104. Band Heft 1, Mai 2002

D 20577

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:
Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Heinz Detering

Abo-/Leserservice:
Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:
Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 95,– (158,– sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 104. Bd. 2002, Nr. 1

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 104. Bd. 2002, Nr. 1

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

P. Ullrich: Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“: Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorboten der komplexen Räume

I. Ekeland: Nonlinear Systems of PDES Arising from Economic Theory

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 104. Bd. 2002, Nr. 1

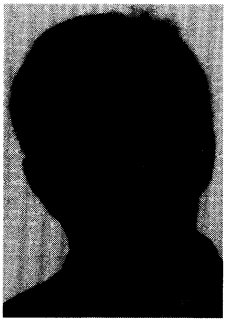
Vorwort

Das vorliegende erste Heft des Bandes 104 bringt eine neue Erscheinungsform des Jahresberichts mit sich. Auf Vorschlag des Teubner Verlages und auf Beschluss des DMV-Präsidiums wird das vorliegende neue Layout der Umschlagseiten verwendet. Das neue DMV-Logo soll die Verbindung zur Deutschen Mathematiker-Vereinigung unterstreichen. Auch im Innenteil versprechen wir uns von der neuen Aufmachung mehr Übersichtlichkeit.

Inhaltlich wendet sich der Jahresbericht weiterhin an einen breiten Leserkreis. Daher werden neben den Buchbesprechungen auch in Zukunft Übersichtsartikel und historische Beiträge den Schwerpunkt der Veröffentlichungen bilden. Das Herausgebergremium wird Nachrufe auf ausgewählte verstorbene Kolleginnen und Kollegen initiieren, die dann zeitnah im Jahresbericht erscheinen sollen.

Das DMV-Präsidium berät gegenwärtig über die weitere Entwicklung des Jahresberichts. Aus diesem Grund hat der Teubner-Verlag einen Fragebogen entwickelt, der diesem Heft beigefügt ist. Ihre Meinung ist uns herzlich willkommen und wir werden gern Ihre Ideen und Kommentare aufgreifen.

A. Krieg



On the character space of commutative hypergroups

R. Lasser

Abstract

- Keywords and Phrases: Hypergroups, dual objects
- Mathematics Subject Classification: 43 A 62, 43 A 40

In this paper we present some results on the character space of a commutative hypergroup. After a summary of basic facts we study the set S of characters which carries all the information of the hypergroup. Furthermore we construct translation operators on L^2- and C_0-spaces defined on S.

Eingegangen: 17. 12. 2001

Rupert Lasser, Zentrum Mathematik, TU München, 80290 München,
Institut für Biomathematik und Biometrie, GSF-Forschungszentrum,
85758 Neuherberg. E-Mail:lasser@gsf.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

Hypergroups have been independently created in the early 1970's by Charles Dunkl [6], [7], Robert Jewett [9] and René Spector [12]. The standard became Jewett's 101-page paper [9] because he worked out a good deal of the basic theory. Bloom and Heyer's book [3] contains most of the mathematics that has been done on the basis of Jewett's axioms. Structures closely related to the Dunkl-Jewett-Spector creations of the 1970's had been studied in the early 1950's by Berezansky and colleagues and had been called hypercomplex systems. The axioms and terminology are very different and the connection is still not realized by many workers. In the meantime there is a monograph [1] in English available to investigate connections and distinctions between hypercomplex systems and hypergroups, compare also [2].

In the preface to the proceedings [4] of the Seattle conference on hypergroups one finds the remarkable statements, "Hypergroups occur so often and in so many different and important contexts, that mathematicians all over the world have been discovering the same mathematical structure hidden in very different applications, and publishing theorems about these structures, in many cases without even knowing that they were talking about hypergroups".

Harmonic analysis of commutative hypergroups is based on information on the dual, the character space. In contrast to the case of locally compact abelian groups the relationship between a commutative hypergroup and its dual can be quite complicated. Whereas in the group case one has the Pontryagin duality principle, the dual has in general not a (natural) hypergroup structure. However in some nice cases the dual bears the correct structure such that the bidual may be identified with the given hypergroup as one expects by Pontryagin's principle.

The purpose of this paper is to present some results on the character space in the rather difficult, very general case, i.e. without or with very weak assumptions in the dual, that might be a starting point for further investigation in harmonic analysis on hypergroups. The contents are as follows. In this section we give a summary of basic facts needed subsequently. In section 2 we study the set $\mathcal{S}$ (see below) of characters which carries all the information of the hypergroup. The main theorem is a characterization of the members of $\mathcal{S}$ by means of a modified $\mathcal{P}_2$-condition. In sections 3 and 4 we construct translation operators on L^2- and C_0-spaces defined on the character space $\mathcal{S}$.

Let K be a locally compact Hausdorff space. Let $C_c(K)$, $C_0(K)$ and $C^b(K)$ the spaces of all continuous functions on K with compact support, those that vanish at infinity, those that are bounded. $M(K)$ denotes the space of all regular complex Borel measures on K which can be identified with $C_0(K)^*$, the dual space of the Banach space $C_0(K)$. $M^1(K)$ is the subset of all probability measures on K.

Definition. Let K be a locally compact Hausdorff space. The triple $(K, \omega, \tilde{\ })$ is called **hypergroup** if the following conditions are satisfied.

(H1) $\omega : K \times K \to M^1(K)$ is a weak-$*$-topology continuous map. The canonical extension $*$ of ω to $M(K)$ given by

$$\mu * \nu(f) = \int_{K\times K} \omega(x,y)(f)\, d(\mu \times \nu)(x,y), \qquad f \in C_0(K),\ \mu,\nu \in M(K)$$

satisfies the associativity law, i.e. $\epsilon_x * \omega(y,z) = \omega(x,y) * \epsilon_z$ for all $x,y,z \in K$. ω and $*$ are called convolution.

(H2) supp $(\omega(x,y))$ is compact for every $x,y \in K$.

(H3) $\tilde{}: K \to K$ is a homeomorphism (called involution) such that $\tilde{\tilde{x}} = x$ and $(\omega(x,y))\tilde{} = \omega(\tilde{y},\tilde{x})$ for all $x,y \in K$, where $\tilde{\mu}$ denotes the image of $\mu \in M(K)$ under involution.

(H4) There exists a (necessarily unique) element $e \in K$ such that $\omega(e,x) = \epsilon_x = \omega(x,e)$ for all $x \in K$. The element e is called unit element.

