x_2, y), G_3(y))$ .

Of the three foliated structures  $\mathcal{L}, \mathcal{F}$  and  $\mathcal{FL}$  on  $X$  the first and the last fit into the context of [MS] but not the second.

**5.3.** We now turn to cohomology. The foliation  $\mathcal{FL}$  gives rise to the integrable rank  $d$  subbundle  $T\mathcal{FL}$  of  $TX = T\mathcal{L}$ . These bundles are tangentially smooth in the sense of [MS], p. 43 with respect to  $\mathcal{L}$ . The leafwise cohomology of  $X$  along  $\mathcal{FL}$  is by definition the cohomology of the sheaf  $\mathcal{R}_{\mathcal{FL}}$  of real valued smooth functions on  $X$  which are locally constant along the  $\mathcal{FL}$  leaves. Here a continuous function or form on an open subset of  $X$  is called smooth if its restrictions to the  $\mathcal{L}$ -leaves are smooth. The sheaf  $\mathcal{R}_{\mathcal{FL}}$  is resolved by the de Rham complex of smooth forms along  $\mathcal{FL}$ . Using the natural Fréchet topology on the spaces of global differential forms, one defines the reduced version  $\check{H}_{\mathcal{FL}}^*(X)$  of leafwise cohomology  $H_{\mathcal{FL}}^*(X)$  as its maximal Hausdorff quotient. By  $H_{\mathcal{F}}^*(X)$  we denote the cohomology of the sheaf  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$  of real valued smooth functions on  $X$  which are locally constant along the  $\mathcal{F}$ -leaves.

**5.4.** A flow  $\phi$  on  $X$  is a continuous  $\mathbb{R}$ -action such that the induced  $\mathbb{R}$ -actions on the leaves of  $\mathcal{L}$  are smooth. It respects  $\mathcal{F}$  if every  $\phi^t$  maps leaves of  $\mathcal{F}$  into

leaves of  $\mathcal{F}$ . It follows that  $\phi^t$  maps  $\mathcal{FL}$ -leaves into  $\mathcal{FL}$ -leaves. Thus  $(X, \mathcal{F}, \phi^t)$  is partitioned into the foliated dynamical systems  $(L, \mathcal{F}_L, \phi^t|_L)$  for  $L \in \mathcal{L}$ . Here

$$\mathcal{F}_L = \mathcal{FL}|_L = \{S \in \mathcal{FL} \mid S \subset L\}.$$

Any  $\mathcal{F}$ -compatible flow  $\phi^t$  induces pullback actions  $\phi^{t*}$  on  $H_{\mathcal{FL}}^\bullet(X)$  and  $\bar{H}_{\mathcal{FL}}^\bullet(X)$ .

**5.5.** We now state as a working hypotheses a generalization of the conjectured dynamical trace formula 3.1. We allow the phase space to be a laminated space. Moreover we extend the formula to an equality of distributions on  $\mathbb{R}^*$  instead of  $\mathbb{R}^{>0}$ . After checking various compatibilities we state a case where our working hypotheses can be proved and give a number theoretical example.

**5.6. Working hypotheses:** Let  $X$  be a compact  $C^{\infty,0}$ -laminated space with a one-codimensional foliation  $\mathcal{F}$  and an  $\mathcal{F}$ -compatible flow  $\phi$ . Assume that the fixed points and the periodic orbits of the flow are non-degenerate. Then there exists a natural definition of a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ -valued trace of  $\phi^{t*}$  on  $\bar{H}_{\mathcal{FL}}^\bullet(X)$  such that in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$  we have:

$$(26) \quad \sum_{n=0}^{\dim \mathcal{F}} (-1)^n \text{Tr}(\phi^* | \bar{H}_{\mathcal{FL}}^n(X)) = \sum_{\gamma} l(\gamma) \left( \sum_{k \geq 1} \varepsilon_{\gamma}(k) \delta_{kl(\gamma)} + \sum_{k \leq -1} \varepsilon_{\gamma}(|k|) \det(-T_x \phi^{kl(\gamma)} | T_x \mathcal{F}) \delta_{kl(\gamma)} \right) + \sum_x W_x.$$

Here  $\gamma$  runs over the closed orbits not contained in a leaf and in the sums over  $k$ 's any point  $x \in \gamma$  can be chosen. The second sum runs over the fixed points  $x$  of the flow. The distributions  $W_x$  on  $\mathbb{R}^*$  are given by:

$$W_x |_{\mathbb{R}^{>0}} = \varepsilon_x |1 - e^{\kappa_x t}|^{-1}$$

and

$$W_x |_{\mathbb{R}^{<0}} = \varepsilon_x \det(-T_x \phi^t | T_x \mathcal{F}) |1 - e^{\kappa_x |t|}|^{-1}.$$

**5.7 Remarks. 0)** It may actually be better to use a version of foliation cohomology where transversally forms are only supposed to be locally  $L^2$  instead of being continuous.

**1)** In the situation described in 5.8 below the working hypotheses can be proved if  $\bar{H}_{\mathcal{FL}}^n(X)$  is replaced by  $H_{\mathcal{F}}^n(X)$ , Theorem 5.9. In those cases there are no fixed points, only closed orbits. Thus Theorem 5.9 dictated only the coefficients of  $\delta_{kl(\gamma)}$  for  $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$ , but not the contributions  $W_x$  from the fixed points.

**2)** The coefficients of  $\delta_{kl(\gamma)}$  for  $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$  can be written in a uniform way as follows. They are equal to:

$$(27) \quad \frac{\det(1 - T_x \phi^{kl(\gamma)} | T_x \mathcal{F})}{|\det(1 - T_x \phi^{k|l(\gamma)} | T_x X / \mathbb{R} Y_{\phi,x})|} = \frac{\det(1 - T_x \phi^{kl(\gamma)} | T_x \mathcal{F})}{|\det(1 - T_x \phi^{k|l(\gamma)} | T_x \mathcal{F})|}.$$

Here  $x$  is any point on  $\gamma$ . Namely, for  $k \geq 1$  this equals  $\varepsilon_\gamma(k)$  whereas for  $k \leq -1$  we obtain

$$(28) \quad \varepsilon_\gamma(|k|) \det(-T_x \phi^{k l(\gamma)} | T_x \mathcal{F}) = \varepsilon_\gamma(k) |\det(T_x \phi^{k l(\gamma)} | T_x \mathcal{F})|.$$

The expression on the left hand side of (40) motivated our conjecture about the contributions on  $\mathbb{R}^*$  from the fixed points  $x$ . Since  $Y_{\phi,x} = 0$ , they should be given by:

$$\frac{\det(1 - T_x \phi^t | T_x \mathcal{F})}{|\det(1 - T_x \phi^{|t|} | T_x X)|} \stackrel{!}{=} W_x.$$

3) One can prove that in the manifold setting of theorem 3.3 we have

$$|\det(T_x \phi^{k l(\gamma)} | T_x \mathcal{F})| = 1.$$

By (26), our working hypotheses 5.6 is therefore compatible with formula (12). Compatibility with conjecture 3.1 is clear.

4) We will see below that in our new context metrics  $g$  on  $T\mathcal{F}$  can exist for which the flow has the conformal behaviour (22). Assuming we are in such a situation and that  $\mathcal{F}$  is 2-dimensional, we have:

$$|\det(T_x \phi^{k l(\gamma)} | T_x \mathcal{F})| = e^{k l(\gamma)} \quad \text{for } x \in \gamma, k \in \mathbb{Z}$$

and

$$|\det(T_x \phi^t | T_x \mathcal{F})| = e^t \quad \text{for a fixed point } x.$$

In the latter case, we even have by continuity:

$$\det(T_x \phi^t | T_x \mathcal{F}) = e^t,$$

the determinant being positive for  $t = 0$ . Hence by (28) the conjectured formula (26) reads as follows in this case:

$$(29) \quad \sum_{n=0}^2 (-1)^n \text{Tr}(\phi^* | \bar{H}_{\mathcal{F}\mathcal{L}}^n(X)) = \sum_{\gamma} l(\gamma) \left( \sum_{k \geq 1} \varepsilon_\gamma(k) \delta_{k l(\gamma)} + \sum_{k \leq -1} \varepsilon_\gamma(k) e^{k l(\gamma)} \delta_{k l(\gamma)} \right) + \sum_x W_x.$$

Here:

$$W_x |_{\mathbb{R} > 0} = \varepsilon_x |1 - e^{\kappa_x t}|^{-1}$$

and

$$W_x |_{\mathbb{R} < 0} = \varepsilon_x e^t |1 - e^{\kappa_x |t|}|^{-1}.$$

This fits perfectly with the explicit formula (19) if all  $\varepsilon_{\gamma_p}(k) = 1$  and  $\varepsilon_{x_p} = 1$ . Namely if  $l(\gamma_p) = \log N_p$  for  $p \nmid \infty$  and  $\kappa_{x_p} = \kappa_p$  for  $p \mid \infty$ , then we have:

$$e^{k l(\gamma_p)} = e^{k \log N_p} = N_p^k \quad \text{for finite places } p$$

and

$$W_{x_p} = W_p \quad \text{on } \mathbb{R}^* \text{ for the infinite places } p .$$

5) In the setting of the preceding remark the automorphisms

$$e^{-\frac{k}{2}l(\gamma)} T_x \phi^{kl(\gamma)} \quad \text{of } T_x \mathcal{F} \quad \text{for } x \in \gamma$$

respectively

$$e^{-\frac{t}{2}} T_x \phi^t \quad \text{of } T_x \mathcal{F} \quad \text{for a fixed point } x$$

are orthogonal automorphisms. For a real  $2 \times 2$  orthogonal determinant  $O$  with  $\det O = -1$  we have:

$$\det(1 - uO) = 1 - u^2 .$$

The condition  $\varepsilon_\gamma(k) = +1$  therefore implies that  $\det(T_x \phi^{kl(\gamma)} | T_x \mathcal{F})$  is positive for  $k \geq 1$  and hence for all  $k \in \mathbb{Z}$ . The converse is also true. For a fixed point we have already seen directly that  $\det(T_x \phi^t | T_x \mathcal{F})$  is positive for all  $t \in \mathbb{R}$ . Hence we have the following information.

**Fact** In the situation of the preceding remark,  $\varepsilon_k(\gamma) = +1$  for all  $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$  if and only if on  $T_x \mathcal{F}$  we have:

$$T_x \phi^{kl(\gamma)} = e^{\frac{k}{2}l(\gamma)} \cdot O_k \quad \text{for } O_k \in \text{SO}(T_x \mathcal{F}) .$$

For fixed points,  $\varepsilon_x = 1$  is automatic and we have:

$$T_x \phi^t = e^{\frac{t}{2}} O_t \quad \text{for } O_t \in \text{SO}(T_x \mathcal{F}) .$$

In the number theoretical case the eigenvalues of  $T_x \phi^{\log N_p}$  on  $T_x \mathcal{F}$  for  $x \in \gamma_p$  would therefore be complex conjugate numbers of absolute value  $N_p^{1/2}$ . If they are real then  $T_x \phi^{\log N_p}$  would simply be multiplication by  $\pm N_p^{1/2}$ . If not, the situation would be more interesting. Are the eigenvalues Weil numbers (of weight 1)? If yes there would be some elliptic curve over  $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$  involved by Tate–Honda theory.

6) It would of course be very desirable to extend the hypotheses 5.6 to a conjectured equality of distributions on all of  $\mathbb{R}$ . By theorem 3.3 we expect one contribution of the form

$$\chi_{\text{Co}}(\mathcal{FL}, \mu) \cdot \delta_0 .$$

The analogy with number theory suggests that there will also be somewhat complicated contributions from the fixed points in terms of principal values which are hard to guess at the moment. After all, even the simpler conjecture 3.1 has not yet been verified in the presence of fixed points!

7) If there does exist a foliated dynamical system attached to  $\overline{\text{spec } \mathfrak{o}_K}$  with the properties dictated by our considerations we would expect in particular that for a preferred transverse measure  $\mu$  we have:

$$\chi_{\text{Co}}(\mathcal{FL}, \mu) = -\log |d_{K/\mathbb{Q}}| .$$

This gives some information on the space  $X$  with its  $\mathcal{FL}$ -foliation. If  $K/\mathbb{Q}$  is ramified at some finite place i.e. if  $d_{K/\mathbb{Q}} \neq \pm 1$  then  $\chi_{\text{Co}}(\mathcal{FL}, \mu) < 0$ . Now, since  $\bar{H}_{\mathcal{FL}}^2$  must be one-dimensional, it follows that

$$\chi_{\text{Co}}(\mathcal{FL}, \nu) < 0 \quad \text{for all non-trivial transverse measures } \nu .$$

Hence by a result of Candel [Ca] there is a Riemannian metric on  $T\mathcal{FL}$ , such that every  $\mathcal{FL}$ -leaf has constant curvature  $-1$ . Moreover  $(X, \mathcal{FL})$  is isomorphic to

$$\mathcal{O}(H, X)/\text{PSO}(2) .$$

Here  $\mathcal{O}(H, X)$  is the space of conformal covering maps  $u : H \rightarrow N$  as  $N$  runs through the leaves of  $\mathcal{FL}$  with the compact open topology. See [Ca] for details.

In the unramified case,  $|d_{K/\mathbb{Q}}| = 1$  we must have  $\chi_{\text{Co}}(\mathcal{FL}, \nu) = 0$  for all transverse measures by the above argument. Hence there is an  $\mathcal{FL}$ -leaf which is either a plane, a torus or a cylinder c.f. [Ca].

**5.8.** In this final section we describe a simple case where the working hypothesis 5.6 can be proved.

Consider an unramified covering  $f : M \rightarrow M$  of a compact connected orientable  $d$ -dimensional manifold  $M$ . We set

$$\bar{M} = \varprojlim (\dots \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \rightarrow \dots) .$$

Then  $\bar{M}$  is a compact topological space equipped with the shift automorphism  $\bar{f}$  induced by  $f$ . It can be given the structure of a  $C^{\infty, \infty}$ -laminated space as follows. Let  $\tilde{M}$  be the universal covering of  $M$ . For  $i \in \mathbb{Z}$  there exists a Galois covering

$$p_i : \tilde{M} \longrightarrow M$$

with Galois group  $\Gamma_i$  such that  $p_i = p_{i+1} \circ f$  for all  $i$ . Hence we have inclusions:

$$\dots \subset \Gamma_{i+1} \subset \Gamma_i \subset \dots \subset \Gamma_0 =: \Gamma \cong \pi_1(M, x_0) .$$

Writing the operation of  $\Gamma$  on  $\tilde{X}$  from the right, we get commutative diagrams for  $i \geq 0$ :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M} \times_{\Gamma} (\Gamma/\Gamma_{i+1}) & \xlongequal{\quad} & \tilde{M}/\Gamma_{i+1} & \xrightarrow{p_{i+1}} & M \\ \downarrow \text{id} \times \text{proj} & & \downarrow \text{proj} & & \downarrow f \\ \tilde{M} \times_{\Gamma} (\Gamma/\Gamma_i) & \xlongequal{\quad} & \tilde{M}/\Gamma_i & \xrightarrow{p_i} & M \end{array}$$

It follows that

$$(30) \quad \tilde{M} \times_{\Gamma} \bar{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \bar{M}$$

where  $\bar{\Gamma}$  is the pro-finite set with  $\Gamma$ -operation:

$$\bar{\Gamma} = \varprojlim \Gamma/\Gamma_i .$$

The isomorphism (30) induces on  $\bar{M}$  the structure of a  $C^{\infty, \infty}$ -laminated space with respect to which  $\bar{f}$  becomes leafwise smooth.

Fix a positive number  $l > 0$  and let  $\Lambda = l\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  act on  $\bar{M}$  as follows:  $\lambda = l\nu$  acts by  $\bar{f}^{\nu}$ . Define a right action of  $\Lambda$  on  $\bar{M} \times \mathbb{R}$  by the formula

$$(m, t) \cdot \lambda = (-\lambda \cdot m, t + \lambda) = (\bar{f}^{-\lambda/l}(m), t + \lambda) .$$

The suspension:

$$X = \bar{M} \times_{\Lambda} \mathbf{R}$$

is an  $a = d + 1$ -dimensional  $C^{\infty, \infty}$ -laminated space with a one-codimensional foliation  $\mathcal{F}$  as in 5.2. The leaves of  $\mathcal{F}$  are the fibres of the natural fibration of  $X$  over the circle  $\mathbf{R}/\Lambda$ :

$$X \longrightarrow \mathbf{R}/\Lambda .$$

The leaves are also the images of  $\bar{M} \times \{t\}$  for  $t \in \mathbf{R}$  under the natural projection. Translation in the  $\mathbf{R}$ -variable

$$\phi^t [m, t'] = [m, t + t']$$

defines an  $\mathcal{F}$ -compatible flow  $\phi$  on  $X$  which is everywhere transverse to the leaves of  $\mathcal{F}$  and in particular has no fixed points.