(H5) We have $e \in$ supp $(\omega(x,\tilde{y}))$ if and only if $x = y$.

(H6) The mapping $(x,y) \mapsto$ supp $(\omega(x,y))$, $K \times K \to \mathcal{C}(K)$ is continuous, where $\mathcal{C}(K)$ is given the Michael topology.

If $\omega(x,y) = \omega(y,x)$ we call K a commutative hypergroup.

In the rest of this paper K will be commutative. The proofs of the following results can be found in [3].

Given $f \in C^b(K)$ we can define translation operators. For $x,y \in K$ let

$$L_y f(x) := \omega(y,x)(f) = \int_K f(z)\, d\omega(y,x)(z)$$

Then $L_y f \in C^b(K)$. If $f \in C_c(K)$ or $C_0(K)$ we have $L_y f \in C_c(K)$ or $L_y f \in C_0(K)$.

There exists a Haar measure m on K. That is a regular positive Borel measure $m \neq 0$ such that $\int_K f(x)\, dm(x) = \int_K L_y f(x)\, dm(x)$ for all $f \in C_c(K)$ and $y \in K$. The translation operator is also defined on $L^p(K,m)$, $1 \leq p \leq \infty$. For each Banach space mentioned already the translation operators are bounded with norm less or equal one. The translation can be extended to module operations of $L^1(K,m)$ on $L^p(K,m)$ by setting

$$L_g f(x) = \int L_{\tilde{y}} f(x) g(y)\, dm(y)$$

for $g \in L^1(K,m)$ and $f \in L^p(K,m)$. Moreover $L^1(K,m)$ is a commutative Banach-$*$-algebra with $f^*(x) = \overline{f(\tilde{x})}$ as involution.

The mapping $g \mapsto L_g$, $L^1(K,m) \to B(L^2(K,m))$ is called regular representation of K. The closure of $\{L_g : g \in L^1(K,m)\}^-$ in the space $B(L^2(K,m))$ of bounded operators on $L^2(K,m)$ is a C^*-algebra, and is denoted by $C^*(K)$.

Now we can introduce three spaces that may be considered as duals of K.

$$\mathcal{X}^b(K) = \{\alpha \in C^b(K) : \alpha(e) = 1,\ L_y\alpha(x) = \alpha(y)\alpha(x) \text{ for all } x,y \in K\}$$

$\mathcal{X}^b(K)$ can be identified with the structure space $\Delta(L^1(K,m))$ of the Banach algebra $L^1(K,m)$. Equipped with the topology of uniform convergence on compact subsets, which is equal to the Gelfand topology, $\mathcal{X}^b(K)$ becomes a locally compact Hausdorff space. Considering the involution on K or in $L^1(K,m)$ we denote

$$\hat{K} = \{\alpha \in \mathcal{X}^b(K) : \alpha(\tilde{x}) = \overline{\alpha(x)} \text{ for all } x \in K\} \subseteq \mathcal{X}^b(K).$$

$\hat{K}$ can be identified with $\Delta_s(L^1(K,m)) = \{h \in \Delta(L^1(K,m)) : h(f^*) = \overline{h(f)}\}$ the set of symmetric homomorphisms on $L^1(K,m)$. The Fourier transform $\hat{f}$ of $f \in L^1(K,m)$ is an element of $C_0(\hat{K})$ and is given by

$$\hat{f}(\alpha) = \int_K f(x)\overline{\alpha(x)}\, dm(x), \qquad \alpha \in K.$$

A third dual object is defined by

$$\mathcal{S} = \{\alpha \in \hat{K} : |\hat{f}(\alpha)| \le \|L_f\| \text{ for all } f \in L^1(K,m)\}.$$

($\|L_f\|$ is the operator norm of $L_f \in B(L^2(K,m))$.)

$\mathcal{S}$ is a nonvoid closed subset of $\hat{K}$, and can be identified with the structure space $\Delta(C^*(K))$ of the commutative C^*-algebra $C^*(K)$. Note that there are three character spaces $\mathcal{S}, \hat{K}, \mathcal{X}^b(K)$ with $\mathcal{S} \subseteq \hat{K} \subseteq \mathcal{X}^b(K)$, where proper inclusions are possible, see [10]. In our opinion the most interesting character space is $\mathcal{S}$. The uniqueness theorem says that $\hat{f}|\mathcal{S} = 0$ already implies $f = 0$ in $L^1(K,m)$. Moreover Plancherel's theorem holds, i.e. there exists a unique regular positive Borel measure π concentrated on $\mathcal{S}$ such that

$$\int_K |f(x)|^2\, dm(x) = \int_{\mathcal{S}} |\hat{f}(\alpha)|^2\, d\pi(\alpha)$$

for all $f \in L^1(K,m) \cap L^2(K,m)$. π is called Plancherel measure. A drawback by choosing $\mathcal{S}$ as dual is the fact that the constant function 1 is in general not contained in $\mathcal{S}$. The inverse Fourier-Stieltjes transform is defined for $a \in M(\hat{K})$ by $\check{a}(x) = \int_{\hat{K}} \alpha(x)\, da(\alpha)$. Obviously $\check{a} \in C^b(K)$.

The Fourier transform defined on $L^1(K,m) \cap L^2(K,m)$ can be extended to an isometric isomorphism $\mathcal{P} : L^2(K,m) \to L^2(\mathcal{S},\pi)$, which is called Plancherel isomorphism. The inversion theorem states that $(\hat{f})^\vee = f$ in $L^1(K,m)$ provided $f \in L^1(K,m)$ and $\hat{f} \in L^1(\hat{K},\pi)$, where pointwise equality is valid if f is continuous.

Many examples of commutative hypergroups are contained in [3], see pages 133–257. Papers dealing mainly with the character space $\hat{K}$ are [13], [14], [11], [8].

2 The support of the Plancherel measure

We begin characterizing those φ with $\varphi = \check{a}$, where supp $a \subseteq$ supp $\pi = \mathcal{S}$. In fact the following result is a Bochner-type theorem describing those bounded continuous functions on K which are inverse Fourier-Stieltjes transforms of positive bounded Borel-measures $\mu \in M(\mathcal{S})$, $\mathcal{S} =$ supp π. The following Theorem 2.1 and Theorem 2.2 are known. Proofs of Theorem 2.1 are in [13] and proofs of Theorem 2.2 are partly in [13] and [8], see also section 4.1 of [3]. For the convenience of the reader we give here a self-contained proof.

Theorem 2.1 *Let $\varphi \in C^b(K)$. Then the following statements are equivalent:*

(i) $\varphi = \check{a}$ *where* $a \in M(\hat{K})$, $a \ge 0$ *and supp* $a \subseteq \mathcal{S}$.

(ii) $\int_K \overline{\varphi(x)} f(x)\, dm(x) \geq 0$ *for all* $f \in C_c(K)$ *with* $\hat{f} \mid \mathcal{S} \geq 0$.

Proof. Assume that $\int_K \overline{\varphi(x)} f(x) dm(x) \geq 0$ for all $f \in C_c(K)$ with $\hat{f} \mid \mathcal{S} \geq 0$. Define $S_\varphi : C_c(K)^\wedge \mid \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ by

$$S_\varphi(\hat{f} \mid \mathcal{S}) = \int_K \overline{\varphi(x)} f(x)\, dm(x).$$

Note that $\mathcal{S}_\varphi$ is well-defined by the uniqueness theorem. Obviously, $\mathcal{S}_\varphi$ is a positive functional on $C_c(K)^\wedge|\mathcal{S}$. Choose a family of functions $k_i \in C_c(K)$, $i \in I$ with $k_i \geq 0$, $\|k_i\|_1 = 1$ and $\operatorname{supp} k_i \to \{e\}$ and define $h_i = k_i * k_i^*$. Then $\lim_i \|h_i * f - f\|_1 = 0$ for each $f \in C_c(K)$ and $\widehat{h_i} \geq 0$, $\|h_i\|_1 \leq 1$. Now let $f \in C_c(K)$ with $\|\hat{f}\|_{\mathcal{S}} \leq 1$. For proving the continuity of S_φ we can assume that f is real-valued. Then we have $\widehat{h_i}\left(1 \pm \hat{f}\right) |\mathcal{S} \geq 0$, and hence $S_\varphi\left(\widehat{h_i} \mid \mathcal{S}\right) \geq |S_\varphi((h_i * f)^\wedge \mid \mathcal{S})|$. Furthermore

$$\lim_i S_\varphi\left(\widehat{h_i}|\mathcal{S}\right) = \lim_i \int_K \overline{\varphi(x)} h_i(x)\, dm(x) \leq \|\varphi\|_\infty$$

and

$$\lim_i \left|S_\varphi\left((h_i * f)^\wedge |\mathcal{S}\right)\right| = \lim_i \left|\int_K \overline{\varphi(x)} h_i * f(x)\, dm(x)\right| = \left|\int_K \overline{\varphi(x)} f(x)\, dm(x)\right|$$
$$= \left|S_\varphi\left(\hat{f} \mid \mathcal{S}\right)\right|.$$

Thus we have $\left|S_\varphi\left(\hat{f} \mid \mathcal{S}\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty$, and so far we have shown that φ is a positive, $\|.\|_{\mathcal{S}}$-continuous functional on $C_c(K)^\wedge | \mathcal{S}$. Therefore there exists a unique positive measure $a \in M(\hat{K})$ with $\operatorname{supp} a \subseteq \mathcal{S}$ and

$$\int_K \overline{\varphi(x)} f(x)\, dm(x) = S_\varphi\left(\hat{f} | \mathcal{S}\right) = \int_{\hat{K}} \hat{f}(\alpha)\, da(\alpha) = \int_K \overline{\check{a}(x)} f(x)\, dm(x)$$

for every $f \in C_c(K)$. Using the continuity of $\check{a}$ and φ we obtain $\check{a} = \varphi$.

The converse implication follows immediately from

$$\int_K \overline{\varphi(x)} f(x)\, dm(x) = \int_{\hat{K}} \hat{f}(\alpha)\, da(\alpha).$$

◇

Now we deal with the problem that $\mathcal{S} = \operatorname{supp} \pi$ is in general not equal to $\hat{K}$, a situation very different to the group case. Examples where $\operatorname{supp} \pi$ is a proper subset of $\hat{K}$ can be found in [3] and [10].

Definition. Let $\alpha \in \hat{K}$. We say that the P_2-condition is satisfied in α if for each $\varepsilon > 0$ and every compact subset $C \subseteq K$ there exists some $g \in C_c(K)$ such that $\|g\|_2 = 1$ and

$$\|L_{\tilde{y}} g - \overline{\alpha(y)} g\|_2 < \varepsilon$$

for all $y \in C$.

We characterize those $\alpha \in \hat{K}$ that belong to $\mathcal{S} = \operatorname{supp} \pi$.

Theorem 2.2 *Let $\alpha \in \hat{K}$. The following conditions are equivalent:*

(i) $\alpha \in \mathcal{S} = \operatorname{supp} \pi$.
(ii) For all $f \in C_c(K)$ with $\hat{f}|\mathcal{S} \geq 0$ one has $\hat{f}(\alpha) \geq 0$.
(iii) There exists a net $(f_i)_{i \in I} \subseteq C_c(K)$, $\|f_i\|_2 = 1$ such that $f_i * f_i^*$ converges to α uniformly on compact subsets of K.
(iv) The P_2-condition is satisfied in α.
(v) There exists a net $(g_i)_{i \in I} \subseteq C_c(K)$ with $\widehat{g_i}|\mathcal{S} \geq 0$ such that g_i converges to α uniformly on compact subsets of K.