The map

$$\gamma \longmapsto \gamma_M = \gamma \cap (\bar{M} \times_{\Lambda} \Lambda)$$

gives a bijection between the closed orbits  $\gamma$  of the flow on  $X$  and the finite orbits  $\gamma_M$  of the  $\bar{f}$ - or  $\Lambda$ -action. These in turn are in bijection with the finite orbits of the original  $f$ -action on  $M$ . We have:

$$l(\gamma) = |\gamma_M| l .$$

**5.9 Theorem.** *In the situation of 5.8 assume that all periodic orbits of  $\phi$  are non-degenerate. Let  $\text{Sp}^n(\Theta)$  denote the set of eigenvalues with their algebraic multiplicities of the infinitesimal generator  $\Theta$  of  $\phi^{l^*}$  on  $H_{\mathcal{F}}^n(X)$ . Then the trace*

$$\text{Tr}(\phi^* | H_{\mathcal{F}}^n(X)) := \sum_{\lambda \in \text{Sp}^n(\Theta)} e^{l\lambda}$$

defines a distribution on  $\mathbf{R}$  and the following formula holds true in  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ :

$$\sum_{n=0}^{\dim \mathcal{F}} (-1)^n \text{Tr}(\phi^* | H_{\mathcal{F}}^n(X)) = \chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}\mathcal{L}, \mu) \cdot \delta_0 + \sum_{\gamma} l(\gamma) \left( \sum_{k \geq 1} \varepsilon_{\gamma}(k) \delta_{kl(\gamma)} + \sum_{k \leq -1} \varepsilon_{\gamma}(|k|) \det(-T_x \phi^{k l(\gamma)} | T_x \mathcal{F}) \delta_{kl(\gamma)} \right) .$$

Here  $\gamma$  runs over the closed orbits of  $\phi$  and in the sum over  $k$ 's any point  $x \in \gamma$  can be chosen. Moreover  $\chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}\mathcal{L}, \mu)$  is the Connes' Euler characteristic of  $\mathcal{F}\mathcal{L}$  with respect to a certain canonical transverse measure  $\mu$ . Finally we have the formula:

$$\chi_{\text{Co}}(\mathcal{F}\mathcal{L}, \mu) = \chi(M) \cdot l .$$

The definition of  $\mu$  and the proof of the theorem will be given elsewhere.

**Example** Let  $E/\mathbf{F}_p$  be an ordinary elliptic curve over  $\mathbf{F}_p$  and let  $\mathbf{C}/\Gamma$  be a lift of  $E$  to a complex elliptic curve with  $CM$  by the ring of integers  $\mathfrak{o}_K$  in an imaginary quadratic field  $K$ . Assume that the Frobenius endomorphism of  $E$  corresponds

to the prime element  $\pi$  in  $\mathfrak{o}_K$ . Then  $\pi$  is split,  $\pi\bar{\pi} = p$  and for any embedding  $\mathbb{Q}_l \subset \mathbb{C}, l \neq p$  the pairs

$$(H_{\text{ét}}^*(E \otimes \bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{C}, \text{Frob}^*) \quad \text{and} \quad (H^*(\mathbb{C}/\Gamma, \mathbb{C}), \pi^*)$$

are isomorphic. Setting  $M = \mathbb{C}/\Gamma, f = \pi$  we are in the situation of 5.8 and we find:

$$X = (\mathbb{C} \times_{\Gamma} T_{\pi}\Gamma) \times_{\Lambda} \mathbb{R}.$$

Here

$$T_{\pi}\Gamma = \varprojlim \Gamma/\pi^i\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$$

is the  $\pi$ -adic Tate module of  $\mathbb{C}/\Gamma$ . It is isomorphic to the  $p$ -adic Tate module of  $E$ .

Setting  $l = \log p$ , so that  $\Lambda = (\log p)\mathbb{Z}$  and passing to multiplicative time,  $X$  becomes isomorphic to

$$X \cong (\mathbb{C} \times_{\Gamma} T_{\pi}\Gamma) \times_{p^{\mathbb{Z}}} \mathbb{R}_+^*$$

which may be a more natural way to write  $X$ . Note that  $p^{\nu}$  acts on  $\mathbb{C} \times_{\Gamma} T_{\pi}\Gamma$  by diagonal multiplication with  $\pi^{\nu}$ . It turns out that the right hand side of the dynamical Lefschetz trace formula established in theorem 5.9 equals the right hand side in the explicit formulas for  $\zeta_E(s)$ . Moreover the metric  $g$  on  $T\mathcal{F}$  given by

$$g_{[z,y,t]}(\xi, \eta) = e^t \text{Re}(\xi\bar{\eta}) \quad \text{for } [z, y, t] \text{ in } (\mathbb{C} \times_{\Gamma} T_{\pi}\Gamma) \times_{\Lambda} \mathbb{R}$$

satisfies the conformality condition (9) for  $\alpha = 1$ . The proof of Theorem 2.1 can be easily adapted to  $X$  above and shows that  $\Theta = \frac{1}{2} + S$  on  $\bar{H}_{\mathcal{F}\mathcal{L}}^1(X)$  where  $S$  is skew symmetric. This gives a dynamical proof for the Riemann hypotheses for  $\zeta_E(s)$  along the lines that we hope for in the case of  $\zeta(s)$ . The construction of  $(X, \phi')$  that we made for ordinary elliptic curves is misleading however, since it almost never happens that a variety in characteristic  $p$  can be lifted to characteristic zero *together with its Frobenius endomorphism*. Moreover for ordinary elliptic curves the Riemann hypotheses can already be proved using Hodge cohomology of the lifted curve. This was essentially Hasse's proof.

Our present dream for the general situation is this: To an algebraic scheme  $X/\mathbb{Z}$  one should first attach an infinite dimensional dissipative dynamical system, possibly using  $\text{GL}_{\infty}$  in some way. The desired dynamical system should then be obtained by passing to the finite dimensional compact global attractor, c.f. [La] Part I.

## References

[AK1] J.A. Álvarez López, Y. Kordyukov, Long time behaviour of leafwise heat flow for Riemannian foliations. *Compositio Math.* **125** (2001), 129–153  
 [AK2] J. Álvarez López, Y. Kordyukov, Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one. Preprint 2000  
 [A] M.F. Atiyah, Elliptic operators and compact groups. Springer LNM **401**, 1974  
 [Ba] K. Barner, On A. Weil's explicit formula. *J. Reine Angew. Math.* **323** (1981), 139–152  
 [Bi] J.-M. Bismut, Complex equivariant intersection, excess normal bundles and Bott-Chern currents. *Comm. Math. Phys.* **148** (1992), 1–55  
 [Ca] A. Candel, Uniformization of surface laminations. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4<sup>e</sup> série **26** (1993), 489–516

- [Co] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Sel. math.*, New ser. **5** (1999), 29–106
- [D1] C. Deninger, Evidence for a cohomological approach to analytic number theory. in: Joseph, Rentschler (eds.): *Proceedings of the EMS conference 1992*, 491–510, Birkhäuser 1994
- [D2] C. Deninger, Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces. *Doc. Math. J. DMV. Extra Volume ICM I* (1998), 23–46
- [DS1] C. Deninger, W. Singhof, A counterexample to smooth leafwise Hodge decomposition for general foliations and to a type of dynamical trace formulas. *Ann. Int. Fourier, Grenoble*, **51**, 1 (2001), 209–219
- [DS2] C. Deninger, W. Singhof, A note on dynamical trace formulas. To appear in a proceedings volume on dynamical systems edited by M.L. Lapidus, M. van Frankenhuisen
- [DS3] C. Deninger, W. Singhof, Real polarizable Hodge structures arising from foliations, Preprint 2001
- [DSch] N. Dumford, J.T. Schwartz, *Linear operators, Parts I and II*. Wiley Classics Library 1988
- [Go] C. Godbillon, *Feuilletages*. *Progress in Math.* **98**, Birkhäuser 1991
- [Gu] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators. *Duke Math. J.* **44** (1977), 485–517
- [La] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge university press 1991
- [Laz] C. Lazarov, Transverse index and periodic orbits. *GAF A* **10** (2000), 124–159
- [MS] C.C. Moore, C. Schochet, *Global analysis on foliated spaces*. *MSRI Publications* **9**, Springer 1988
- [M] B. Mümken, Thesis in preparation
- [N] J. Neukirch, *Algebraic number theory*. Springer Grundlehren **322**, 1999
- [P] S.J. Patterson, On Ruelle’s zeta-function. *Israel Math. Conf. Proc.* **3** (1990), 163–184
- [So] C. Soulé, Sur les zéros des fonctions  $L$  automorphes. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), 955–958
- [Si] I.M. Singer, Index theory for elliptic operators, *Proc. Symp. Pure Math.* **28** (1973), 11–31
- [Su] D. Sullivan, Linking the universalities of Milnor-Thurston Feigenbaum and Ahlfors-Bers. In: *Topological methods in modern mathematics*. Publish or Perish 1993, pp. 543–564.

Mathematisches Institut  
Westf. Wilhelms-Universität  
Einsteinstr. 62  
48149 Münster  
deninge@math.uni-muenster.de

(Eingegangen 27.08.2001)



# Mathematical Modeling, Design, and Optimization of Mobile Communication Networks

R. Mathar, RWTH Aachen

## 1 Introduction

It is generally known that stochastic modeling and algorithms are an essential part of modern digital radio communication. *Statistical Signal Detection* and *Information Theory* are typical examples of fields which use complex mathematical models for optimum channel estimation and symbol detection, source and channel coding, as well as error correction methods.

It is the intention of this work to show how methods from stochastic modeling and optimization, besides the above, influence the deployment of mobile communication networks. Mobile telephony and services are presently one of the fastest growing markets worldwide. In Europe, the existing second generation networks based on the GSM standard (GSM = global system for mobile communication) have more than 328.2 Million subscribers, worldwide there are more than 564.6 Million (July 2001, see [7]). A similar success is expected for the upcoming UMTS networks (UMTS = universal mobile telecommunication system). According to these figures, the transmission medium itself, a total available bandwidth of 335 MHz in Europe, is an extremely scarce resource. Efficient data compression techniques, detection algorithms and spatial reuse of radio frequency bands are all-important to increase the capacity of such networks.

To this aim, mathematical modeling and optimization techniques provide the appropriate tools as is shown in the following. Three particular subjects are selected to demonstrate the use of mathematics for improving mobile communication systems: channel allocation for frequency and time division multiple access (FD/TDMA, used in GSM), carrier-to-interference planning for code division multiple access, (CDMA, mainly employed in UMTS), and capacity considerations for CDMA via spatial stochastic processes. The subsequent material is divided into accordant sections.

## 2 Channel Allocation

We start with a brief description of some basic principles of GSM cellular networks. The available bandwidth is divided into subchannels of 200 KHz each

for radio transmission. Assume that  $N$  channels are available, labeled  $1, \dots, N$  in the following. Channels are used to connect mobile stations to so called *base transmitter stations* (BTS), which form the access points to the fixed network behind. The area where a BTS serves mobiles is called the corresponding *cell*. Cells will be labeled by integers  $1, \dots, z$ .

Channels can be reused if cells are spatially separated. However, because of interference the same or adjacent channels must not be used in neighboring cells. The amount of interference when channel  $k$  is used in cell  $i$  and channel  $l$  is used in cell  $j$  is measured by the *interference probability*  $f_{ikjl}$ . This value is usually calculated with the help of radio wave propagation prediction tools. It is defined as the ratio of the area between cells  $i$  and  $j$  where interference is too high, divided by the area of the union of cells  $i$  and  $j$ .

In GSM networks there are two classes of channels with different tasks and quality requirements. *Traffic channels* (TCH) are used for transmitting speech and data signals, while *broadcast control channels* (BCCH) carry signalling, paging and network control information. A moderate interference probability is acceptable for TCHs, BCCHs should be interference free to the highest achievable degree. If  $f_{ikjl}$  exceeds a certain threshold for  $l \in \{k, k \pm 1, k \pm 2\}$ , an according minimum channel separation  $c_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$  applies. Typical examples for threshold values are 6% for TCHs and 2% for BCCHs. The minimum channel distances between pairs of cells are combined in *compatibility matrices*

$$\mathbf{C}^{(TT)} = (c_{ij}^{(TT)}), \quad \mathbf{C}^{(BB)} = (c_{ij}^{(BB)}), \quad \mathbf{C}^{(BT)} = (c_{ij}^{(BT)}), \quad i, j = 1, \dots, z.$$

$c_{ij}^{(TT)}$  denotes the minimum channel distance between cells  $i$  and  $j$  for traffic channels,  $c_{ij}^{(BB)}$  and  $c_{ij}^{(BT)}$  are the corresponding values for broadcast control and between broadcast control and traffic channels, respectively.

A channel design is described by a pair of binary matrices

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{with} \quad \mathbf{X} = (x_{ik}), \quad \mathbf{Y} = (y_{ik}) \in \{0, 1\}^{z \times N}.$$

$x_{ik} = 1$  means that channel  $k$  is used as a TCH in cell  $i$ , otherwise  $x_{ik} = 0$ . Accordingly,  $y_{ik} = 1$  denotes that channel  $k$  serves as a BCCH in cell  $i$ .

Each cell  $i$  needs a number  $b_i$  of BCCHs, in most cases  $b_i = 1$  is sufficient. Furthermore, a number  $r_i$  of traffic channels is required to achieve a blocking probability of less than 1%, say,  $r_i$  is obtained from Erlang's B-formula under the assumption of a certain call arrival rate and call duration.

Channels may also be banned or prescribed in cell  $i$ . This can be easily included by defining sets  $V_i^{(T)}, G_i^{(T)} \subset \{1, \dots, z\}$  and setting

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{if } k \in G_i, \\ 0, & \text{if } k \in V_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, z.$$

Analogously, BCCHs may be preset or banned by defining analogous sets  $V_i^{(B)}$  and  $G_i^{(B)}$  for  $y_{ik}$ .

The aim now is to determine a channel design  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  such that each cell receives the required number of channels, none of the compatibility constraints is violated, and presets as well as forbidden channels are observed. Since  $b_i$  are small

(mostly  $b_i = 1$ ), assigning only BCCHs without TCHs is an easy preliminary task, which can be done by obvious simple heuristics. The resulting solution can be used as an admissible initial design for the following channel allocation problem, formulated as an integer linear program.

CAP

---

$$(1) \quad \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^z \sum_{k=1}^N x_{ik}$$

such that

$$(2) \quad \sum_{k=1}^N x_{ik} \leq r_i, \quad i = 1, \dots, z$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^N y_{ik} = b_i, \quad i = 1, \dots, z$$

$$(4) \quad x_{ik} + x_{j\ell} \leq 1, \quad (i, k) \neq (j, \ell) \text{ with } |k - \ell| < c_{ij}^{(TT)}$$

$$(5) \quad y_{ik} + y_{j\ell} \leq 1, \quad (i, k) \neq (j, \ell) \text{ with } |k - \ell| < c_{ij}^{(BB)}$$

$$(6) \quad x_{ik} + y_{j\ell} \leq 1, \quad (i, k), (j, \ell) \text{ with } |k - \ell| < c_{ij}^{(BT)}$$

$$x_{ik} = 1, k \in G_i^{(T)}, \quad y_{jk} = 1, k \in G_i^{(B)}, i = 1, \dots, z$$

$$x_{ik} = 0, k \in V_i^{(T)}, \quad y_{jk} = 0, k \in V_i^{(B)}, i = 1, \dots, z$$

$$x_{ik}, y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, z, k = 1, \dots, N$$


---

In a direct approach one would use  $\sum_{k=1}^N x_{ik} = r_i$  instead of (2). However, in this case the set of feasible solutions may be empty. If not, each feasible solution would already be optimal such that solving the problem consists of finding a feasible initial design. Under condition (2), the empty design (all  $x_{ik} = 0$ ) forms a trivial initial solution to start any LP solver from, a great advantage from a computational point of view.

In the above form, constraints (2) and (3) ensure that the required number of TCHs per cell is not exceeded, and the number of BCCHs is kept as required. An optimal solution of CAP with  $\sum_k x_{ik} = r_i$  for all  $i = 1, \dots, z$  represents a design which satisfies all channel requirements  $r_i$  without violating any of the compatibility constraints. If for an optimal solution  $\sum_k x_{ik} < r_i$  for some  $i$ , then there exists no admissible design which satisfies all channel requirements. Either  $r_i$ ,  $b_i$ , or the  $c_{ij}$ -values from the interference requirements are too stringent.

(4)–(6) guarantee that none of the compatibility constraints is violated. The remaining equations preset variables according to banned and prescribed channels per cell.

The above integer linear program essentially describes a node packing problem, i.e., maximizing the number of non-adjacent nodes in a graph, and hence is

NP hard (see [5]). Even after appropriate preprocessing in form of reducing the huge number of pairwise constraints in (4)–(6) by clique constraints (see [8] for details), a solution of the full problem is completely out of reach for real world instances with several ten thousands of variables and constraints. For practical applications fast and efficient heuristics are of utter importance. The following procedure has proved to be superior over local search and greedy type algorithms [4, 16, 19], stochastic algorithms like [3, 11, 12], or neural network approaches [2, 10].

---

`iterative_CAP`

---

Iterate the following steps:

- From the current solution select a cell  $i_0$  and a small neighborhood of cells  $\mathcal{A} = \{i_0, i_1, \dots, i_n\}$  such that the number of corresponding variables  $x_{i_l, k}, y_{i_l, k}$ ,  $l = 0, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, N$  allows for an exact solution of CAP.
  - For all cells  $i \in \mathcal{A}$  include  $k$  in  $V_i^{(T)}, V_i^{(B)}$ , respectively, whenever one of the compatibility constraints in (4)–(6) is violated for some  $j \notin \mathcal{A}$ ,  $l \in \{1, \dots, N\}$ .
  - Fix all variables with first index  $j \notin \mathcal{A}$  and solve CAP over variables with first index  $i \in \mathcal{A}$ .
- 

Algorithm `iterative_CAP` has been successfully tested for difficult channel assignment problems in real networks with up to 1800 cells and only about 60 available channels. In most cases, optimal(!) solutions were found in less than 1 hour on a standard PC. Optimality can be easily verified when the trivial upper bound  $\sum_i r_i$  is attained by objective function (1).

Assume that the final result of `iterative_CAP` is optimal for CAP, hence it satisfies all compatibility constraints (4)–(6), and furthermore

$$(7) \quad \sum_{k=1}^N x_{ik} = r_i \quad \text{for all } i = 1, \dots, z.$$

Obviously this solution is not unique. Amongst all solutions the one with least total interference is most desirable. Applying the same principles as above, however with a quadratic objective function, gives a heuristic algorithm for determining a channel design with the least sum of all remaining interferences, but still observing all compatibility constraints. The above optimal solution of CAP may be used as an initial channel design for the following quadratic subprogram.

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i, j \in \mathcal{A}} \sum_{k, \ell} f_{ikjl} (x_{ik} + y_{ik}) (x_{j\ell} + y_{j\ell}) \\ & + \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \mathcal{A}^c} \sum_{k, \ell} f_{ikjl} (x_{ik} + y_{ik}) (x_{j\ell} + y_{j\ell}) \end{aligned}$$

such that (7) and (3)–(6) hold. Observe that only the first part of (8) is quadratic, the second is linear since by the selection of the subproblem  $x_{j\ell}$  and  $y_{j\ell}$  are fixed.

Figure 1 shows the impressive interference reduction by the above algorithm for a real network. BTS positions are indicated by triangles. Interferences between pairs of cells are depicted by edges. Neither channel design violates any com-

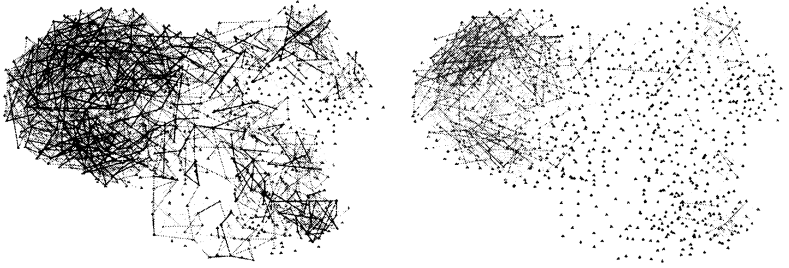


Fig. 1. Visualization of two channel designs for the same network. BTSs are indicated by triangles, pairwise interferences by edges. Labeling of interferences: solid 4–6%, dotted 2–4%, light grey 1–2%. The left design is optimal for CAP, obtained by iterative .CAP. It is used as an initial design to generate the right hand side by (8).

patibility constraint. Both are optimal solutions of CAP under objective function (1), with constraint (2) satisfied to equality. The design on the right hand side is obtained after minimizing the sum of all interferences by (8).

### 3 Carrier-to-Interference Planning

Because of its higher flexibility and expected increased capacity, code division multiple access will be mainly used for third generation mobile networks. In UMTS, all subscribers use the same bandwidth of 5 MHz. Different users are separated by multiplying each signal with nearly orthogonal codes which are known both to the transmitter and the receiver. Planning of such networks is essentially different from planning frequency division multiple access, where interference is avoided by separating in the frequency domain. After despreading and filtering the bit energy-to-noise ratio  $E_b/N_0$  is obtained as

$$(9) \quad \frac{E_b}{N_0} = s \cdot \frac{C}{I},$$

where  $s$  denotes the spreading gain.  $C/I$  is the carrier-to-interference ratio, i.e., the power of the usable signal divided by the cumulated power of all interfering sources.

The probability of bit error is given by  $Q(\sqrt{2E_b/N_0})$  with  $Q(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$  the exceedance probability of the standard normal distribution (see, e.g., [18]). Hence, the most important quantity for a-priori planning of CDMA networks is the carrier-to-interference ratio in the considered area. Base stations should be placed, and antenna patterns be selected as to uniformly maximize the  $C/I$  ratio.

In the following, this objective is formalized as a combinatorial optimization problem. The basic approach is to select an optimal subset of BTS sites and antenna patterns from a pool of available candidates. In practice, networks are deployed according to this principle.

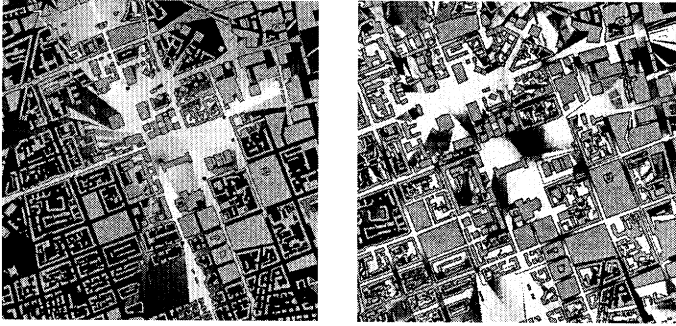


Fig. 2. The left picture shows the ratio wave propagation pattern for the base station in the middle with an omnidirectional antenna. Field strength is coded by grey scales with high values in the middle decreasing to dark shades at the boundaries. Furthermore, it contains a pattern of seven BTS (black circles) which captures 210 out of 236 traffic nodes optimally. The right hand side shows  $C/I$  values for the optimal solution (light = large  $C/I$  to dark = low  $C/I$ ).

For each candidate BTS site with a certain antenna pattern it has to be known what the radiated field strength at any position of the considered area would be. In urban environments this information is provided by a very fast cube oriented ray launching algorithm, especially developed for this purpose (see [17]). The left picture of Fig. 2 shows a typical radio wave propagation pattern in Munich. Field strength and  $C/I$  values are coded by grey scales.

Spatial traffic patterns are represented by  $q$  traffic nodes, each endowed with a mark (or weight)  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , proportional to the required link capacity. Let  $p$  denote the number of available candidate base station configurations. The problem is to select cell sites such that a given financial budget is not exceeded and the covered traffic is maximized at low interference. Selecting a subset of BTS configurations is described by binary variables  $x_i \in \{0, 1\}$ , with the meaning

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{if BTS configuration } i \text{ is used} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, p.$$

A vector  $(x_1, \dots, x_p) \in \{0, 1\}^p$  is called a *base station design*.

From the radio wave propagation tool the field strength  $v_{ij}$  of BTS candidate  $i \in \{1, \dots, p\}$  at traffic node  $j \in \{1, \dots, q\}$  is known. Let  $V = (v_{ij})$  denote the  $p \times q$  matrix of field strength values.

A minimum amount  $\beta$  of field strength is necessary to establish a connection between BTS  $i$  and traffic node  $j$ . This is described by the binary matrix  $T = (t_{ij})_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, q}$  with

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{whenever } v_{ij} \geq \beta \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

Moreover, the  $C/I$  ratio should not fall short of a given threshold  $\gamma$ . Under BTS design  $(x_1, \dots, x_p)$ , for a link from BTS  $i$  to traffic node  $j$  the  $C/I$  ratio is given by  $v_{ij} / \sum_{\ell \neq i} v_{\ell j} x_{\ell}$ .

**Definition 3.1** Traffic node  $j$  is called *captured* under base station design  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \{0, 1\}^p$  if there is some  $i \in \{1, \dots, p\}$  such that

$$t_{ij} = 1 \quad \text{and} \quad v_{ij}x_i > \gamma \sum_{\ell \neq i} v_{\ell j}x_{\ell}.$$

Since the threshold  $\gamma$  is independent of the particular scaling of  $v_{ij}$ , the field strength values, and  $\beta$  may be normalized as to satisfy

$$(10) \quad \sum_{\ell=1}^p v_{\ell j} \leq \frac{1}{\gamma} \quad \text{for all } j = 1, \dots, q.$$

The reason will become clear from (13). Condition (10) ensures that  $v_{ij}x_i - \gamma \sum_{\ell \neq i} v_{\ell j}x_{\ell} \geq -1$  to avoid negative values as upper bounds for the binary variables  $u_{ij}$ . Their interpretation is

$$(11) \quad u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if TN } j \text{ is captured by BTS } i, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q.$$

Let  $c_i$  represent the costs of building base station candidate  $i$ . Maximizing the weighted number of captured traffic nodes such that a maximum budget of  $K$  units is not exceeded now reads as follows.

`cell_site_selection`

---

$$(12) \quad \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q r_j u_{ij}$$

such that

$$(13) \quad u_{ij} \leq v_{ij}x_i - \gamma \sum_{\ell \neq i} v_{\ell j}x_{\ell} + 1 \quad \text{for all } i, j$$

$$(14) \quad u_{ij} \leq t_{ij}x_i \quad \text{for all } i, j$$

$$(15) \quad \sum_{i=1}^p c_i x_i \leq K$$

$$u_{ij}, x_i \in \{0, 1\} \quad \text{for all } i, j$$


---

Objective function (12) is the weighted number of captured traffic nodes. If  $\gamma > 1$ , multiple capturing is prohibited by constraint (13). By Definition 3.1 and normalizing condition (10), constraints (13) and (14) ensure that only captured traffic nodes are counted.  $u_{ij} = 1$  holds for the optimum solution if traffic node  $j$  is captured by base station  $i$  and base station  $i$  is used. Otherwise  $u_{ij}$  will be zero.

(15) means that a total budget of  $K$  must not be exceeded by an admissible solution. Choosing  $c_i = 1$  simply bounds the number of possible base stations by  $K$ . If constraint (15) is omitted, there is no limit on the number of base stations, or their costs, respectively.

Particular traffic patterns can be represented by the specific choice of the traffic nodes. If each traffic node is considered as an active mobile, then the number of nodes connected to each BTS must be limited by some integer  $M$ , say. This can be easily included by adding the constraint

$$\sum_{j=1}^q u_{ij} \leq M \quad \text{for all } i$$

to `cell_site_selection`.

# BTS	$K$	# TN	tree size	nodes vis. %	time	opt. found after
51	4	1106	$2.72 * 10^5$	8.4	18s	16s
228	4	1106	$1.12 * 10^8$	0.35	105s	14s
329	4	1106	$4.85 * 10^8$	0.34	410s	29s
51	7	1106	$1.36 * 10^8$	1.2	392s	250s
228	7	1106	$5.98 * 10^{12}$	0.0034	13h	0.57h
329	7	1106	$7.93 * 10^{13}$	0.00091	49h	2.37h

Table I: Computational results of the branch-and-bound algorithm, performance criteria and running times for 1106 traffic nodes.

A similar problem, however neglecting the capture effect, has been treated in [13]. In [6] it is shown that `cell_site_selection` is NP-hard by reducing the problem of finding an independent set of maximum cardinality in a graph to an instance of `cell_site_selection`.

To determine exact solutions of `cell_site_selection` for realistic problem sizes, a sophisticated branch-and-bound algorithm has been developed. Bounds are calculated by considering the maximum achievable number of captured traffic nodes when including a new candidate base station configuration. In each step the active tree is rearranged as to deal with the larger increments of successive bounds first. This is a greedy type strategy for the cutting bounds, which, according to our experience in numerical examples, yields the optimum solution in early stages of the algorithm.

Table 1 shows the results of some test examples with 1106 traffic nodes. In each case an optimal solution could be found on a standard PC under operating system Linux. The first column indicates the number of possible base station configurations to select from.  $K$  is the maximum number of base stations, i.e.,  $c_i = 1$  for all  $i = 1, \dots, p$ . The following three columns show performance criteria of the algorithm, namely the total tree size, the percentage of visited nodes, and the overall computing time. From Table 1 it can also be seen that increasing the critical quantity # BTS drastically decreases the percentage of visited nodes in the branch-and-bound tree. Increasing the maximum number  $K$  of allowable BTS leads to the same effect.

Since cutting bounds are determined by a greedy policy, the algorithm is also well suited as an optimization heuristic. The optimal solution is usually found in a small fraction of the total computation time, as is shown in the last column of Table 1. Hence, early stopping of the algorithm usually yields a solution close to or equal to the optimum.



An interesting real problem with micro cells in the inner city of Munich with  $K = 7$  has been solved. 236 traffic nodes and 50 candidate base stations are used. For each candidate a complete radio wave prediction in the area containing all traffic nodes has been calculated in approximately 6 seconds. The left picture in Figure 2 shows the optimal selection of base stations, each location is marked by a black circle. It also contains the radio wave propagation pattern of the BTS in the middle. 210 out of 236 traffic nodes are actually captured by the optimal solution. The right hand picture shows the according  $C/I$  values coded by colors. Light means a high, and dark a low  $C/I$  ratio.

Further optimality criteria as well as combining channel allocation and optimal cell site selection into one single setup are treated in [9, 15].

#### 4 Capacity of CDMA Systems via Stochastic Modeling

The final section of this paper deals with model based investigations of future UMTS networks capacity. Each user should achieve a minimum bit energy-to-noise ratio of 5 dB = 3.16, cp. (9),

$$\frac{E_b}{N_0} = s \cdot \frac{C}{I} \geq e_{\min} = 3.16.$$

Let  $\omega$  denote the chip rate of the CDMA system, e.g.,  $\omega = 3.84$  MChip/s in UMTS. The spreading factor  $s_i$  of user  $i$  transmitting at a rate of  $d_i$  Bit/s is obtained from

$$s_i = \frac{\omega}{d_i}, \quad i = 1 \dots, n.$$

Let  $p_i$  denote the power of user  $i$  received at the base station, and  $\tau$  the power of the interference from other cells plus the background noise.

In order to meet the minimum required  $e_{\min}$  for each user at the minimum possible power, the following system of equations must be satisfied

$$(16) \quad s_i \cdot \frac{p_i}{\sum_{j \neq i} p_j + \tau} = e_{\min}, \quad i = 1 \dots, n.$$

Let  $s'_i = s_i/e_{\min}$  denote the *effective spreading gain*, and  $\omega' = \omega/e_{\min}$  the *effective chip rate*. System (16) then reads as

$$(17) \quad (s'_i + 1) \cdot p_i = \sum_{j=1}^n p_j + \tau, \quad i = 1 \dots, n.$$

Resolving (17) for  $p_i$  yields an interesting upper bound for the maximum total transmission capacity (for a proof of the following theorem see [14]).

**Theorem 4.1** *The unique solution of (17) is given by*

$$(18) \quad p_i = \frac{\tau}{(s'_i + 1)(1 - \sum_{j=1}^n 1/(s'_j + 1))}, \quad i = 1 \dots, n,$$

or equivalently in terms of the data rates  $d_i$ ,

$$(19) \quad p_i = \frac{\tau d_i}{\omega' - (\omega' + d_i) \sum_{j \neq i} d_j / (\omega' + d_j)}, \quad i = 1 \dots, n.$$

Even if infinite transmit power were available, outage occurs latest if

$$\sum_{j=1}^n 1/(s'_j + 1) \geq 1,$$

or equivalently, if

$$\sum_{j \neq i} d_j / (\omega' + d_j) \geq \omega' / (\omega' + d_i)$$

for some  $i$ .

The previous result is now extended by stochastic components. Let  $D_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , be a sequence of i.i.d. random variables with distribution  $G$ .  $D_i$  models the uplink data rate of user  $i$  in a cell. Let  $S'_i = \omega' / (D_i \cdot e_{\min})$  denote the corresponding effective spreading gain.

Disregarding any power constraints, from (18) it follows for a fixed number of users  $n$  that outage occurs whenever  $\sum_{j=1}^n 1/(S'_j + 1) \geq 1$ . Hence, an approximate condition for outage is  $\sum_{j=1}^n 1/S'_j \geq 1$ , or equivalently

$$\sum_{i=1}^n D_i \geq \omega' / e_{\min} = \omega'.$$

In reality, the number of users connected to a BTS is a random variable as well. This is included in the following model. We assume a circular cell shape with the BTS located in the middle. If users are scattered according to a two-dimensional Poisson point process, then the number of users in the circle segment between the rays at angle 0 and  $t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ , forms a homogeneous Poisson process  $N_t$  of intensity  $\lambda$ , say. The sum of data rates of all users in the circle segment from 0 to  $t$  is then given by

$$(20) \quad X_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i.$$

$X_t$  is a so called compound Poisson process, it has independent increments, and hence is Markovian (see, e.g., [1]). Fig. 3 shows a graphical representation of the model.