Proof. Conditions (i) and (ii) are obviously equivalent by Theorem (2.1). Now we show that (i) implies (iii). Choose a compact neighborhood $U \subseteq \hat{K}$ of α such that

$$U \subseteq V\left(\alpha, \frac{\varepsilon}{2}; C\right) = \{\beta \in \hat{K} : |\alpha(x) - \beta(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{for all } x \in C\}.$$

Define $h = \chi_U / \pi(U) \in L^1(\hat{K}, \pi)$. Then we have for all $x \in C$

$$|\check{h}(x) - \alpha(x)| = 1/\pi(U) \left| \int_U \beta(x)\, d\pi(\beta) - \int_U \alpha(x)\, d\pi(\beta) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

For $h^{1/2} = \chi_U / \pi(U)^{1/2}$ exists some $f \in C_c(K)$ such that $\|\hat{f} - h^{1/2}\|_2 < \varepsilon/4$. Since $\|h^{1/2}\|_2 = 1$ we can assume that $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 = 1$. Furthermore we get

$$\begin{aligned} \|(f * f^*)^\wedge - h\|_1 = \||\hat{f}|^2 - h\|_1 &\leq \int_{\hat{K}} \left|\hat{f}(\beta) - h^{1/2}(\beta)\right| \cdot \left||\hat{f}|(\beta) + h^{1/2}(\beta)\right| d\pi(\beta) \\ &\leq \|\hat{f} - h^{1/2}\|_2 \left(\|\hat{f}\|_2 + \|h^{1/2}\|_2\right) = 2\|\hat{f} - h^{1/2}\|_2 < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

We obtain for $x \in K$

$$|f * f^*(x) - \check{h}(x)| = |((f * f^*)^\wedge)^\vee(x) - \check{h}(x)| \leq \|(f * f^*)^\wedge - h\|_1 < \varepsilon/2,$$

and hence $|f * f^*(x) - \alpha(x)| < \varepsilon$ for every $x \in C$.

In order to prove (iii) $\Longrightarrow$ (iv) consider $C \subseteq K$ compact, and let $\varepsilon > 0$. By (iii) exists a function $f \in C_c(K)$ with $\|f\|_2 = 1$ and

$$|f * f^*(x) - \alpha(x)| < \varepsilon$$

for all $x \in C * C$. (The convolution of two sets $A, B \in K$ is defined by $A * B = \bigcup_{x \in A, y \in B} \operatorname{supp} \omega(x, y)$.) We assume that $e \in C$, and $C = \tilde{C}$. Since for all $x, y \in C$

$$|L_y(f * f^*)(x) - \alpha(y)\alpha(x)| \leq \int_K |f * f^*(z) - \alpha(z)|\, d\omega(y, x)(z) < \varepsilon,$$

and $|f * f^*(x)\alpha(y) - \alpha(x)\alpha(y)| < \varepsilon$, we obtain

$$|L_y(f * f^*)(x) - f * f^*(x)\alpha(y)| < 2\varepsilon,$$

and hence (using $\|f\|_2 = 1$)

$$\begin{aligned}&\left|\int_K \overline{L_{\tilde{x}}f(z)}\left[L_y f(z)-\alpha(y)f(z)\right]dm(z)\right|\\&=\left|\int_K \overline{f(z)}\left[L_x(L_y f)(z)-\alpha(y)L_x f(z)\right]dm(z)\right|\\&=\left|L_y(f*f^*)(x)-\alpha(y)f*f^*(x)\right|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

In a similar way we get for $y\in C,\ x\in K$

$$\left|\int_K \overline{\alpha(\tilde{x})f(z)}\left[L_y f(z)-\alpha(y)f(z)\right]dm(z)\right| = |\alpha(x)||f*f^*(y)-\alpha(y)|<\varepsilon.$$

For $\tilde{x}=y\in C$ we have therefore

$$\|L_y f-\alpha(y)f\|_2^2=\int_K \overline{[L_y f(z)-\alpha(y)f(z)]}[L_y f(z)-\alpha(y)f(z)]\,dm(z)\leq 3\varepsilon,$$

thus (iii) $\Longrightarrow$ (iv) is shown.

Now assume that the P_2-condition is satisfied in α. We prove that

$$|\hat{f}(\alpha)|\leq \sup\{\|f*g\|_2 : g\in L^2(K,m),\ \|g\|_2=1\}\qquad \text{for every } f\in C_c(K),\ f\neq 0,$$

that is $\alpha\in\mathcal{S}$. There exists a function $g\in L^2(K,m),\ \|g\|_2=1$ such that

$$\|L_{\tilde{y}}g-\overline{\alpha(y)}g\|_2<\varepsilon/\|f\|_1\qquad \text{for all } y\in \operatorname{supp} f.$$

Since

$$f*g(x)-\hat{f}(\alpha)g(x)=\int_K f(y)\left(L_{\tilde{y}}g(x)-\overline{\alpha(y)}g(x)\right)dm(y),$$

it follows that

$$\|f*g-\hat{f}(\alpha)g\|_2\leq \int_K |f(y)|\cdot\|L_{\tilde{y}}g-\overline{\alpha(y)}g\|_2\,dm(y)<\varepsilon.$$

Thus

$$|\hat{f}(\alpha)|=|\hat{f}(\alpha)|\cdot\|g\|_2\leq\varepsilon+\|f*g\|_2,$$

which implies

$$|\hat{f}(\alpha)|\leq\sup\{\|f*g\|_2 : g\in L^2(K,m),\ \|g\|_2=1\}.$$

So far we have shown that the conditions (i), (ii), (iii) and (iv) are equivalent. It is clear to see that (iii) implies (v). Finally we show (v) $\Longrightarrow$ (ii). Let $f\in C_c(K)$ with $\hat{f}\,|\,\mathcal{S}\geq 0$. There exists a net $(g_i)_{i\in I},\ g_i\in C_c(K)$ with $\hat{g}_i\,|\,\mathcal{S}\geq 0$, such that g_i converges to α uniformly on $\operatorname{supp} f$. Then $(f*g_i)^\wedge\,|\,\mathcal{S}=\hat{f}\hat{g}_i\,|\,\mathcal{S}\geq 0$ and

$$\hat{f}(\alpha) = \lim_i \int_K f(x) g_i(\tilde{x})\, dm(x) = \lim_i f * g_i(e) = \lim_i \int_{\hat{K}} (f * g_i)^\wedge(\beta)\, d\pi(\beta) \geq 0.$$

◇

Applying condition (iv) of Theorem 2.2 we see immediately that $\alpha \in \hat{K} \cap L^2(K,m)$ implies $\alpha \in \mathcal{S} = \operatorname{supp} \pi$. In fact put $g = \alpha/\|\alpha\|_2$. Then $L_y g = \alpha(y) g$ and hence the P_2-condition is satisfied in α. Independent of Theorem 2.2 we can prove the following result.

Proposition 2.3 *Let $\alpha \in \hat{K}$. Then $\alpha \in L^2(K,m)$ if, and only if $\pi(\{\alpha\}) > 0$.*

Proof. Let $\alpha \in L^2(K,m) \cap \hat{K}$. Choose a sequence $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n \in C_c(K)$ such that $\lim_{n\to\infty} \|g_n - \alpha\|_2 = 0$. Then $\lim_{n\to\infty} \|L_x g_n - \alpha(x)\alpha\|_2 = 0$ and considering the Plancherel isomorphism we obtain for each $\beta \in \hat{K}$

$$\beta(x)\mathcal{P}(\alpha)(\beta) = \lim_{n\to\infty} \beta(x) \int_K g_n(y)\overline{\beta(y)}\, dm(y) = \lim_{n\to\infty} \int_K g_n(y)\overline{L_{\tilde{x}}\beta(y)}\, dm(y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_K L_x g_n(y)\overline{\beta(y)}\, dm(y) = \alpha(x)\mathcal{P}(\alpha)(\beta).$$

Hence $\mathcal{P}(\alpha)(\beta) = 0$ if $\beta \neq \alpha$. For $\beta = \alpha$ we immediately get $\mathcal{P}(\alpha)(\alpha) = \|\alpha\|_2^2$. The Plancherel-Levitan theorem implies $\pi(\{\alpha\}) = 1/\|\alpha\|_2^2 > 0$. Conversely assume $\pi(\{\alpha\}) > 0$. Consider the delta-function $\delta_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. δ_α is a non-zero element of $L^2(\hat{K},\pi) \cap L^1(\hat{K},\pi)$. It is easily seen that $(\delta_\alpha)^\vee(x) = \pi(\{\alpha\})\alpha(x)$, and therefore $\alpha = (\delta_\alpha)^\vee/\pi(\{\alpha\}) \in L^2(K,m)$. ◇

Next we prove that compact subsets of $\mathcal{S}$ determine the topology of K.

Lemma 2.4 *Let U_{x_0} be a neighbourhood of $x_0 \in K$, and V a neighbourhood of $e \in K$ with compact closure such that $\tilde{V} = V$ and $\{x_0\} * V * V \subseteq U_{x_0}$. Let $g = \chi_V/\|L_{x_0}\chi_V\|_2 \in L^2(K,m)$. Then for every $y \in K \backslash U_{x_0}$ we have $\|L_{x_0}g - L_y g\|_2 \geq 1$.*

Proof. Since $y \notin U_{x_0}$ we have $\{y\} \cap (\{x_0\} * V * V) = \emptyset$, and it follows $(\{y\} * \tilde{V}) \cap (\{x_0\} * V) = \emptyset$, which is equivalent to $(\{\tilde{y}\} * V) \cap (\{\tilde{x}_0\} * V) = \emptyset$. Since $\{z \in K : L_y g(z) \neq 0\} \subseteq \{\tilde{y}\} * V$ it follows

$$\|L_{x_0}g - L_y g\|_2^2 = \|L_{x_0}g\|_2^2 + \|L_y g\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re} \int_K L_{x_0}g(z)\overline{L_y g(z)}\, dm(z)$$

$$= \|L_{x_0}g\|_2^2 + \|L_y g\|_2^2 \geq 1.$$

◇

Lemma 2.5 *Given some neighbourhood U_{x_0} of $x_0 \in K$, there exist a compact subset $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$ and $\epsilon > 0$ such that*

$$W(x_0,\Gamma,\epsilon) := \{y \in K : |\alpha(y) - \alpha(x_0)| < \epsilon \text{ for all } \alpha \in \Gamma\} \subseteq U_{x_0}.$$

Proof. Choose $g \in L^2(K,m)$ as in Lemma 2.4. We know that $\|L_{x_0}g - L_y g\|_2 < 1$ implies $y \in U_{x_0}$. Now there exists $f \in C_c(K)$ with $\|f\|_1 = 1$ and $\|f * g - g\|_2 < \frac{1}{3}$. Obviously, we have $\|L_x g - f * L_x g\|_2 = \|L_x(f * g - g)\|_2 \leq \|f * g - g\|_2 < \frac{1}{3}$ for every $x \in K$, and we get

$$\|f * L_{x_0}g - f * L_y g\|_2 \;=\; \|(L_{x_0}f - L_y f) * g\|_2 \;\le\; \sup\{|(L_{x_0}f - L_y f)^\wedge(\alpha)| : \alpha \in \mathcal{S}\}.$$

Since $\hat{f} \in C_0(\mathcal{S})$ there exists a compact subset $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$ with $|\hat{f}(\alpha)| < \frac{1}{6}$ for all $\alpha \in \mathcal{S}\backslash\Gamma$. For any $y \in W(x_0, \Gamma, \frac{1}{3})$ and every $\alpha \in \mathcal{S}$ holds

$$|(L_{x_0}f - L_y f)^\wedge(\alpha)| \;=\; |\hat{f}(\alpha)|\,|\alpha(x_0) - \alpha(y)| \;<\frac{1}{3},$$

and thus

$$\|L_{x_0}g - L_y g\|_2 \;\le\; \|L_{x_0}g - f * L_{x_0}g\|_2 \;+\; \|f * L_{x_0}g - f * L_y g\|_2$$

$$+\;\|f * L_y g - L_y g\|_2 \;<1,$$

which means $y \in U_{x_0}$. ◇

Theorem 2.6 *For every $x_0 \in K$ the family of subsets*

$$W(x_0, \Gamma, \delta) \;=\; \{y \in K : \;|\alpha(y) - \alpha(x_0)| < \delta \;\text{ for all } \alpha \in \Gamma\},$$

where $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$ compact, $\delta > 0$, is a basis of open neighbourhoods of x_0.

Proof. By Lemma 2.5 we have only to check that $W(x_0, \Gamma, \delta)$ is open. The mapping $(x, \alpha) \to \alpha(x)$, $K \times \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ is continuous. Applying the compactness of $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$ it is a routine exercise to derive that $W(x_0, \Gamma, \delta)$ is open. ◇

3 Translation on L^2

Applying the Plancherel isomorphism $\mathcal{P} : L^2(K,m) \to L^2(\mathcal{S},\pi)$ define for every $a \in L^\infty(K,m)$ a dual convolution operator $M_a \in B(L^2(\mathcal{S},\pi))$ by means of

(3.1) $\quad M_a(\varphi) := \mathcal{P}(\bar{a}\mathcal{P}^{-1}(\varphi)), \qquad \varphi \in L^2(\mathcal{S},\pi)$

M_a is a linear operator and bounded, since $\|M_a(\varphi)\|_2 \le \|a\|_\infty \|\varphi\|_2$. If $a = 1$ then $M_a = \mathrm{id}$. Moreover we can easily prove the following properties of Proposition 3.1 below. One should consult the concept of multiplication operators in [5, Example 4.20]. But notice that multiplication is performed by elements of $L^\infty(K,m)$ and not by elements of $L^\infty(\mathcal{S},\pi)$. ($m, \pi$ are not probability measures.)