**Example 4.2** Assume there are  $m$  user classes, each demanding for transmission rate  $d_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , respectively. Let  $N_k$  be independent, Poisson distributed with parameter  $\lambda_k$ , modeling the random number of users of class  $k$  occurring in the whole cell.  $\sum_{k=1}^m N_k d_k$  is a compound of type (20) with  $t = 2\pi$ , and the probability that no outage occurs is given by

$$(21) \quad P\left(\sum_{k=1}^m N_k d_k \leq \omega'\right) = \sum_{n_1 d_1 + \dots + n_m d_m \leq \omega'} \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^{n_k}}{n_k!}$$

which can be evaluated numerically. In the case  $m = 2$  equation (21) simplifies to

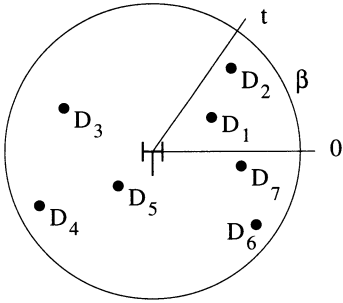


Fig. 3. A circular cell with the base station in the middle. Black dots indicate a spatial random process of users with random transmission rates  $D_1, \dots, D_7, X_t = D_1 + D_2$  in this case.

$$P(N_1 d_1 + N_2 d_2 \leq \omega') = \sum_{n_1=0}^{\lfloor \omega'/d_1 \rfloor} \sum_{n_2=0}^{\lfloor (\omega' - n_1 d_1)/d_2 \rfloor} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2}}{n_1! n_2!}$$

For applications in practice it is important to include the effect of beam forming antennas. We assume that a smart antenna is deployed at the BTS forming a receive beam of angle  $\beta$  with the mobile located on the center line, and filtering out all interference from stations outside the beam. Under the above assumptions outage happens in a fixed beam of width  $\beta$  if

$$I_\beta(t) = X_{t+\beta} - X_t > \omega/e_{\min} = \omega'$$

If  $t + \beta > 2\pi$ , then  $I_\beta(t)$  is cyclically extended as

$$I_\beta(t) = I_{t+\beta-2\pi}(0) + I_{2\pi-t}(t).$$

The probability that no outage occurs in the whole cell is given by

$$(22) \quad P(I_\beta(t) \leq \omega' \text{ for all } 0 \leq t < 2\pi).$$

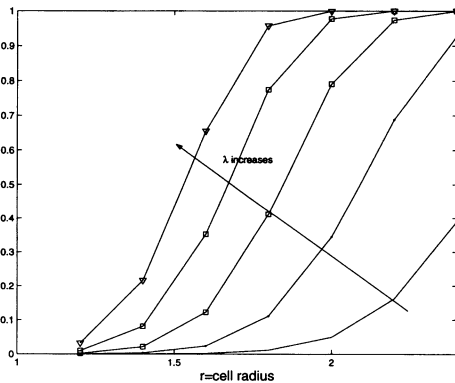


Fig. 4. Outage probability versus the radius of the cell for the intensities  $\lambda = 5, 7, 9, 11, 13$ .

Probability (22) can be represented by first conditioning on the number of mobiles and the angles  $t_i$  of their respective positions. Subsequent integration over the corresponding joint distribution yields the following result.  $\mathbf{1}[\cdot]$  denotes the indicator function.

**Theorem 4.3**

$$\begin{aligned}
 &P(I_\beta(t) \leq \omega' \text{ for all } 0 \leq t < 2\pi) \\
 &= \sum_{k \geq 0} P(N_{2\pi} = k) \\
 (23) \quad &\int_0^{2\pi} dt_1 \dots \int_{t_{k-1}}^{2\pi} dt_k \frac{k!}{(2\pi)^k} \int_0^\infty dG(d_1) \dots \int_0^\infty dG(d_k) \\
 &\prod_{1 \leq i \leq k} \left( \mathbf{1}[t_i > \beta] \mathbf{1} \left[ \sum_{1 \leq j \leq i} d_j \mathbf{1}[t_j + \beta > t_i] \leq \omega' \right] + \mathbf{1}[t_i \leq \beta] \right. \\
 &\left. \mathbf{1} \left[ \sum_{1 \leq j \leq i} d_j + \sum_{i+1 \leq j \leq k} d_j \mathbf{1}[t_j + \beta > 2\pi + t_i] \leq \omega' \right] \right).
 \end{aligned}$$

A proof of theorem 4.3 is given in [14].

(23) has been evaluated by Monte-Carlo integration for three different types of services as described in the following table.

Type of service	Bit rates (kb/s)
Voice	8
Service Class B	64
LCD 144	144

Each type is assumed to occur with the same probability  $1/3$ , hence  $G(D_i = 8) = G(D_i = 64) = G(D_i = 144) = 1/3$  for all  $i \in N$ .

The outage probability is calculated as a function of the cell radius  $r$  ranging between 1.2 km and 2.4 km. Figure 4 shows the results for five different intensities of the underlying Poisson process, namely  $\lambda = 5, 7, 9, 11, 13$  users/km<sup>2</sup>.

The outage probability increases with increasing  $\lambda$  and cell radius  $r$ . From the diagram the maximum allowable cell radius for a given outage probability can be determined. For example, to achieve an outage probability of 0.05 with an average user density of  $\lambda = 9$  users per km<sup>2</sup>, the maximum cell radius is approximately 1.5 km. Answers of this type are very helpful to determine the necessary base station density of CDMA mobile networks for guaranteeing a certain target capacity.

**5 Conclusions**

As outlined in the present work, mathematical modeling and algorithms are an essential part of understanding complex communication systems. For numerous questions, both on the physical and technical layer, as well as for conceiving random user behaviour and access, mathematics provides the right answers.

Optimization algorithms working on abstract models yield better solutions for existing networks, improve communication technology, and will help to deploy third generation networks. This aspect is of particular importance regarding the enormous financial burden from licensing the according bandwidth.

A number of challenging questions is still waiting for refined, comprehensive modeling and corresponding algorithmic solutions. Let me conclude with a short list: Capacity investigation and optimization for UMTS on the basis of stochastic modeling, heterogeneous hierarchical networks with layers of nested cells and corresponding access strategies, and finally cooperative network planning where also public concerns about minimized electromagnetic field strength will find their way into the radio network design process.

## References

- [1] *R.N. Bhattacharya, E.C. Waymire*: Stochastic Processes with Applications, Wiley, New York (1990).
- [2] *E. Del Re, R. Fantacci*: A dynamic channel allocation technique based on Hopfield neural networks, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **45** (1996), 26–32.
- [3] *M. Duque-Anton, D. Kunz, B. and Ruber*., Channel assignment for cellular radio using simulated annealing, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **42** (1993), 14–21.
- [4] *A. Gamst*: Homogeneous distribution of frequencies in a regular hexagonal cell system, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **31** (1982), 132–144.
- [5] *M.R. Garey and D.S. Johnson*: Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. H.W. Freeman, New York, 1979.
- [6] *C. Glaßer, S. Reith, H. Vollmer*: The Complexity of Base Station Positioning in Cellular Networks, Workshop on Approximation and Randomized Algorithms in Communication Networks (ARACNE), Geneva (2000), 167–177.
- [7] <http://www.gsmworld.com>
- [8] *M. Hellebrandt, F. Lambrecht, R. Mathar, T. Niessen, R. Starke*: Frequency allocation and linear programming. In: *IEEE Vehicular Technology Conference (CD)*, Houston (1999).
- [9] *U. Kohlhaas, R. Mathar, M. Schmeink*: Optimality criteria for the cell site selection of CDMA cellular networks, to appear in: *Modeling and Simulation Environment for Satellite and Terrestrial Communication Networks*, Proceedings of the European COST Telecommunications Symposium, Kluwer Academic Publishers, Boston (2001).
- [10] *D. Kunz*: Channel assignment for cellular networks using neural networks, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **40** (1991), 188–193.
- [11] *W.K. Lai, G.G. Coghill*: Channel assignment through evolutionary optimization, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **45** (1996), 91–95.
- [12] *R. Mathar, J. Mattfeldt*: Channel assignment in cellular radio networks, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **42** (1993), 647–656.
- [13] *R. Mathar, T. Niessen*: Optimum positioning of base stations for cellular radio networks, *Wireless Networks*, **6** (2000), 421–428.
- [14] *R. Mathar, M.-A. Remiche*: On the capacity of UMTS with directional antennas, Proceedings 10th Aachen Symposium on Signal Theory, Aachen (2001), 71–75.
- [15] *R. Mathar, M. Schmeink*: Integrated optimal cell site selection and frequency allocation for cellular radio networks, to appear in: *Informs Select Proceedings of the 2000 Telecommunications Conference*, Boca Raton (2000).
- [16] *J. Plehn*: Applied frequency assignment, In: *IEEE 44th Vehicular Technology Conference*, Stockholm (1994), 853–857.
- [17] *M. Schmeink, R. Mathar*: Preprocessed indirect 3D-ray launching for urban microcell field strength prediction, Proceedings AP 2000 Millenium Conference on Antennas and Propagation, Davos (2000).

- [18] *G. L. Stüber*: Principles of Mobile Communication, Kluwer Academic Publishers, Boston (1996).
- [19] *W. Wang and C.K. Rushforth*: An adaptive local-search algorithm for the channel-assignment problem (CAP), IEEE Transactions on Vehicular Technology, **45** (1996), 459–466.

Rudolf Mathar  
Lehr und Forschungsgebiet Stochastik,  
insbes. Anwendungen in der Informatik  
RWTH Aachen  
D-52056 Aachen  
mathar@stochastik.rwth-aachen.de

(Eingegangen 10.9.2001)

## Buchbesprechungen

**J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, Cohomology of Number Fields (Grundlehren 323)**, Berlin u. a., Springer 2000, 699 S., DM 179,-

Die Monographie „Kohomologie der Zahlkörper“ wurde von Jürgen Neukirch als zweiter Band seiner 1992 erschienenen Zahlentheorie (englische Übersetzung 1999) begonnen. Zur Zeit seines Todes, Anfang 1997, hatte er den algebraischen Teil, die Kohomologie der proendlichen Gruppen, vollendet. Kay Wingberg hatte bereits lebhaften Anteil an der Gestaltung des Buches genommen. Es war daher nur natürlich, daß er nach dem Tode von J. Neukirch zusammen mit seinem Schüler Alexander Schmidt daran ging, das Manuskript zu vollenden. Zwei Jahre lang haben es sich die beiden Autoren zur wissenschaftlichen Hauptaufgabe gemacht, alle wichtigen Zweige der Theorie zu einer Enzyklopädie der Kohomologie der Zahlkörper zusammenzufassen. Da, wo eine vollständige Darstellung des Gegenstandes den Rahmen des Buches gesprengt hätte, werden wenigstens die Grundlagen beschrieben und die Hauptsätze mit ihren Konsequenzen genannt. Das gilt zum Beispiel von der Iwasawa-Theorie.

Wie schon in der Zahlentheorie von Neukirch geht es den Verfassern weniger darum, eine Einführung in die Theorie zu bringen, die für den Anfänger verständlich wäre, sondern vielmehr darum, die Hauptlinien der Theorie und ihre Einordnung in die heutige Mathematik, die in ihrem algebraischen Aspekt von A. Grothendieck geprägt wurde, darzustellen. In diesem Sinne halte ich das Buch für überaus wertvoll und für den am Gegenstand interessierten Mathematiker in Zukunft für unentbehrlich. Serre's berühmte Lecture Notes „Cohomologie Galoisienne“ [SE] sollte man unbedingt schon studiert haben, wenn man an die Lektüre der vorliegenden Monographie geht. Als Einführung in einige Aspekte der Theorie bleibt auch das Büchlein „Galoissche Theorie der  $p$ -Erweiterungen“ [KO] des Referenten geeignet.

Wie J.-P. Serre in [SE] hervorhebt, gehen die hauptsächlichsten Ideen zur Galois-Kohomologie auf J. Tate zurück. Dieser hat seine Ergebnisse in seinem Vortrag auf dem ICM Stockholm 1962 dargestellt. Ein Teil dieser Ergebnisse wurde unabhängig von G. Poitou erzielt und bewiesen. Die Tateschen Sätze von 1962 wurden allgemein von K. Haberland in einem 1978 erschienenen Buch auf der Grundlage von [SE] bewiesen. In einem Anhang zu diesem Buch gibt Th. Zink eine Begründung der Tateschen Ergebnisse mit Hilfe der Etale Kohomologie. Diesen Aspekt haben die Verfasser der vorliegenden Monographie jedoch nicht berücksichtigt. Sie schreiben in der Einleitung: ... *it is an easy exercise (at least in dimension  $\leq 1$ ) to translate between the Galois and the etale languages*. Es ist jedoch eines ihrer Hauptanliegen, die Ergebnisse von Poitou und Tate ausführlich und möglichst allgemein darzustellen. Ein weiteres Hauptanliegen besteht in einem vollständigen Beweis des Satzes von Shafarevich, daß jede auflösbare endliche Gruppe Galoisische Gruppe einer normalen Erweiterung eines vorgegebenen Zahlkörpers von endlichem Grade über  $Q$  ist. Man kann nur hoffen, daß sich nach so vielen Ansätzen der letzten 15 Jahre dieser Beweis als fehlerfrei erweisen wird.

Wir kommen nun auf den Inhalt der einzelnen Kapitel des Buches zu sprechen. Die ersten fünf Kapitel behandeln die Theorie der proendlichen Gruppen. Im ersten Kapitel finden sich die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften zur Kohomologie der proendlichen Gruppen auf der Grundlage homogener Koketten. Dieses Kapitel ist in gewisser Weise elementar. Im zweiten Kapitel wird dann der Zusammenhang mit der abstrakteren homologischen Algebra hergestellt. Zum Beispiel wird die Transgression in Kapitel 1 als konkrete Abbildung wie in [KO] definiert. In Kapitel 2 folgt dann die Definition mit Hilfe der Hochschild-Serre Sequenz. Erstmals wird in einem Buch gezeigt, daß

beide Definitionen zur gleichen Abbildung führen. Dabei folgen die Verfasser der Diplomarbeit von Th. Moser (Regensburg 1992). Im Kapitel 3 wird zunächst der kohomologische Zugang zur Klassenkörpertheorie erklärt, den Neukirch in seinem Zahlentheoriebuch vermieden hatte. Sodann werden diese auf endliche Gruppen beschränkten Ergebnisse teilweise auf proendliche Gruppen erweitert und der Poitouschen Dualitätssatz bewiesen, der die Grundlage für die Tateschen Dualitätssätze liefert. Die Kapitel 4 und 5 behandeln freie Produkte von proendlichen Gruppen und Iwasawa-Moduln.

Die Kapitel 6 bis 12 enthalten die arithmetische Theorie der lokalen und globalen Körper. In Kapitel 6 wird die Galois-Kohomologie über beliebigen Körpern behandelt. Kapitel 7 enthält die Kohomologie der lokalen Körper. Hier findet sich auch die vollständige Strukturtheorie der Galoisgruppen von maximalen  $p$ -Erweiterungen  $p$ -adischer Zahlkörper. Dagegen wird die entsprechende Theorie für die Galoisgruppen der algebraischen Abschließung  $p$ -adischer Zahlkörper nur angedeutet. Die Kapitel 8 bis 10 enthalten die Galois-Kohomologie globaler Körper. Diese Kapitel bilden den eigentlichen Kern des Buches. Insbesondere wird in Kapitel 8 ein vollständiger Beweis des Dualitätssatzes von Poitou-Tate in seiner Verallgemeinerung auf endlich erzeugte Moduln gegeben. Kapitel 9 enthält den Beweis für den Satz von Shafarevich, wonach endliche auflösbare Gruppen als Galoisgruppen über Zahlkörpern realisiert werden können. In Kapitel 10 wird unter anderem die Existenz unendlicher Klassenkörpertürme nach der Methode von Golod-Shafarevich bewiesen.

Kapitel 11 gibt einen Abriss der Iwasawaschen Theorie der  $\Gamma$ -Erweiterungen und Kapitel 12 einen Einblick in das anabelsche Programm von Grothendieck. Dieses letzte Kapitel enthält vor allem den Beweis des Satzes von Neukirch-Uchida, wonach ein Zahlkörper durch seine Galoissche Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Berlin

H. Koch

**Krantz, S.G., Parks, H.R., The Geometry of Domains in Space**, Basel u. a., Birkhäuser, 1999, 320 S., DM 108,-

Viele Aufgabenstellungen in der Physik und der Analysis, wie z. B. die Untersuchung von Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen, sind auf natürliche Weise mit Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  verbunden. Während für die Entwicklung der Analysis auf euklidischen Räumen die klassische Theorie der Lie-Gruppen eine entscheidende und tragende Rolle besitzt, können diese Hilfsmittel im Rahmen der Analysis auf Gebieten, die i. a. keine Symmetrien besitzen, jedoch nicht mehr angewendet werden. Aus diesem Grunde betrachtet man hier Eigenschaften, die auf der inneren Geometrie des Gebietes bzw. auf der Struktur des Randes  $\partial\Omega$  – einer Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1 im Raum – beruhen. Gleichzeitig lassen sich viele Ideen in der modernen Analysis oft auf einfache und natürliche Weise motivieren und beschreiben, wenn man dabei geometrische Aspekte verwendet. Dazu zählen z. B. Funktionenräume auf Gebieten, Spuren und Fortsetzungen von speziellen Funktionenklassen, die Theorie der geometrischen Maße, konvexe Gebiete, die isoperimetrische Ungleichung und der Satz von Sard.

Das Hauptanliegen des Buches besteht u. a. darin, viele – zum Teil sehr unterschiedliche – geometrische Aspekte und deren Anwendungen auf Fragestellungen der Analysis zu beschreiben. Dabei gelingt es den Autoren, die zunehmende Durchdringung zwischen der Analysis und der Geometrie überzeugend darzustellen. Die geometrische Analysis ist bereits heute ein wichtiges Gebiet, um Probleme aus der theoretischen und angewandten Mathematik sowie anderen Wissenschaften zu untersuchen.

Das Buch besteht aus acht Kapiteln und einem Anhang, der sich u. a. mit Metriken auf Teilmengen des euklidischen Raumes sowie Eigenschaften der  $\Gamma$ - und  $\beta$ -Funktion beschäftigt.