Proposition 3.1 *If $a, b \in L^\infty(K,m)$ then $M_{ab} = M_a \circ M_b$ and $M_{\bar{a}} = (M_a)^*$ and $\|M_a\| = \|a\|_\infty$. Furthermore $M_a = 0$ if and only if $a = 0$.*

Proof. The statements $M_{ab} = M_a \circ M_b$ and $(M_a)^* = M_{\bar{a}}$ are easily shown. Since $\mathcal{P}$ is isometric we get $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ from [5, p.88]. Finally, if M_a is the zero-operator, $\bar{a}\mathcal{P}^{-1}(\varphi)$ is the zero-function in $L^2(K,m)$ for all $\varphi \in L^2(K,m)$, and hence $a = 0$. ◇

Restricting the mapping $a \to M_a$, $L^\infty(K,m) \to B(L^2(\mathcal{S},\pi))$ to $\mathcal{S} \subseteq L^\infty(K,m)$ we can derive a modul action of $L^1(\mathcal{S},\pi)$ on $L^2(\mathcal{S},\pi)$. A first step is to prove the continuity of $\alpha \to M_\alpha(\varphi)$, $\mathcal{X}^b(K) \to L^2(\mathcal{S},\pi)$.

Lemma 3.2 *Let $\varphi \in L^2(\mathcal{S},\pi)$. The mapping $\alpha \to M_\alpha(\varphi)$, $\mathcal{X}^b(K) \to L^2(\mathcal{S},\pi)$ is continuous.*

Proof.

Let $\alpha_0 \in \mathcal{X}^b(K)$, $\epsilon > 0$. Since $\mathcal{P}^{-1}(\varphi) \in L^2(K, m)$ there is a compact set $C \subseteq K$ such that

$$\int_{K\setminus C} |\mathcal{P}^{-1}(\varphi)(z)|^2 \, dm(z) \; < \; \epsilon/8.$$

Let $M := \int_C |\mathcal{P}^{-1}(\varphi)(z)|^2 \, dm(z)$ and

$$V(\alpha_0) \; = \; \{\alpha \in \mathcal{X}^b(K) : \; |\alpha(z) - \alpha_0(z)|^2 \; < \epsilon/(2M) \text{ for } z \in C\}$$

Then

$$\|M_\alpha(\varphi) \; - M_{\alpha_0}(\varphi)\|_2^2 \; = \; \|\bar{\alpha}\mathcal{P}^{-1}(\varphi) \; - \; \bar{\alpha}_0\mathcal{P}^{-1}(\varphi)\|_2^2$$

$$= \; \int_C |\alpha(z) - \alpha_0(z)|^2 \, |\mathcal{P}^{-1}(\varphi)(z)|^2 \, dm(z)$$

$$+ \; \int_{K\setminus C} |\alpha(z) - \alpha_0(z)|^2 \, |\mathcal{P}^{-1}(\varphi)(z)|^2 \, dm(z) < \; \epsilon/2 \; + \; \epsilon/2 \; = \; \epsilon$$

for every $\alpha \in V(\alpha_0)$. ◇

Now it is straightforward to introduce an action of $L^1(\mathcal{S}, \pi)$ on $L^2(\mathcal{S}, \pi)$. There are two ways to perform this, see (3.3) and (3.4) below. Given $g \in C_c(\mathcal{S})$ and $\varphi \in L^2(\mathcal{S}, \pi)$ we use a $L^2(\mathcal{S}, \pi)$-valued integral, to define

(3.2) $$g * \varphi := \int_{\mathcal{S}} g(\alpha) M_{\bar{\alpha}}(\varphi) \, d\pi(\alpha) \; \in L^2(\mathcal{S}, \pi)$$

Since $\|M_{\bar{\alpha}}(\varphi)\|_2 \; \leq \; \|\varphi\|_2$ for each $\alpha \in \mathcal{S}$, we have

$$\|g * \varphi\|_2 \; \leq \; \int_{\mathcal{S}} |g(\alpha)| \, \|M_{\bar{\alpha}}(\varphi)\|_2 \, d\pi(\alpha) \; \leq \; \|g\|_1 \, \|\varphi\|_2.$$

If $f \in L^1(\mathcal{S}, \pi)$ choose a sequence $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with $g_n \in C_c(\mathcal{S})$ and $\|f - g_n\|_1 \to 0$ as $n \to \infty$. Now it is easily shown that

(3.3) $$f * \varphi := \lim_{n\to\infty} g_n * \varphi \; \in L^2(\mathcal{S}, \pi)$$

is a well-defined action of $L^1(\mathcal{S}, \pi)$ on $L^2(\mathcal{S}, \pi)$ with $\|f * \varphi\|_2 \; \leq \; \|f\|_1 \, \|\varphi\|_2$. Another representation of this very weak convolution is: For $f \in L^1(\mathcal{S}, \pi)$, $\varphi \in L^2(\mathcal{S}, \pi)$ holds

(3.4) $$f * \varphi \; = \; M_{\bar{\hat{f}}}(\varphi)$$

In fact for $g \in C_c(\mathcal{S})$ and $\psi \in L^2(\mathcal{S}, \pi)$ we obtain

$$\langle g * \varphi, \psi \rangle \; = \; \int_{\mathcal{S}} g(\alpha) \, \langle M_{\bar{\alpha}}(\varphi), \psi \rangle \, d\pi(\alpha)$$

$$= \; \int_{\mathcal{S}} g(\alpha) \int_K \alpha(z) \, \mathcal{P}^{-1}(\varphi)(z) \, \overline{\mathcal{P}^{-1}(\psi)(z)} \, dm(z) \, d\pi(\alpha)$$

$$= \int_K \check{g}(z)\,\mathcal{P}^{-1}(\varphi)(z)\,\overline{\mathcal{P}^{-1}(\psi)(z)}\,dm(z) \;=\; \langle M_{\bar{\check{g}}}(\varphi), \psi\rangle.$$

Thus $g * \varphi = M_{\bar{\check{g}}}(\varphi)$ if $g \in C_c(\mathcal{S})$. If $f \in L^1(\mathcal{S}, \pi)$ choose again a sequence $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with $g_n \in C_c(\mathcal{S})$ and $\|f - g_n\|_1 \to 0$ as $n \to \infty$. Since for $n \to \infty$

$$\|f * \varphi \;-\; M_{\bar{\check{f}}}(\varphi)\|_2 \;\leq\; \|(f - g_n) * \varphi\|_2 \;+\; \|M_{\overline{\check{g}_n - \check{f}}}(\varphi)\|_2$$

$$\leq \left\|f - g_n\|_1 \;+\; \|\bar{\check{g}}_n - \bar{\check{f}}\|_\infty\right)\|\varphi\|_2 \;\to 0,$$

we get $f * \varphi \;=\; M_{\bar{\check{f}}}(\varphi)$, and (3.4) is shown.