Im einführenden Kapitel werden zunächst grundlegende Resultate über differenzierbare Funktionen bereitgestellt. Außerdem werden wichtige klassische Ergebnisse aus der Maßtheorie aufgeführt, die für die späteren Untersuchungen benötigt werden. Während sich Kapitel 2 mit wichtigen differentialgeometrischen Fragestellungen für Gebiete mit glattem Rand beschäftigt, stehen im anschließenden Abschnitt Maße auf Gebieten im Mittelpunkt (u. a. Carathéodory-Konstruktion, Rektifizierbarkeit, Minkowski-Inhalt, Gebiete mit endlichem Durchmesser, Maßtheorie für Lipschitz-Abbildungen). Das 4. Kapitel widmet sich der Untersuchung von Sobolev-Räumen  $H^s$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  sowie auf Gebieten  $\Omega$ . Dabei werden u. a. Eigenschaften von entsprechenden Restriktions- bzw. Fortsetzungsoperatoren betrachtet. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit glatten Abbildungen (Satz von Sard, Whitney'scher Fortsetzungssatz und dessen Anwendungen, Differentialformen, Satz von Stoke). Das 6. Kapitel behandelt dann die Theorie der konvexen Gebieten auf der Grundlage von analytischen Methoden (Zusammenhang zwischen analytischer und klassischer geometrischer Konvexität, konvexe Funktionen, Konvexität höherer Ordnung). Im Mittelpunkt des nächsten Kapitels stehen Fragestellungen, die mit der Steinerschen Symmetrisierung im Zusammenhang stehen. Insbesondere wird das isoperimetrische Problem und die isoperimetrische Ungleichung betrachtet. Zum Schluss werden im Kapitel 8 solche Fragestellungen untersucht, die eng mit der komplexen Analysis verbunden sind (quasi-konforme Abbildungen, Eigenwertverteilungen für elliptische Randwertprobleme).

Das Buch erschließt dem Leser, von einer einheitlichen Betrachtungsweise ausgehend, auf angenehme und bequeme Weise vielfältige Resultate aus der geometrischen Analysis, die zuvor in der Literatur nur sehr verstreut dargestellt waren. Dabei geht es den Autoren in erster Linie nicht darum, alle beschriebenen Teilgebiete bis in das letzte Detail zu behandeln, sondern vorrangig dem Leser eine Vorstellung von dieser Theorie und ihren vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten zu vermitteln. Jedes Kapitel wird durch Beispiele gut motiviert und enthält neben vielen sehr interessanten historischen Bemerkungen und biographischen Angaben auch Verweise auf weitergehende Untersuchungen zum behandelten Stoffgebiet. Das Buch ist sorgfältig ausgearbeitet und sehr gut lesbar. Dabei werden erfreulicherweise die mathematischen Vorkenntnisse an den Leser minimal gehalten. Im wesentlichen ist das Verständnis der mehrdimensionalen Differential- und Integralrechnung und der linearen Algebra ausreichend. Dadurch kann diese Monographie bereits von Studenten als Lehrbuch im Hauptstudium bzw. als Grundlage für ein Selbststudium genutzt werden. Das Buch wendet sich deshalb nicht nur an Spezialisten auf diesem Gebiet, für die es nun auch als eine gute Referenz und bequeme Quellenangabe genutzt werden kann, sondern ebenfalls an Leser, die am Gebiet der geometrischen Analysis und ihren vielfältigen Anwendungen interessiert sind bzw. mit Fragestellungen aus diesem mathematischen Teilgebiet innerhalb ihres Forschungsthemas in Berührung kommen.

Jena

T. Runst

**Ch. Birkenhake, H. Lange, Complex Tori.** Progress in Mathematics 177, Birkhäuser 1999, 251 S., DM 118,-

Komplexe Tori sind Quotienten des  $\mathbb{C}^g$  nach Gittern  $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$  und somit – nach der Riemannschen Zahlenkugel und den projektiven Räumen – die einfachsten kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten überhaupt. Soweit sie nicht abelsche Varietäten sind, d. h. eine holomorphe Einbettung in einen  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  besitzen und damit automatisch eine Struktur als algebraische Mannigfaltigkeit, ja sogar als algebraische Gruppe haben, fristen sie im Bewußtsein der Mathematiker aber nur ein Schattendasein als bekannte Gegenbeispiele: Auf einem „generischen“ komplexen Torus der Dimension  $g > 1$  existieren als global meromorphe Funktionen nur die Konstanten. Weitere deutliche Unterschiede

zum Spezialfall der abelschen Varietäten sind z. B. die Ungültigkeit des Poincaréschen Reduzibilitätssatzes, das Vorkommen *jeder beliebigen* endlich-dimensionalen  $\mathbf{Q}$ -Algebra als Endomorphismenalgebra eines geeigneten komplexen Torus (Oort-Zarhin, im vorliegenden Buch mit einem eleganten Beweis von Hötte und W. Scharlau präsentiert) und schließlich die Tatsache, daß komplexe Tori der Dimension  $g > 1$  zwar einen topologischen, aber keinen komplex-analytischen groben Modulraum besitzen.

Warum lohnt es sich trotzdem, sich mit komplexen Tori zu beschäftigen? Nach der Lektüre dieser ersten Monographie zum Thema sehe ich dafür vor allem zwei Gründe. Erstens treten nicht-algebraische komplexe Tori auch dann in natürlicher Weise auf, wenn man sich „eigentlich“ nur für die algebraische Seite der Theorie interessiert, z. B. bei Erweiterungen abelscher Varietäten durch abelsche Varietäten – zuerst von Shafarevich für elliptische Kurven bemerkt und hier in großer Allgemeinheit ausgeführt – aber auch bei der Konstruktion von Griffiths' „intermediate Jacobians“, denen das Kap. 4 dieses Buches gewidmet ist.

Der zweite Grund liegt darin, daß die vielen schönen Eigenschaften, welche abelsche Varietäten für die algebraische Geometrie und Arithmetik so wichtig machen, für eine bedeutende Teilklasse komplexer Tori übertragbar sind. Es handelt sich hier um „nichtentartete komplexe Tori“, und von der Gewichtung der Themen her wäre es treffend, dem Titel des Buches ein „Non-degenerate“ voranzustellen. Gemeint ist mit diesem Begriff, daß eine verallgemeinerte Polarisierung vom Index  $k$  für  $\mathbf{C}^g/\Lambda$  existiert, d. h. daß auf  $\mathbf{C}^g$  eine nichtentartete Hermitesche Form  $H$  existiert, die  $k$  negative Eigenwerte besitzt und deren Imaginärteil auf  $\Lambda$  ganzzahlige Werte annimmt. Der Fall  $k = 0$  ist also der klassische Fall der abelschen Varietäten. Daß nichtentartete Tori auch für den Index  $k > 0$  eine reiche Struktur besitzen, mag an einigen Aspekten näher erläutert werden.

1. Es existiert eine Poincaré-Zerlegung in irreduzible nichtentartete Tori (Kap. 2).
2. Deren Endomorphismenalgebra unterliegen starken Restriktionen und können ähnlich wie die Endomorphismenalgebren abelscher Varietäten klassifiziert werden, hier allerdings mit allgemeineren Grundkörpern (Kap. 5).
3. Familien komplexer Tori mit gegebener verallgemeinerter Polarisierung und Endomorphismenalgebra können ähnlich wie Familien abelscher Varietäten bei Shimura oder C. L. Siegel („Lectures on Riemann Matrices“, Tata Institute 1963) parametrisiert werden. Dadurch wird insbesondere eine Untersuchung entsprechender Modulräume ermöglicht (Kap. 7). Als Modulgruppen treten auch hier arithmetische Gruppen auf, die Parameterräume sind aber i. a. keine hermiteschen symmetrischen Räume mehr, sondern Fahnemannfaltigkeiten von Liegruppen.
4. Nichtentartete Tori vom Index  $k$  lassen sich in eine abelsche Varietät im  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  einbetten, allerdings holomorph in  $g - k$  und antiholomorph in  $k$  Variablen. Diese Einbettung ist leider nicht eindeutig bestimmt; immerhin gibt es in dem wichtigen Fall von Griffiths' „intermediate Jacobian“ eine kanonische Wahl für diese Einbettung; das Bild ist hier die „Lazzeri intermediate Jacobian“.

Anders als das erste Buch der beiden Autoren („Complex Abelian Varieties“, Grundlehren 302, Springer 1992), das ein bekanntes Gelände neu vermessen hat, muß man die vorliegende Monographie gleichzeitig als Originalarbeit ansehen: Der bei weitem überwiegende Teil der hier beschriebenen Mathematik dürfte neu sein. Thema und Durchführung sind technisch anspruchsvoll und auf hohem Niveau, aber klar und mit gutem roten Faden geschrieben. Ich habe keinen Zweifel, daß es Frau Birkenhake und Herrn Lange gelungen ist, zum zweiten Mal eine Standard-Referenz zu verfassen, auch wenn der Interessentenkreis diesmal kleiner sein könnte als bei den abelschen Varietäten.

**Trott, M., The imaginary made real (Graphica 1)**, Champaign, IL: Wolfram Media 1999, xiii + 89 S., \$ 34,95

**Bakshee, I., The pattern of beauty (Graphica 2)**, Champaign, IL: Wolfram Media 1999, xii + 86 S., \$ 34,95

Die Bücher sind die ersten beiden Bände einer neuen, von Wolfram Media, Inc., publizierten Reihe, welche die graphischen Möglichkeiten des Systems MATHEMATICA demonstrieren sollen. Beide Bände beginnen mit demselben Vorwort von S. Wolfram, der MATHEMATICA programmiert hat. Er vertritt hier die Auffassung, daß man Computer nach Regeln programmieren kann, die ähnlich ästhetische graphische Resultate liefern, wie die Regeln, nach denen die Natur ihre Formen herausbildet. Ja, daß das Programmieren in MATHEMATICA zu Ergebnissen führen kann, denen man nicht ansieht, daß sie aus einem System von Regeln entstanden, bzw., die so unerwartete Elemente enthalten wie sie ein Künstler ohne die Hilfe eines Computers nie erzeugen könnte.

Na ja.

M. Trott, der Autor des ersten Bandes, teilt in seinem Vorwort seine Schöpfungen in vier Gruppen ein:

1. Muster oder dreidimensionale Strukturen, die er nach Elementen seiner Vorstellung modelliert,
2. Zufallserzeugnisse,
3. Visualisierung von Funktionen, Algorithmen, Daten;
4. Benutzung rechen-intensiver Funktionen, Parametrisierungen, Symmetrien, Diskretisierungen.

Er gibt auch an, in den letzten acht Jahren auf diese Weise etwa 6000 Bilder geschaffen („created“) zu haben. Als Motto für sein Buch wählt er das Weierstraß-Zitat „Das letzte Ziel ist immer die Darstellung einer Funktion.“

Und dann folgen die Computergraphiken: 74 Seiten in allen Farben, mit oft vier bis fünf kombinierten, übereinander oder nebeneinander gelegten Bildern. Dann kommen drei Seiten ‚Step by Step‘, wo Programmierbeispiele diskutiert werden und schließlich sieben Seiten klein gedruckter ‚Visual Index‘ mit kurzen Erläuterungen der Graphiken.

I. Bakshee, Verfasser des zweiten Bandes, schreibt in seinem Vorwort, das Buch sei entstanden aus seiner Suche nach einer Formel, um Schönheit aus Zufall zu erzeugen. Seine Graphiken benutzen das MATHEMATICA-basierte System ARTLANDIA. Alle Bilder, bis auf eine Doppelseite mit Krawatten, sehen aus wie Tapetenentwürfe. Das ist kein Zufall, denn er dankt in seinem Vorwort u.a. Textil-Designern in Japan und den USA. Auch sein Buch enthält etwa 75 vielfarbige Seiten Graphik, eine ‚Step by Step‘ Einführung in Programmieren mit ARTLANDIA und vier Seiten ‚Visual Index‘.

Die Graphiken beider Bände sind zu vielseitig und zu bunt, als daß ich hier auch nur exemplarisch auf erzeugende Algorithmen eingehen könnte. Das ist das große Plus beider Bände: Sie enthalten einen – praktisch unerschöpflichen – Katalog graphischer Ideen. Außerdem ist die Gestaltung sehr ansprechend. Und die Idee, eine Buchreihe der Computer-Graphik mit Kurzeinführung in deren Programmierung zu widmen, finde ich einfach faszinierend. Faszinierend fand ich auch die vielen Bilder, als ich die Bände das erste mal durchblätterte, nachdem mich Herr Kollege Lange fragte, ob ich sie referieren wollte. Die Bücher wollte ich haben. Die Bücher zu referieren birgt aber seine Probleme: Zuerst war mir entgangen, daß diese Graphik absolut MATHEMATICA-basiert ist. In unserem Institut wird geMAPLEd. Die Konkurrenz sehe ich deswegen wohl nicht ganz ohne Vorurteile.

Und dann ist es so eine Sache mit der Computer-Graphik: Beim ersten Betrachten ist sie neu und (für mich) meist enorm attraktiv. Beim zweiten Hinschauen hat man

sie schon mal gesehen. Und beim dritten Durchblättern interessiert das zugrundeliegende mathematische Prinzip bereits mehr als das graphische Resultat. Ein paar Graphiken würde ich mir schon ganz gerne als Bilder an die Wand hängen. Das sind dann aber meist einfache Schwarz-Weiß-Muster. Vielleicht ist das mehr eine Aussage über mich, den Betrachter, als über diese Graphiken. Vielleicht ist mein Eindruck aber doch nicht ganz unbegründet, der spektakuläre Reichtum der Bilder an Farben, Formen, Zufallsmustern geht mehr in Richtung Gebrauchsgraphik als Kunst. Das wäre durchaus legitim, sogar interessant. Es deckt sich allerdings nicht mit dem hohen Anspruch der Autoren, hier Kunst aus dem Computer gezogen zu haben. Und damit kommt man zu einer sehr schwierigen Frage, die beide Bücher dann doch wieder sehr relevant macht: Kann Computergraphik Kunst sein? Beziehungsweise, unter welchen Bedingungen?

Mir fällt hierzu vor allem der Gesichtspunkt der Harmonie ein. Zwei Beispiele, die in Trotts Buch nur gestreift werden: Auf S. 10 stellt er ein ‚Vasarely-like view‘ in Schwarz-Weiß, allerdings auf scheußlich gelbem Hintergrund, vor. Vasarely hat seine Bilder programmiert, lange bevor es Computer gab. Er hat die Geometrie eines Bildes festgelegt, es in einzelne Felder eingeteilt, in die er Zahlen eintrug. Diese Zahlen codierten Farbwerte, in denen seine Gehilfen dann die Felder vollpinselten. Und diese Farbwerte wählte er keineswegs nach dem Zufall aus. So erzielte er Harmonien, Kontraste, psychologische Farbwirkungen. Das ist etwas, das man dem Computer wohl nur sehr schwer beibringen kann. Eine andere Art von Harmonie finde ich in Lindenmayer-Systemen (Trotts Buch S. 46/47). Hier liegt das wohl daran, daß sie der Natur abgeschaut sind.

Mein Fazit: Um Kunst zu produzieren, darf der Mensch die Kontrolle nicht dem Computer überlassen. Eine Graphik, deren Farbwahl, Raumeinteilung, dreidimensionale Wirkung wesentlich vom Zufall generiert ist, kann nie Kunst sein. Es ist eine Frage des Rahmens, den man dem Zufallsgenerator setzt. Mensch und Computer werden hier noch einiges lernen können.

Erlangen

W. Barth

**Gromov, M., Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces** (Prog. in Math. 152), Basel u. a., Birkhäuser, 1998, 599 S., DM 198,-

Das vorliegende Buch besteht aus zwei Teilen, einem *alten* Teil und einem neuen. Der alte Teil besteht aus einer Übersetzung des Buches [Gr1] aus dem Französischen ins Englische. Dazu kommen viele neue Abschnitte mit Ergänzungen, ein neues Kapitel  $3\frac{1}{2}$  über *Convergence and Concentration of Metrics and Measures* und diverse Anhänge.

Der alte Teil handelt von der metrischen Theorie Riemannscher Räume. Die Riemannsche Struktur induziert auf diesen ja eine Metrik, also eine Funktion, die die Distanz zwischen Punkten misst. Nach Definition handelt es sich dabei um eine *innere Metrik*, das heißt, die Distanz zwischen zwei Punkten ist das Infimum der Längen sie verbindender Kurven.

Eine der wichtigen Ideen ist nun, auf dem Raum  $\mathcal{K}$  der Isometrieklassen kompakter metrischer Räume eine Metrik einzuführen. Seien dazu  $X$  und  $Y$  kompakte metrische Räume und  $f : X \rightarrow Z$  und  $g : Y \rightarrow Z$  isometrische Einbettungen. Dann setzen wir  $d((X, f), (Y, g))$  gleich dem Hausdorff-Abstand der Mengen  $f(X)$  und  $g(Y)$  in  $Z$ , das heißt,  $d((X, f), (Y, g))$  ist das Infimum über alle  $r > 0$ , sodass  $f(X)$  in der Umgebung vom Radius  $r$  um  $g(Y)$  und  $g(Y)$  in der Umgebung vom Radius  $r$  um  $f(X)$  enthalten ist. Der Gromov-Hausdorff-Abstand  $d_{GH}(X, Y)$  ist nun definiert als das Infimum über alle möglichen solchen  $d((X, f), (Y, g))$ . Zunächst stellt man fest, dass  $d_{GH}(X, Y)$  genau dann verschwindet, wenn  $X$  und  $Y$  isometrisch sind. Damit folgt leicht, dass  $d_{GH}$  eine Metrik auf  $\mathcal{K}$  ist.