Proposition 3.3 *If* $\varphi, \psi \in L^1(\mathcal{S}, \pi) \cap L^2(\mathcal{S}, \pi)$ *then* $\psi * \varphi \;=\; (\check{\psi}\check{\varphi})^\wedge$. *In particular* $\psi * \varphi \in L^2(\mathcal{S}, \pi) \cap C_0(\mathcal{S})$ *and*

$$(3.5)\qquad \int_{\mathcal{S}} \psi(\alpha)\, M_{\bar{\alpha}}(\varphi)\; d\pi(\alpha) \;=\; \int_{\mathcal{S}} \varphi(\alpha)\, M_{\bar{\alpha}}(\psi)\; d\pi(\alpha)$$

Proof. For $\varphi, \psi \in L^1(\mathcal{S}, \pi) \cap L^2(\mathcal{S}, \pi)$ we have $\mathcal{P}^{-1}(\varphi) = \check{\varphi}$, $\mathcal{P}^{-1}(\psi) = \check{\psi}$ and $\check{\psi}\check{\varphi} \in L^1(K, m)$. Therefore

$$\psi * \varphi \;=\; M_{\bar{\check{\psi}}}(\varphi) \;=\; \mathcal{P}(\check{\psi}\check{\varphi}) \;=\; (\check{\psi}\check{\varphi})^\wedge,$$

especially $\psi * \varphi \in C_0(\mathcal{S})$, and (3.5) is valid. ◇

Remark: One should notice that in Proposition 3.3 $\psi * \varphi$ is in general not an element of $L^1(\mathcal{S}, \pi)$. If $\hat{K}$ bears a dual hypergroup structure then $\mathcal{S} = \hat{K}$ and $\psi * \varphi$ is the corresponding convolution in the Banach $*$-algebra $L^1(\mathcal{S}, \pi)$.

Although the "convolution" between $L^1(\mathcal{S}, \pi)$ and $L^2(\mathcal{S}, \pi)$ is a very weak one, it enables us to derive the existence of functions on $\mathcal{S}$, whose inverse transform approximates functions on K in the L^1-norm.

Here we apply M_α to derive the following equivalence result, compare [3, Theorem 2.2.9].

Theorem 3.4 *K is discrete if and only if $\mathcal{S}$ is compact.*

Proof. We have only to show that the compactness of $\mathcal{S}$ implies that K is discrete. For that it suffices to show that $\{e\}$ is open. At first we prove that $M_\alpha 1 = 1$ π-almost everywhere. In fact for every $f \in C_c(K)$ we see

$$\int_{\mathcal{S}} M_\alpha(1)(\beta)\,\overline{\hat{f}(\beta)}\; d\pi(\beta) \;=\; \int_{\mathcal{S}} 1(\beta)\,\overline{M_{\bar{\alpha}}\hat{f}(\beta)}\; d\pi(\beta)$$

$$= \int_{\mathcal{S}} \overline{\widehat{\alpha f}(\beta)}\; d\pi(\beta) \;=\; \overline{\alpha(e) f(e)} \;=\; \overline{f(e)} \;=\; \int_{\mathcal{S}} \overline{\hat{f}(\beta)}\; d\pi(\beta).$$

Since $\{\hat{f} : f \in C_c(K)\}$ is dense in $L^2(\mathcal{S}, \pi)$, see [3], we have $M_\alpha 1 = 1$ π-almost everywhere. But then $\check{1}(x)\; (M_\alpha 1)^\vee(x) \;=\alpha(x)\,\check{1}(x)$. Since for $x \neq e$ we can find some $\alpha \in \mathcal{S}$ such that $\alpha(x) \neq 1$, we have $\check{1}(x) = 0$ for $x \neq e$ and $\check{1}(e) \;= \pi(\mathcal{S})$. The continuity of $\check{1}$ yields that $\{e\}$ is open. ◇

Corollary 3.5 *$\mathcal{S}$ is compact if and only if $\hat{K}$ respectively $\mathcal{X}^b(K)$ is compact.*

For the sake of completeness we notice a consequence of the result in [3, Theorem 2.3.19].

Theorem 3.6 *K is compact if and only if $\mathcal{S}$ is discrete.*

Proof. We have only to show that K is compact provided $\mathcal{S}$ is discrete. In this case all characters $\alpha \in \operatorname{supp} \pi = \mathcal{S}$ are isolated in $\mathcal{S}$. In particular the only positive character is isolated, and thus K is compact, see [3, Theorem 2.3.19]. ◇

4 Translation on C_0

Assume now that there exists $M > 0$ such that for every $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ there exists $\omega(\alpha, \beta) \in M(\mathcal{S})$ such that

$$(4.1) \qquad \|\omega(\alpha, \beta)\| \leq M$$

and

$$(4.2) \qquad \alpha(x)\beta(x) = \int_{\mathcal{S}} \tau(x)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau) \qquad \text{for all } x \in K$$

Then we say that $\mathcal{S}$ admits signed product formulas. Notice that $\omega(\alpha, \beta)(\mathcal{S}) = 1$. Hence the constant M is greater or equal 1.