Analog definiert man eine Topologie auf dem Raum  $\mathcal{P}$  der Isometrieklassen punktierter lokalkompakter und vollständiger metrischer Räume: Eine Folge  $(X_n, x_n)$  in  $\mathcal{P}$  konvergiert gegen  $(X, x) \in \mathcal{P}$ , falls für alle  $R > 0$  die abgeschlossenen Bälle  $B(x_n, R)$  vom Radius  $R$  um  $x_n$  in  $X_n$  in der Gromov-Hausdorff-Topologie gegen den abgeschlossenen Ball  $B(x, R)$  konvergieren. Eine Übungsaufgabe: Sei  $X$  eine vollständige  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $d$  die Metrik von  $M$  und  $x \in M$ . Dann gilt  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \cdot (X, x) = (T_x M, 0_x)$ , wobei  $\rho \cdot (X, x)$  der punktierte Raum  $(X, x)$  mit Metrik  $\rho \cdot d$  und  $T_x M$  der mit dem gegebenen Skalarprodukt versehene Euklidische Raum sei.

Fast eine Übungsaufgabe: Sei  $(X, x) \in \mathcal{P}$ . Zu  $0 < r < R$  sei  $N(r, R, X)$  die maximal mögliche Anzahl disjunkter Bälle vom Radius  $r$ , die man in den Ball  $B(x, R)$  packen kann. Behauptung: Eine Teilmenge in  $\mathcal{P}$  ist genau dann präkompakt, wenn die Funktionen  $N(r, R, \cdot)$  auf ihr beschränkt sind.

Diese einfachen Ideen haben in der Folge zu ganz erstaunlichen Anwendungen geführt. Die erste und zentralste wird schon in [Gr1] hergeleitet. Gromov bemerkt nämlich, dass eine lokale Volumenabschätzung von Bishop ohne weiteres zu einer globalen Abschätzung verallgemeinert werden kann, zur sogenannten Bishop-Gromov-Ungleichung. Diese besagt, dass in einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $n$  und mit Ricci-Krümmung  $\geq (n - 1)\kappa$  die Quotienten der Volumina von Bällen wie folgt abgeschätzt werden können:

$$\frac{\text{vol}B(x, r)}{\text{vol}B(x, R)} \geq \frac{V(\kappa, r)}{V(\kappa, R)}.$$

Hierbei ist  $V(\kappa, \rho)$  das Volumen eines Balles vom Radius  $\rho$  im  $n$ -dimensionalen Modellraum konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ ,

$$V(\kappa, \rho) = \int_0^\rho \text{sn}_\kappa(t)^{n-1} dt \quad \text{mit} \quad \text{sn}_\kappa(t) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{falls } \kappa > 0, \\ 0 & \text{falls } \kappa = 0, \\ \sinh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

Wegen  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{vol}B(x, \rho)/V(\kappa, \rho) = 1$  folgt  $\text{vol}(B(x, R)) \leq V(\kappa, R)$  für alle  $R > 0$ . Mit dem bisher Gesagten stellt man nun leicht fest, dass der Raum  $\mathcal{M}_\kappa^n$  der Isometrieklassen punktierter vollständiger  $n$ -dimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit Ricci-Krümmung  $\geq \kappa$  präkompakte Teilmenge von  $\mathcal{P}$  ist! Die Frage der möglichen Limesräume und verwandte Fragen werden diskutiert. Diese wichtige Frage wurde in der Folge von vielen Geometern aufgegriffen, unter anderem in Arbeiten von Cheeger und Gromov. Eine der neueren wichtigen Arbeiten, in denen diese Frage und entsprechende Techniken eine Rolle spielen, stammt von Petrunin und Tuschmann, die zeigen, dass es zu gegebenen  $n, \kappa$  und  $D$  bis auf Diffeomorphie nur endlich viele kompakte 2-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  gibt, die eine Riemannsche Metrik mit Ricci-Krümmung  $\geq (n - 1)\kappa$  und Durchmesser  $\leq D$  tragen.

Der alte Teil des Buches ist mit der Diskussion der oben erläuterten Thematik aber keineswegs erschöpft. Schon die Überschriften der Kapitel machen dies deutlich, ich füge aber bei meiner nun folgenden Aufzählung dieser Überschriften jeweils noch einige Bemerkungen hinzu:

Chapter 1: Length Structures: Path Metric Spaces.

In diesem Kapitel werden elementare Eigenschaften metrischer Räume diskutiert. Unter anderem wird das Konzept der inneren Geometrie erläutert.

Chapter 2: Degree and Dilatation.

Hier diskutiert Gromov die Frage der minimal möglichen Lipschitzkonstanten einer Abbildung in einer gegebenen Homotopieklasse von Abbildungen.

Chapter 3: Metric Structures on Families of Metric Spaces.

In diesem Kapitel wird die Gromov-Hausdorff-Distanz eingeführt und diskutiert. Die Wort-Metrik auf der Fundamentalgruppe einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit wird mit der Geometrie der universellen Überlagerung verglichen. Neu hinzugekommen ist die Diskussion von Gromov-Hausdorff- und Ultralimites.

Chapter 4: Loewner Rediscovered.

Die Ungleichung von Loewner besagt, dass für eine Riemannsche Metrik  $g$  auf dem 2-dimensionalen Torus  $T$  die Ungleichung

$$\text{Area}(g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} l^2(g)$$

gilt, wobei  $l(g)$  die Länge einer kürzesten wesentlichen Kurve auf  $T$  bezüglich  $g$  ist. Gromov diskutiert diese Ungleichung – modulo Uniformisierungssatz ist der Beweis elementar – und Verallgemeinerungen – diese sind nicht so elementar.

Chapter 5: Manifolds with Bounded Ricci Curvature.

Einen wichtigen Satz habe ich oben schon erläutert, des weiteren diskutiert Gromov Wachstum der Fundamentalgruppe, Schranken für die erste Bettische Zahl, simpliziales Volumen, Entropie und andere Invarianten.

Chapter 6: Isoperimetric Inequalities and Amenability.

In diesem Kapitel diskutiert Gromov quasikonforme und quasireguläre Abbildungen, isoperimetrische Ungleichungen und Dimension. Unter anderem zeigt er, dass in vollständigen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung eine lineare isoperimetrische Ungleichung gilt, ferner diskutiert er Ungleichungen von Ahlfors/Osserman und Varopoulos.

Chapter 7: Morse Theory and Minimal Models.

Ein recht kurzes Kapitel, in dem Schleifenräume und minimale Modelle diskutiert werden, unter anderem wieder im Zusammenhang mit Lipschitzkonstanten von Abbildungen wie in Kapitel 2.

Chapter 8: Pinching and Collapse.

Dieses Kapitel ist als neu gekennzeichnet, obwohl es in Kapitel 8 aus [Gr1] einen Vorgänger hat. Nach einführenden Abschnitten über homogene Mannigfaltigkeiten und Sign and the meaning of curvature diskutiert Gromov den Kompaktheitssatz für die Klasse der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten gegebener Dimension mit apriori-Schranken an Schnittkrümmung, Injektivitätsradius und Durchmesser, ferner Konvergenz und Kollaps Riemannscher Mannigfaltigkeiten.

Zusammen mit Appendix A über quasikonvexe Gebiete in Euklidischen Räumen von Pierre Pansu machen diese Kapitel den alten Teil des Buches aus. Dem Leser, der an den von mir oben näher erläuterten Problemen interessiert ist, empfehle ich, die Kapitel 1, 3, 5 und 8 zu lesen. Diese Kapitel sind auch vergleichsweise gut lesbar, insbesondere die „alten Teile“. Die restlichen Kapitel sind jeweils einzeln studierbar und hängen nicht so sehr von den Methoden und Resultaten der übrigen Kapitel ab. Die Lektüre dieser Kapitel erfordert jedoch ein gewisses Durchhaltevermögen.

Neu hinzugekommen ist das Kapitel 3 $\frac{1}{2}$  über Metriken und Maße. Gromov beschäftigt sich mit  $mm$ -Räumen, metrischen Räumen mit Maßen, welche bis auf abzählbare Mengen von Atomen äquivalent zu Lebesgue-Maßen auf endlichen Intervallen sind. Ich konnte mich bisher nicht dazu durchringen, dieses doch immerhin 125 Seiten lange Kapitel zu lesen. Ich bezweifle aber nicht, dass es interessante und wichtige Informationen zur Analysis auf singulären Räumen enthält.

Neu hinzugekommen ist ferner Anhang C, ein Artikel Gromovs aus dem Jahre 1980 mit dem Titel „Paul Levy’s Isoperimetric Inequality“, der bisher nicht erschienen war. Gromov erweitert in diesem Artikel eine klassische Ungleichung von Levy auf kompakte  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach unten beschränkter Ric-

ci-Krümmung. Diese Arbeit wurde in den achtziger Jahren von Sylvestre Gallot und anderen aufgegriffen und verallgemeinert; es ist sehr zu begrüßen, dass sie jetzt allgemein zugänglich ist.

Anhang D von Misha Katz schließt an das vierte Kapitel des Buches an und beschäftigt sich mit isosystemischen Ungleichungen. Katz diskutiert topologische Bedingungen, unter denen isosystemische Konstanten verschwinden.

Anhang B von Stephen Semmes ist sehr umfangreich, insgesamt umfaßt er 118 Seiten. Semmes beschäftigt sich mit dem Thema *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*. Dieses Kapitel ist eine wahre Fundgrube für Mathematiker, die sich mit Analysis und Geometrie singulärer Räume beschäftigen. Semmes diskutiert geometrische Ideen aus dem Bereich der klassischen Analysis und der quasikonformen Abbildungen. Er gibt sich sehr viel Mühe, die Ideen und Methoden zu motivieren und darzustellen.

Fazit: Mathematikern, die sich mit Themen auseinandersetzen, die in diesem Buch angesprochen werden, ist dieses Buch allerwärmstens zu empfehlen. Es sollte sicher in keiner Institutsbibliothek fehlen. Mit dem Reichtum an Ideen, der dieses Buch auszeichnet, wird es auch für Studenten zur lohnenden Lektüre. Aber selbst gestandenen Mathematikern ist nicht zu empfehlen, mit dem Ziel an das Buch heranzugehen, alle Argumente und Beweise nachzuvollziehen.

Die französische Version [Gr1] hat die Entwicklung der Differentialgeometrie während der beiden letzten Dekaden ganz entscheidend mitbestimmt. Es bleibt, der englischen Version einen ähnlichen Erfolg zu wünschen.

[Gr1] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. CEDIC, Paris 1981.

[Gr2] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhäuser 1999.

Bonn

W. Ballmann

**Krause, U., Neumann, T., Differenzgleichungen und diskrete dynamische Systeme**, Stuttgart – Leipzig: Teubner 1999, 246 S., DM 49,80

Diskrete dynamische Systeme, d. h. iterierte Selbstabbildungen gegebener Zustandsräume, spielen eine wachsende Rolle in anwendungsbezogenen mathematischen Theorien, die sich die klärende Durchdringung unterschiedlichster Erfahrungsbereiche zum Ziel setzen: Populationsentwicklung, Konsensfindung, ökonomisches Wachstum, Konjunkturschwankungen, Kundschafsdynamik von Banken, Wasserrationierung, Preisentwicklung sind hierzu einige Stichworte, die das in diesem konzisen, aus wiederholten Bremer Vorlesungen hervorgegangenen Lehrbuch angezielte Themenfeld und insbesondere das den einzelnen Abschnitten reichlich beigegebene Beispiel- und Übungsmaterial annähernd kennzeichnen. Einige beigegebene Turbo-Pascal-Programme ermöglichen die Darstellung etlicher Systeme am Bildschirm. – Jedes der sechs Kapitel

1. Einführung: Beispiele und Grundbegriffe – 2. Differenzkalkül – 3. Lineare dynamische Systeme und Differenzgleichungen – 4. Stabilitätstheorie linearer Systeme und Differenzgleichungen – 5. Nichtlineare diskrete dynamische Systeme und Differenzgleichungen – 6. Positive diskrete dynamische Systeme

bieten einen knappen systematischen Theorieaufbau zuzüglich ausgiebiger Beispieldurcharbeitungen. Naturgemäß bilden lineare Systeme dabei die Basis, die diskreten Analoga grundlegender Sätze aus der klassischen kontinuierlichen Analysis ein Grundthema. Im Nichtlinearen stößt das Buch bis zu Liapunoffs direkter Methode bei Stabilitätsuntersuchungen, zu chaotischen Systemen und Fraktalen und zur verallgemeinerten Perron-

Methode bei positiven konkaven Systemen (mit positiven linearen Systemen als Spezialfall) vor.

Das Buch empfiehlt sich als schlanker, angenehm geschriebener Zugang zu wesentlichen Bereichen aktueller Systemdynamik und durch „harte“, viel klassisches Material integrierende Methodik.

Bamberg

K. Jacobs

**Kozlov, V. A., Maz'ya, V. G., Differential Equation with Operator Coefficients** (Springer Monographs in Mathematics), Berlin: Springer Verlag 1999, XIII und 442 Seiten, DM 169,-

Die vorliegende Monographie faßt die Forschungsergebnisse, die die Autoren in den ca. letzten zehn Jahren über Differentialoperatoren mit (unbeschränkten) operatorwertigen Koeffizienten in Hilbert- oder Banach-Räumen erzielt haben, systematisch zusammen. Damit ist klar, daß der überwiegende Teil des Inhalts erstmalig in Buchform vorliegt. Wichtig scheint mir, auf den Untertitel des Werkes hinzuweisen: „Applications to Boundary Value Problems for Partial Differential Equations“. In der Tat, fast jedes Kapitel enthält einige Paragraphen mit konkreten Anwendungen, in der Regel auf Probleme für partielle Differentialgleichungen (elliptische Randwertprobleme, insbesondere das Dirichlet- und Neumann-Problem (oft in Gebieten, die nicht glatt berandet sind), Singularitäten elliptischer Gleichungen, gewisse parabolische Probleme, Probleme für hyperbolische Gleichungen, und vieles mehr). Diese Fülle von Anwendungen ist gleichzeitig Hauptmotivation für die Theorie, unter diesem Blickwinkel wird der technische Aufwand mehr als gerechtfertigt.

Das Werk gliedert sich in drei Teile: Part I – Differential Equations with Constant Operator Coefficients, mit den Kapiteln 1. Power-Exponential Zeros, 2. Differential operator Equations in Weighted Sobolev Spaces, 3. Solutions in a Local Sobolev Space, und 4. Two-Weight  $L_2$ -Estimates; Part II – Differential Equations with Variable Operator Coefficients, mit den Kapiteln 5. Existence, Uniqueness and „Pointwise“ Estimates, 6. Corollaries of Previous Results Under Special Assumptions on  $L(t, D_t)$ , 7. Two-Weight  $L_2$ -Estimates for Equations with variable Coefficients, 8. Connection of Solutions Corresponding to Different Strips, 9. Applications to the Case of Perturbations Vanishing at Infinity, und, 10. Variants and Extensions of the Previous Theory, sowie Part III – Asymptotic Theory of Operator differential Equations, mit den Kapiteln 11. Complete Asymptotic Expansions Under Exponential and Power Perturbations of  $A(D_t)$ , 12. Reduction to a First Order System, 13. General Asymptotic Representations, 14. Power-Exponential Asymptotics, 15. The case of Simple Eigenvalue on the Line, 16. Several Simple Eigenvalues on the Line, und, 17. The case of a Single Multiple Eigenvalue. Es folgt ein Anhang: Holomorphic Operator Functions.

Der dritte Teil ist sicherlich der Schwerpunkt in der Monographie, hier werden nicht nur neue asymptotische Resultate hergeleitet, es handelt sich um neue Techniken, die die Theorie erst richtig zum Arbeiten bringen. (Diese sind wohl zu kompliziert, um hier einem breiten Leserkreis zu erklären, zwei Hinweise seien gestattet: Vergleichsprinzipien mit Lösungen geeigneter skalarer Differentialgleichungen und Reduktion auf Systeme erster Ordnung – nicht vergessen, wir haben es mit operatorwertigen Gleichungen zu tun!)

Das Literaturverzeichnis enthält vor allem Hinweise auf Arbeiten aus dem Umfeld der Autoren, eine Diskussion von Zusammenhängen zu Ergebnissen, die etwa in der mathematischen Physik oder der stochastischen Analysis erzielt wurden, man vergleiche etwa die zweibändige Monographie von Y.M. Berezansky und Y.G. Kondratiev: Spectral Methods in Infinite – Dimensional Analysis (Kluwer 1995), wird nicht vorgenommen.



Verständlich, wenn man an den Umfang denkt, bedauerlich, denkt man daran, welche Erkenntnisse sich aus dem Zusammenspiel verschiedener Ansätze ergeben könnten.

Das Buch ist wie bei den Autoren zu erwarten, sicher anspruchsvoll, sicher technisch, aber m.E. ein wichtiger Beitrag zur Buchliteratur, nicht nur für den engen Spezialistenkreis, sondern auch für alle Mathematiker (sicher vor allem Analytiker), deren Interessen etwas breiter gestreut sind.

Swansea, U.K.

N. Jacob

**Rozanov, Y. A., Random Fields and Stochastic Partial Differential Equations** (Math. and its Appl.), Dordrecht u. a.: Kluwer Academic Publishers 1998, 240 S., \$ 105,-

Das Buch ist in vier Kapitel gegliedert: Chapter I. Random Fields and Stochastic Sobolev Spaces – Chapter II. Equations for Generalized Random Functions – Chapter III. Random Fields Associated with Partial Equations – Chapter IV. Gaussian Random Fields.

Nachdem im Kapitel I zunächst verallgemeinerte zufällige Felder, Gauß'sche Felder und Sobolevräume eingeführt werden, erfolgt im Abschnitt 1.5 die Einführung verallgemeinerter zufälliger Funktionen und stochastischer Sobolevräume. Unter dem stochastischen Sobolevraum  $W_2^p(T)$  ( $T \subseteq \mathbb{R}^d$ ) wird der Raum aller verallgemeinerten zufälligen Funktionen  $\xi$  mit

$$\left\{ (E |(\varphi, \xi)|^2)^{1/2} : \varphi \in W_2^{-p}(T), \|\varphi\| \leq 1 \right\} < +\infty$$

verstanden. Im deterministischen Fall fällt  $W_2^p(T)$  mit dem üblichen Sobolevraum  $W_2^p(T)$  zusammen. Auf ähnliche Weise werden anisotrope stochastische Sobolevräume eingeführt, die im deterministischen Fall mit den Sobolevräumen über  $T = G \times I \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^1$  und dem speziellen Multiindex  $(p, 1)$  zusammenfallen. Im Unterschied zum deterministischen Fall haben die stochastischen Sobolevräume „weniger Glattheitseigenschaften“, z. B. gibt es homogene Felder, für die keine punktwweisen Ableitungen existieren (S. 77).

Im Kapitel II werden stochastische Gleichungen untersucht, in die ein linearer Differentialoperator und ein verallgemeinertes zufälliges Feld als inhomogener Anteil eingehen und gegebenenfalls Randbedingungen enthalten. Insbesondere werden unter Nutzung der stochastischen Sobolevräume und geeigneter Testfunktionen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Randwertaufgaben mit gewöhnlichen stochastischen Differentialgleichungen, einer stochastischen Gleichung der schwingenden Saite, der stochastischen Laplacegleichung und stochastischen Evolutionsgleichungen gewonnen.

Im Kapitel III werden Erwartungswert-, Korrelations- und charakteristische Funktionale für die Lösung der allgemeinen Gleichung des Kapitels II untersucht. Weiterhin wird gezeigt, daß die Lösung die globale Markoveigenschaft besitzt (Definition siehe: Rozanov, Yu. A.: Markov random fields, Springer 1981).

Im Spezialfall Gaußscher zufälliger Felder wird im Kapitel IV eine Likelihoodfunktion eingeführt und bei der Identifikation stochastischer Differentialgleichungen und der Erwartungswertschätzung angewendet.

In dem vorliegenden Buch werden tiefliegende Ergebnisse des Autors zur Forschungsproblematik verallgemeinerter zufälliger Felder und damit zusammenhängender stochastischer partieller Differentialgleichungen exakt und verständlich dargestellt. Das Werk ist ein exelentes Lehrbuch aber auch eine Fundgrube für Mathematiker, die auf dem Gebiet der stochastischen Analysis arbeiten.

Halle

W. Grecksch

**Elliot, R. J., Kopp, E., Mathematics for Finance**, Berlin u. a.: Springer 1999, Approx 300 S., DM 129,–

The field of financial mathematics has attracted considerable attention in recent years and this has led to the appearance of a number of books on the subject. This book is aimed at a mathematical audience with a solid background in probability who want to learn the basic concepts, ideas and tools in financial mathematics. Examples are used sometimes, but the main emphasis is on developing the mathematical theory.

The book splits naturally in two unequal parts. The first five chapters develop the key notions of pricing and hedging by arbitrage arguments in a discrete time framework. To avoid technical issues, much of this is done for a finite market, i.e., over a finite probability space. Chapters 1 and 2 explain pricing by arbitrage, martingale measures and trading in finite markets; in particular, the Black-Scholes formula is derived as the limit of binomial option pricing formulas along a sequence of Cox-Ross-Rubinstein models. Chapter 3 presents the fundamental theorem of asset pricing (the relation between absence of arbitrage and existence of an equivalent martingale measure) in the finite market case and discusses a geometric formulation and the construction of equivalent martingale measures from one step conditional distributions. Chapter 4 explains for finite markets the relation between completeness and martingale representation and chapter 5 presents a treatment of American options as an application of optimal stopping theory in finite discrete time. Throughout this first part, the exposition is usually clear and careful except for one nontrivial point: The authors use repeatedly and without mention the recently proved fact that if  $M$  is a martingale and  $H$  is a predictable process, the discrete time stochastic integral  $\int H dM = \sum H_j(M_j - M_{j-1})$  is again a martingale if it is uniformly bounded below.

The remaining five chapters make up almost two thirds of the book and develop the subject in continuous time. Chapter 6 is a review of definitions and results in continuous time stochastic calculus for Itô processes; this includes general martingale theory, stochastic integration, Itô's formula and stochastic differential equations. Proofs of the more difficult results are mostly outlined or replaced by references. In Chapter 7, theory first continues with Girsanov's theorem and Itô's martingale representation theorem. Option pricing and hedging are then explained in the classical model of geometric Brownian motion with constant coefficients and also for extensions to a multivariate setting. The chapter closes with a lengthy and rather computational section on barrier options. Chapter 8 is a very detailed study of the American put option; this seems rather specialized in comparison with the other topics in the book's second half. Chapter 9 presents some basic concepts for modelling the term structure of interest rates. This includes in particular measure and numéraire changes and explicit computations for some well-known models (Vasiek, Hull-White, Cox-Ingersoll-Ross). The final chapter 10 explains the solution (via the martingale approach) for the problem of maximizing expected utility from consumption and/or terminal wealth in a complete multidimensional Itô process setting.

In my opinion, the second half of the book is overall less convincing than the first one. Despite a general emphasis on technical issues, a number of details are not handled clearly and/or rigorously. The overall concept of the chosen presentation and topics is not always clearly visible, and teaching and learning from the book will require careful reading and thorough checking of a lot of details. But in spite of this, the book contains a wealth of material and does a good job in presenting this in both discrete and continuous time settings.

**Landim, C., Kipnis, C., Scaling Limits for Interacting Particle Systems (Grundlehren 320)**, Berlin u. a., Springer, 1999, XVI + 442 S., DM 159,–

Der Plan für dieses Buch geht, laut Vorwort, etwa auf das Jahr 1991 zurück. Die Absicht der Autoren war damals, ein Lehrbuch im üblichen Sinn zu schreiben, das aus sich heraus verständlich ist und von Mathematikern und mathematischen Physikern, die über Grundkenntnisse in Stochastik verfügen, mit Gewinn gelesen werden kann – so daß sie (wörtliches Zitat, von mir übersetzt) „die Techniken der Theorie des hydrodynamischen Limes von Systemen interagierender Teilchen verstehen“ können. Inwieweit der Tod von Claude Kipnis Ende 1993 eine Änderung des Konzepts bewirkte, kann und muß von Außenstehenden nicht beurteilt werden. Tatsache ist jedenfalls, daß die jetzt vorliegende Fassung, die etwa 5 Jahre später vollendet worden ist, weniger den Charakter eines Lehrbuchs als vielmehr den einer Forschungsmonographie aufweist. Der überwiegende Teil des jetzt vorliegenden Texts stammt von Landim allein und ein großer Teil des Buchs ist der Entwicklung der letzten Jahre vorbehalten. Die Akzentverschiebung, wenn es denn eine gegeben hat, ist dem Buch insgesamt nicht schlecht bekommen. Die Idee des Lehrbuchs hat sich aber noch im Aufbau, in der Anordnung der Kapitel, erhalten: die Ideen werden zunächst in einfachen Fällen vorgestellt und schrittweise werden immer kompliziertere Fälle in die Betrachtung einbezogen. Der Preis, der für dieses „didaktische“ Konzept zu zahlen ist, besteht in einigen Wiederholungen, die aber wohl nur denjenigen ermüden werden, der es sich in Kopf gesetzt hat, das Buch linear, von der ersten bis zur letzten Seite, durchzulesen. Wer die einfachen Beispiele schon gesehen hat, kann ja später mit der Lektüre beginnen, heißt es im Vorwort. (Das ist nicht trivial, weil auf jedes wissenschaftliche Werk mehr oder weniger zutreffend, sondern hängt mit einer Besonderheit der mathematischen Physik zusammen: sie lebt in stärkerem Maß als andere Gebiete der Mathematik vom *ad hoc* zu beweisenden Einzelresultat und nicht vom allgemeinen Super-Theorem, aus dem die Einzelergebnisse logisch folgen; ein solches gibt es meistens gar nicht. Sehr wohl aber gibt es allgemeine Prinzipien, welche die Einzelfälle verbinden und überwölben.)

Stochastische Hydrodynamik steht, was Inhalt und Begriffsbildung betrifft, zwischen Stochastik und Physik; methodisch ist sie in hohem Maß auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen angewiesen. Ihr Gegenstand ist die durch lokale stochastische Gesetze beschriebene Evolution eines räumlich ausgedehnten Systems von „Teilchen“ oder „Masse“. Erzeugung und Vernichtung von Masse wird in den hier betrachteten Modellen ausgeschlossen, zugelassen ist nur Wanderung. Eine Evolution dieses Typs besitzt im einfachsten Fall eine einparametrische Familie von translationsinvarianten stationären (extremalen) Maßen: jedem möglichen Wert der mittleren Massendichte entspricht genau ein Maß aus dieser Familie, das man auch Gleichgewichtszustand nennt. Man sagt, hydrodynamisches Verhalten liege vor, wenn erstens bei passender Skalierung von Raum und Zeit die räumliche Entwicklung der Massenverteilung durch eine deterministische Gleichung vom parabolischen oder hyperbolischen Typ, die sog. hydrodynamische Gleichung, beschrieben wird und wenn zweitens bei passend skaliert Zeit das System lokal, in der Nähe jedes Raumpunkts, sich approximativ in einem Gleichgewichtszustand befindet (wobei die das jeweilige Gleichgewicht charakterisierende Massendichte im großen Maßstab variiert und eben durch die hydrodynamische Gleichung beschrieben wird). Die erste Eigenschaft kann man als ein Gesetz der großen Zahlen ansehen, die zweite ist eine lokale Variante der Konvergenz ins Gleichgewicht, wie man sie in ergodischen Markovketten hat. Beide Aussagen sind Grenzwertsätze, die im Limes  $N$  gegen unendlich gelten; dabei ist der Parameter  $N$  der Skalierungsfaktor, der das Verhältnis von „makroskopischer“ zu „mikroskopischer“ Längeneinheit ausdrückt.

Die Autoren haben, um die Ideen zu fixieren, den Rahmen der räumlich diskreten Teilchensysteme gewählt und nicht den von wechselwirkenden Diffusionen oder kon-

tinuierlichen Spinmodellen; für jeden Wert von  $N$  ist der Raum ein kubisches Gitter mit  $N^d$  Punkten und periodischen Randbedingungen, an jedem Gitterpunkt kann eine endliche Anzahl von Teilchen sich befinden (in einigen Modellen höchstens eines). Was die ansteigenden Grade der Kompliziertheit betrifft, von denen wir im ersten Absatz gesprochen haben, so beginnen die Autoren mit unabhängigen Irrfahrten, schreiten fort zum ebenfalls noch exakt lösbaren Modell der symmetrischen Irrfahrt mit einfachem Ausschluß, kommen dann zu Gradientensystemen und zuletzt zu Systemen, die nicht vom Gradiententyp sind. Andere Gegenstände des Buchs liegen außerhalb dieser linearen Anordnung, z. B. Kapitel 8 bis 11 (siehe nächster Absatz). Nachstehend die Kapitelüberschriften im Wortlauf, teilweise mit kurzer Erläuterung des Rezensenten.

1. An Introductory Example: Independent Random Walks.
2. Some Interacting Particle Systems. (Stellt drei Typen von Teilchensystemen vor: Irrfahrt mit einfachem Ausschluß, Systeme der Reichweite null mit Geschwindigkeitsänderung, attraktive Systeme, enthält aber noch keine Hydrodynamik.)
3. Weak Formulations of Local Equilibrium. (Präzisierung eines zentralen Begriffs.)
4. Hydrodynamic Equations of Symmetric Simple Exclusion Processes.
5. An Example of Reversible Gradient Systems: Symmetric Zero Range Processes.
6. The Relative Entropy Method. (Zeigt, wie man die relative Entropie zwischen dem tatsächlichen Zustand des Systems und einem passenden „räumlich inhomogenen Gleichgewichtsmaß“ kontrollieren und so hydrodynamisches Verhalten nachweisen kann.)
7. Hydrodynamic Limit of Reversible Nongradient Systems.
8. Hydrodynamic Limit of Asymmetric Attractive Processes.
9. Conservation of Local Equilibrium for Attractive Systems.
10. Large Deviations from the Hydrodynamic Limit.
11. Equilibrium Fluctuations of Reversible Dynamics.

(In den Kapiteln 1, 4, 5, 7, 8 geht es jedesmal um den Nachweis hydrodynamischen Verhaltens in der jeweiligen Modellklasse.)

Dazu tritt ein ausführlicher Anhang (von etwa einem Viertel des gesamten Buchumfangs), der Hilfsresultate von unterschiedlichem Schwierigkeits- und Bekanntheitsgrad bereitstellt und dem Zweck dient, das Buch aus sich selbst heraus verständlich zu machen; die Kapitelüberschriften des Anhangs sind:

1. Markov Chains on a Countable Space. (Klingt elementar, es geht aber um Dinge wie additive Funktionale, Feynman-Kac, Dirichletformen und die Kipnis-Varadhansche Maximal-Ungleichung für reversible Markovprozesse.)
2. The Equivalence of Ensembles, Large Deviation Tools and Weak Solutions of Quasi-Linear Differential Equations. (Enthält u. a. einen lokalen Grenzwertsatz für Teilchenzahlen in einem großem Volumen und den Begriff der Entropielösung einer hyperbolischen Gleichung.)
3. Nongradient Tools: Spectral Gap and Closed Forms. (Enthält Sätze über das Spektrum des Generators eines reversiblen Markovprozesses, über die spektrale Lücke in einem allgemeinen Ausschlußprozessen in Dimension 1 und höher und über exakte und geschlossene zufällige Formen in  $Z^d$ , die einem Teilchensystem zugeordnet sind.)

Das Buch ist nach Meinung des Rezensenten eine gelungene Einführung in ein interessantes Gebiet der modernen Stochastik und mathematischen Physik und stellt einen fest umrissenen Gegenstand umfassend dar, vor allem den analytisch-methodischen Aspekt. Die Autoren sind Mathematiker und erfüllen alle Anforderungen an Präzision und Strenge, die mathematische Leser üblicherweise stellen. Die Sicht der Dinge, welche das Buch vermittelt, ist hauptsächlich von Autoren im Umkreis des Courant-Instituts erarbeitet worden; ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit der Namen der Ideengeber seien erwähnt: die Entropiemethode von Guo, Papanicolaou, Varadhan (1988), die „Nicht-Gradienten-

Methode“ von Quastel (1992) und Varadhan (1994), die logarithmischen Sobolev-Ungleichungen von Yau (1996, 1997). Lehrbuchcharakter hat das vorliegende Buch insofern, als im Prinzip alles, was über das Grundwissen in Stochastik hinausgeht, im Text oder im Anhang entwickelt wird. Ebensogut ist es aber auch als Ergebnisbericht zu lesen, der den Stand der Forschung zu einem bestimmten Zeitpunkt dokumentiert. Die Funktion als Ergebnisbericht tritt in Erscheinung in den Kommentaren und Literaturhinweisen am Ende jedes Kapitels, wo die geschichtliche Entwicklung kurz skizziert wird; dort ist auch viel Information zu finden über verwandte Ideen und Ansätze, die im Buch – aus Platzgründen und um der systematischen Geschlossenheit willen – nicht verfolgt werden. Bei diesen Kommentaren gibt es den einzigen Kritikpunkt, der mir erwähnenswert erscheint: es werden teilweise *zuviele* Literaturstellen zu verwandten Themen vorgestellt, und das oft im parataktischen Stil, der jede Arbeit mit genau einem Satz bedenkt. Die Beweise sind übersichtlich und gut gegliedert, was das Nachvollziehen der Argumente sehr erleichtert; die didaktische Leistung der Autoren in diesem Punkt ist beeindruckend. Ein sorgfältig zusammengestelltes Literaturverzeichnis von etwa 400 Titeln schließt das Buch ab. Insgesamt ein sehr gut geschriebener und nützlicher Band, der auch äußerlich angenehm gestaltet ist, nach den besten Standards des Hauses Springer. Eine Zierde für die gelbe Reihe!

Heidelberg

H. Rost

**Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J., Spectral/hp Element Methods for CFD.** Oxford University Press, 1999, vi 390 S., £55,-

Lange Zeit haben Spektralverfahren ein Nischendasein in der numerischen Strömungsmechanik geführt, und zwar bei der Berechnung inkompressibler, reibungsbehafteter Strömungen in einfachen Geometrien. Hier konnten Sie ihre Vorteile (hohe Genauigkeit und Auflösung) ausspielen und ihre Nachteile (globale Ansatzfunktionen, Festlegung auf rechteckige Geometrien, hohe Kosten) fielen nicht ins Gewicht bzw. wurden akzeptiert. Durch wichtige Arbeiten von Orszag, Tadmor, Shu u. v. a. über spektrale Viskositäten, Filteralgorithmen und wesentlich nicht-oszillierende Spektralverfahren konnte sich diese Klasse von Methoden in den letzten Jahren auch in der Berechnung hyperbolischer Erhaltungsgleichungen behaupten, wobei allerdings die Frage der Kosten ausgeklammert bleiben mußte. Mit der Erfindung der Spektral-Element-Verfahren in den 80er Jahren wurden die Weichen gestellt, um den Einfluß der Spektralverfahren auszuweiten. Nun verfügte man über spektrale Ansätze auf Elementen, während an den Elementengrenzen Kopplungsbedingungen vorgegeben wurden, um Eigenschaften der Strömung (Stetigkeit, etc.) zu modellieren. Noch vor wenigen Jahren lagen die Kosten einer einfachen Spektral-Element-Methode für eine lineare Transportgleichung bei einem Vielfachen der Kosten für ein Differenzenverfahren zweiter Ordnung; auf der Haben-Seite standen mehrere Tausend Zeitschritte, nach denen man einen anfänglichen Rechteckimpuls noch klar als solchen erkennen konnte.

Inzwischen hat sich die Situation zu Gunsten der Spektralverfahren dramatisch verändert, was das Buch von Karniadakis und Sherwin beweist. Zu Beginn sei darauf verwiesen, daß die Autoren als Ingenieure für Ingenieure schreiben – ich werde später auf diesen Punkt zurückkommen.

Das Buch beginnt mit einer kleinen Einführung in die Numerik der Strömungsmechanik inkompressibler Fluide. In dem sehr ausführlich gehaltenen zweiten Kapitel werden alle Details von Spektralverfahren im räumlich eindimensionalen erläutert. Als sehr schade habe ich dabei empfunden, daß sich die Autoren von vornherein auf die Galerkin- (d. h. FEM-) Variante der Spektralverfahren festgelegt haben und die in der Praxis

bedeutenden Kollokationsmethoden nur streifen. Seitenlange Beschreibungen der technischen Details (Aufbau der Matrizen, Lösung der linearen Systeme, etc.) folgen, was insbesondere für Einsteiger in dieses Gebiet von hohem Wert ist. Die Unterscheidung in *nodes* und *modes* bei den Ansatzfunktionen erscheint im ersten Moment als nebensächliches Detail, erweist sich aber gerade im mehrdimensionalen Fall durch die Aufspaltung in innere und Randmoden als ein Schlüssel zur Konstruktion von Spektral-Element-Verfahren, da ja gewisse Kopplungsbedingungen an den Elementgrenzen formuliert werden müssen. Die Autoren haben sich weiterhin bemüht, in diesem Kapitel auch einige mathematische Ergebnisse über die Eigenschaften von Galerkin-Approximationen unterzubringen. So finden sich Bemerkungen über Fehlerabschätzung in Sobolev-Räumen relativ harmonisch neben praktischen Tips, was die Verwendung der verschiedenen Quadraturen betrifft.

Im dritten Kapitel werden die Ideen für den räumlich mehrdimensionalen Fall auf einem Standardelement entwickelt. Hier zeigt sich der große Entwicklungssprung der Spektral-Element-Verfahren in den letzten Jahren am deutlichsten. Basierend auf Ideen von Orszag und Dubiner lassen sich nun Verfahren auf Dreiecksgittern konstruieren, was den Spektral-Element-Verfahren die Welt der Adaption erschließt. Dazu wird eine Abbildung eines quadrilateralen Elements auf ein Dreieck verwendet, die zu einer Singularität an einem Dreieckseckpunkt führt. Die dadurch entstehenden Probleme mit der lokalen Polynombasis werden durch ein angepaßtes inneres Produkt (das *warped product* Dubiners) kompensiert. Das vierte Kapitel beschreibt den Zusammenhang einzelner Elemente zu einem Gitter und damit den Übergang zu einem praktisch brauchbaren Spektral-Element-Verfahren. Den Sprung in die Klasse der echten *hp*-Verfahren dokumentieren die Autoren am Beispiel nicht-konformer Elemente in Kapitel 5. Damit ist die allgemeine Beschreibung der *hp*-Spektral-Element-Verfahren abgeschlossen. In den folgenden fünf Kapiteln werden Implementierungen für die verschiedensten Gleichungen der Strömungsmechanik diskutiert. Eine Reihe nützlicher Anhänge beschließt das Buch.

Karniadakis' und Sherwins' Buch ist eine Bereicherung für alle Praktiker im Bereich der numerischen Strömungsmechanik. Es gibt eine klare Einführung in die Techniken der *hp*-Spektral-Element-Methoden und enthält zahlreiche Tips und Tricks zu ihrer Implementierung. Mathematiker werden an verschiedenen Stellen die Numerische Analysis vermissen, was einem Buch dieser Ausrichtung jedoch keinesfalls anzulasten ist. Störend wirken einige Druckfehler, so etwa fehlende Vorzeichen in Figure 3.9. Eine Geschmacksfrage bleibt die Entscheidung der Autoren, sich auf Galerkin-Formulierungen zu konzentrieren.

---

# de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications

---

## **Volume 7:**

Mikhail Kamenskii / Valeri  
Obukhovskii / Pietro Zecca  
**Condensing Multivalued  
Maps and Semilinear  
Differential Inclusions  
in Banach Spaces**

2001. 24 x 17 cm. XII, 231 pages. Hardcover.  
DM 196,- / öS 1431,-\*/ sFr 169,- / for USA,  
Canada, Mexico US\$ 98.95  
From 1.1.2002: € 98,-  
• ISBN 3-11-016989-4

The theory of set-valued maps and of differential inclusion is developed in recent years both as a field of his own and as an approach to control theory. The book deals with the theory of semilinear differential inclusions in infinite dimensional spaces. In this setting, problems of interest to applications do not suppose neither convexity of the map or compactness of the multi-operators. These assumption implies the development of the theory of measure of noncompactness and the construction of a degree theory for condensing mapping. Of particular interest is the approach to the case when the linear part is a generator of a condensing, strongly continuous semigroup. In this context, the existence of solutions for the Cauchy and periodic problems are proved as well as the topological properties of the solution sets. Examples of applications to the control of transmission line and to hybrid systems are presented.

## **Volume 6:**

Jianhong Wu  
**Introduction to Neural  
Dynamics and Signal  
Transmission Delay**

2001. 24 x 17 cm. X, 182 pages. Hardcover.  
DM 99,90 / öS 729,-\* / sFr 88,-/ for USA,  
Canada, Mexico US\$ 49.95  
From 1.1.2002: € 49,95  
• ISBN 3-11-016988-6

In the design of a neural network, either for biological modeling, cognitive simulation, numerical computation or engineering applications, it is important to investigate the network's computational performance which is usually described by the long-term behaviors, called dynamics, of the model equations. The purpose of this book is to give an introduction to the mathematical modeling and analysis of networks of neurons from the viewpoint of dynamical systems.

### **Contents:**

Preface · The structure of neural networks ·  
Dynamic models of networks · Simple networks ·  
Content-addressable memory storage ·  
Signal transmission delays · Bibliography ·  
Index.

Prices are subject to change / \*suggested retail price

---

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG  
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin  
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0  
Fax +49-(0)30-2 60 05-251  
www.deGruyter.de



de Gruyter  
Berlin · New York

## ***Vom Problem zum Programm: Ein Kurs in Angewandter Mathematik***

Thomas Sonar

### **Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik**

Eine Einführung für Lehramtsstudenten, Lehrer und Schüler.

Mit Java-Übungen im Internet von Thorsten Grahs.

2001. 237 S. Br. DM 38,00/U 19,00

ISBN 3-528-03179-4

Inhalt: Modellbildung oder: Wie hätte Leonardo modelliert? - Wie schnell wächst Fußpilz? - Wie wirtschaftlich ist mein Betrieb? - Wie sendet Asterix Geheimbotschaften an Teefax? - Was haben Tomographie und Wasserleitungen gemeinsam? - Wie fließt der Straßenverkehr? - Dem Zufall keine Chance? - Wie fängt der Hai die Beute?

Dieses Buch liefert wichtige Grundlagen und die Motivation für die Beschäftigung mit Angewandter Mathematik. Es macht wenig Sinn, gerade wenn man an die Schulen denkt, Numerische Mathematik als Selbstzweck zu präsentieren. Wo ist der Sinn von Interpolation, Approximation und der Lösung linearer Systeme, wenn man nicht weiß, in welchen vielfältigen Problemen diese Techniken anwendbar sind? Bei der Suche nach Anwendungen stößt man auf die Modellierung technischer, biologischer und ökonomischer Fragen. Desweiteren muss das Modell in irgendeiner Form auf einen Rechner abgebildet werden, wozu man einige Kenntnisse aus der Informatik benötigt. Bei dieser Implementierung spielen Algorithmen der Numerischen Mathematik eine zentrale Rolle. Das Buch ist leicht verständlich und sogar unterhaltsam geschrieben. Zu jedem Kapitel gibt es Tipps zur Umsetzung in Java-Programme. Vollständige Java-Implementierungen bietet der Online Service zum Buch.



Vieweg Verlag · Abraham-Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden

Fax 0611.7878-400 · [www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)

Der genannte Europreis gilt ab 1.1.2002



# ***Handwerkszeug zur Lösung physikalisch-technischer Probleme***

Michael Jung/Ulrich Langer

## **Methode der finiten Elemente für Ingenieure**

Eine Einführung in die numerischen Grundlagen  
und Computersimulation

2001. 378 S. Br. DM 84,00/Euro 42,00

ISBN 3-519-02973-1

Inhalt: FE-Simulation - Modellierungsbeispiele - Grundprinzipien der FEM - FEM für mehrdimensionale Randwertprobleme 2. Ordnung - Auflösung linearer FE-Gleichungssysteme - Auflösung nichtlinearer FE-Gleichungssysteme - Galerkin-FEM für Anfangsrandwertaufgaben - Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen - Praktikumsaufgaben

Dieses Lehrbuch ist als Einführung in die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) und in das dazu notwendige Handwerkszeug aus der numerischen linearen Algebra konzipiert. Für verschiedene physikalisch-technische Probleme wie Wärmeleitprobleme, Probleme aus der Festkörpermechanik, der Elektro- und Magnetostatik wird deren Modellierung mittels partieller Differentialgleichungen diskutiert. Die Grundideen der FEM, der wohl am häufigsten genutzten Rechenmethode für diese Modelle, und Lösungstechniken für die bei der FEM-Diskretisierung entstehenden (nicht)linearen Gleichungssysteme bzw. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen werden anwendungsorientiert vermittelt.



Teubner Verlag · Abraham-Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden  
Fax 0611.7878-400 · [www.teubner.de](http://www.teubner.de)  
Der genannte Europreis gilt ab 1.1.2002

## ***A numerical analysis***

Andreas Prohl

### **Computational Micromagnetism**

2001. xvi, 304 pp. Softc. Euro 44,00

ISBN 3-519-00358-9

Contents: I: Numerical Stationary Micromagnetism - Direct Minimization - Convexified Micromagnetism - Relaxed Micromagnetism using Young Measures - II: Numerical Nonstationary Micromagnetism - The Landau-Lifshitz-Gilbert Equation - The Maxwell-Landau-Lifshitz-Gilbert Equation - Nematic Liquid Crystals - Summary and Outlook

The objective of this monograph is a numerical analysis of the well-accepted models of Landau, Lifshitz and Gilbert for (electrically conducting) ferromagnets. Part I discusses convergence behavior of different finite element schemes for solving the stationary problem. Part II deals with numerical analyses of different penalization/projection strategies in nonstationary micromagnetism; it closes with a chapter on nematic liquid crystals to show applicability of these new methods to further applications.

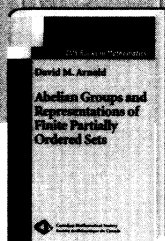
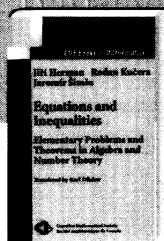


**Teubner**

Teubner Verlag · Abraham-Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden  
Fax 0611.7878-400 · [www.teubner.de](http://www.teubner.de)

# CMS Books in Mathematics

Edited by Jonathan M. Borwein and Peter Borwein



**J. Herman, R. Kučera, J. Šimša**  
**Equations and Inequalities**

Elementary Problems and Theorems  
in Algebra and Number Theory

While it emphasizes some methods that are not usually covered in beginning university courses, the book nevertheless teaches techniques and skills which are useful beyond the specific topics covered here. With approximately 330 examples and 760 exercises.

„I have nothing but praise for this book, and I can't imagine a mathematician who wouldn't want to own it.“

*J. Wimp, Mathematical Intelligencer, Vol.23/1, 2001*

2000. XII, 344 pp. Hardcover **DM 149,90**; £ 55,50; FF 605,-;  
sFr 129,-; Lit. 177.140 ISBN 0-387-98942-0

**J.M. Borwein, A.S. Lewis**  
**Convex Analysis and  
Nonlinear Optimization**

Theory and Examples

This book provides a concise, accessible account of convex analysis and its applications and extensions, for a broad audience. It can serve as a teaching text, at roughly the level of first year graduate students, since the main body of the text is self-contained, with each section rounded off by an often extensive set of optional exercises.

2000. X, 273 pp. Hardcover **DM 149,90**; £ 55,50; FF 605,-;  
sFr 129,-; Lit. 177.140 ISBN 0-387-98940-4

Please order from  
Springer · Customer Service  
Haberstr. 7  
69126 Heidelberg, Germany  
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 217/8  
Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 229  
e-mail: [orders@springer.de](mailto:orders@springer.de)  
or through your bookseller

**D. Arnold**

**Abelian Groups and Representations  
of Finite Partially Ordered Sets**

An exposition of connections between representations of finite partially ordered sets and abelian groups. Emphasis is placed throughout on classification, a description of the objects up to isomorphism, and computation of representation type, a measure of when classification is feasible.

2000. XII, 244 pp. Hardcover **DM 169,90**; £ 62,50; FF 685,-;  
sFr 146,50; Lit. 200.780 ISBN 0-387-98982-X

**F.R. Deutsch**

**Best Approximation  
in Inner Product Spaces**

2001. XV, 338 pp. Hardcover **DM 149,90**; £ 55,50; FF 605,-;  
sFr 129,-; Lit. 177.140 ISBN 0-387-95156-3

**M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos  
Santalucia, J. Pelant, V. Zizler**

**Functional Analysis and  
Infinite-Dimensional Geometry**

2001. IX, 451 pp. Hardcover **DM 169,90**; £ 62,50; FF 685,-;  
sFr 146,50; Lit. 200.780 ISBN 0-387-95219-5

**G.M. Phillips**

**Two Millennia of Mathematics  
From Archimedes to Gauss**

2000. XII, 223 pp. Hardcover **DM 109,90**; £ 40,50; FF 443,-;  
sFr 95,-; Lit. 129.880 ISBN 0-387-95022-2



Canadian Mathematical Society  
Société mathématique du Canada

[www.springer.de/math/](http://www.springer.de/math/)



Springer

All prices are net-prices subject to local VAT, e.g. in Germany 7% VAT for books and 16% VAT for electronic products. Exception: prices quoted in FF and Lit. include local VAT. Prices and other details are subject to change without notice. d&p - 7913/MNT/SF

# Bei uns müssen Sie Spaß an IT haben!

**Aber kein Informatiker sein.**

## **Kommen Sie zu einem der führenden IT-Beratungsunternehmen!**

Viele unserer besten Mitarbeiter sind Naturwissenschaftler, Ingenieure oder Mathematiker. Denn das wichtigste Element unseres Erfolgs ist der Spaß am Begreifen und Beherrschen komplexer Prozesse. Als Consultant für SCM (Supply Chain Management), ERP (Enterprise Resource Planning) oder E-Business in der Prozess- oder High-Tech-Industrie sowie dem Handel können Sie die traditionellen fachlichen Begrenzungen Ihrer Ausbildung sprengen – und richtig Karriere machen.

### **Wir bieten Ihnen:**

- Ein auf Sie abgestimmtes Coaching sowie fundierte Weiterbildung
- Herausfordernde Aufgaben im Prozessdesign und in der Prozessimplementierung
- Ein sehr attraktives, leistungsbezogenes Kompensationspaket
- Ein solides unternehmerisches Umfeld
- Einen virtuellen Arbeitsplatz mit wechselnden Einsatzorten, der es Ihnen ermöglicht, Ihren bevorzugten Wohnsitz zu behalten

**j&m**  
MANAGEMENT  
CONSULTING

j&m berät erste Adressen in der Prozess- und High-Tech-Industrie sowie im Handel. Gemeinsam mit unseren Kunden gestalten wir zukunftsweisende Geschäftsprozesse und setzen sie mit Hilfe von ERP-, e-Business- und Supply-Chain-Management-Technologien um. j&m ist Kooperationspartner der führenden Softwareanbieter SAP, BEA Systems und i2 Technologies. Wir haben mehrfach neue Software-Releases weltweit als Erste eingeführt.

### **Das sollten Sie mitbringen:**

- Sie denken und handeln eigenverantwortlich und unternehmerisch
- Sie sind kreativ und haben fundierte IT-Kenntnisse
- Sie haben bereits Erfahrungen in einem Beratungsunternehmen gesammelt oder sind Hochschulabsolvent der Fachrichtungen Informatik, Mathematik, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen, Physik, Chemie oder BWL mit überdurchschnittlichem Abschluss
- Sie haben Spaß an der Planung und Umsetzung komplexer eBusiness-, SCM- und ERP-Prozesse
- Sie sind nicht älter als 35 Jahre und bereit, auch international zu reisen

### **j&m Management Consulting**

Berlin · Düsseldorf · Mannheim · München · Zürich

Ihre Bewerbung für einen der Standorte Berlin, Düsseldorf, Mannheim oder München richten Sie bitte an das zentrale Recruiting für Deutschland:

#### **j&m Management Consulting GmbH**

Kaiserringforum

Willy Brandt-Platz 5 · 68161 Mannheim

Telefon +49 621 124 769-0 · Fax +49 621 124 769-20

eMail: bewerbung@jnm.de · Internet: www.jnm.de