Lemma 4.1 *Assume that $\mathcal{S}$ admits signed product formulas. Then we have*

(i) $(\alpha, \beta) \to \omega(\alpha, \beta)$, $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to M(\mathcal{S})$, *is a weak-$*$-topology continuous map.*
(ii) The canonical extension satisfies the associativity law, i.e.

$$\epsilon_\alpha * \omega(\beta, \gamma) = \omega(\alpha, \beta) * \epsilon_\gamma \qquad \textit{for all } \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{S}.$$

(The canonical extension is defined by

$$\mu * \nu(\varphi) = \int_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}} \omega(\alpha, \beta)(\varphi)\, d(\mu \times \nu)(\alpha, \beta), \quad \varphi \in C_0(\mathcal{S}).)$$

(iii) $\omega(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \omega(\alpha, \beta)^-$ *for all* $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$.
$(\omega(\alpha, \beta)^-(f) = \omega(\alpha, \beta)(\bar{f}))$.

Proof.

(i) Let $\varphi \in C_0(\mathcal{S})$ and $\epsilon > 0$. We know that there exists $f \in C_c(K)$ such that $\|\varphi - \hat{f}\|_{\mathcal{S}} < \epsilon$. Given $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{S}$ we obtain

$$\left| \int_{\mathcal{S}} \varphi(\tau)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau) - \int_{\mathcal{S}} \varphi(\tau)\, d\omega(\alpha_0, \beta_0)(\tau) \right|$$

$$\leq 2M\epsilon + \left| \int_{\mathcal{S}} \hat{f}(\tau)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau) - \int_{\mathcal{S}} \hat{f}(\tau)\, d\omega(\alpha_0, \beta_0)(\tau) \right|$$

$$\leq 2M\epsilon + \int_K |f(x)|\, |\alpha(x)\beta(x) - \alpha_0(x)\beta_0(x)|\, dm(x)$$

Since $\mathcal{S}$ is equipped with the topology of uniform convergence on compacta, and since supp f is compact the weak-$*$-continuity of $(\alpha, \beta) \to \omega(\alpha, \beta)$ follows.

(ii) This item is shown in a similar way noticing that

$$\epsilon_\alpha * \omega(\beta, \gamma)(\hat{f}) = \int_K f(x)\, \alpha(x)\, \beta(x)\, \gamma(x)\, dm(x) = \omega(\alpha, \beta) * \epsilon_\gamma(\hat{f})$$

for all $f \in L^1(K, m)$.

(iii) holds obviously. ◇

Whenever $\mathcal{S}$ admits signed product formulas it is natural to define a translation $L_\alpha \varphi$ for $\varphi \in C_0(\mathcal{S})$ by

$$\text{(4.3)} \quad L_\alpha \varphi(\beta) = \int_{\mathcal{S}} \varphi(\tau)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau)$$

By Lemma 4.1 the function $L_\alpha \varphi$ is continuous and bounded. In the proof of the next theorem is contained that $L_\alpha \varphi$ is an element of $C_0(\mathcal{S})$ if $\varphi \in C_0(\mathcal{S})$. If $\varphi \in C_c(\mathcal{S})$ we will obtain $L_\alpha \varphi \in C_0(\mathcal{S}) \cap L^2(\mathcal{S}, \pi)$ and $L_\alpha \varphi = M_\alpha \varphi$ π-almost everywhere.

Theorem 4.2 *$\mathcal{S}$ admits signed product formulas if and only if*

$$\text{(4.4)} \quad \|\widehat{\bar{\alpha} f}\|_{\mathcal{S}} \leq M\, \|\hat{f}\|_{\mathcal{S}},$$

for all $f \in L^1(K, m)$ and $\alpha \in \mathcal{S}$, where M is the constant of (4.1).

Proof. Assume that $\mathcal{S}$ admits signed product formulas with constant $M \geq 1$. Obviously $\|L_\alpha \varphi\|_{\mathcal{S}} \leq M\, \|\varphi\|_{\mathcal{S}}$ for all $\alpha \in \mathcal{S}$, $\varphi \in C_0(\mathcal{S})$. Since

$$\begin{aligned} L_\alpha \hat{f}(\beta) &= \int_{\mathcal{S}} \int_K f(x)\, \overline{\tau(x)}\, dm(x)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau) = \int_K f(x)\, \overline{\alpha\beta(x)}\, dm(x) \\ &= \widehat{\bar{\alpha} f}(\beta) \quad \text{for all } f \in L^1(K, m), \end{aligned}$$

we have (4.4).

Conversely suppose that (4.4) is true. Let $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$. The mapping $\hat{f} \to \widehat{\bar{\alpha} f}$ is linear and continuous from the dense subspace $\{\hat{f} : f \in L^1(K, m)\}$ of $C_0(\mathcal{S})$ into $C_0(\mathcal{S})$. Its extension to $C_0(\mathcal{S})$ may be designated by $\varphi \to L_\alpha \varphi$. It satisfies $\|L_\alpha \varphi\|_{\mathcal{S}} \leq M\, \|\varphi\|_{\mathcal{S}}$. Therefore $\varphi \to L_\alpha \varphi(\beta)$ is a continuous linear functional on $C_0(\mathcal{S})$, and Riesz' representation yields $\omega(\alpha, \beta) \in M(\mathcal{S})$ fulfilling (4.1), and by the construction $L_\alpha \hat{f}(\beta) = \widehat{\bar{\alpha} f}(\beta)$. Now let $z \in K$ and choose $k_i \in C_c(K)$ with $k_i \geq 0$, $\|k_i\|_1 = 1$ and supp $k_i \to \{z\}$. Then we obtain $\hat{k}_i(\tau) \to \overline{\tau(z)}$ for every $\tau \in \mathcal{S}$, and since $\omega(\alpha, \beta)$ is a finite regular Borel measure we have

$$\lim_i \int_{\mathcal{S}} \hat{k}_i(\tau)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau) = \int_{\mathcal{S}} \tau(\tilde{z})\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau).$$

On the other hand we know that

$$\int_{\mathcal{S}} \hat{k}_i(\tau)\, d\omega(\alpha, \beta)(\tau) = \widehat{\bar{\alpha} k_i}(\beta) = \int_K k_i(x)\, \overline{\alpha(x)\beta(x)}\, dm(x) \to \overline{\alpha(z)\beta(z)}.$$

Thus we see that

$$\alpha(\tilde{z})\,\beta(\tilde{z}) \;=\; \int_S \tau(\tilde{z})\; d\omega(\alpha,\beta)(\tau),$$

and we have shown that S admits signed product formulas with constant M. $\diamond$

We conclude by refering to [3], where examples are listed for which product formulas are known. But we want to point out that for many concrete examples it is still not known whether S admits signed product formulas satisfying (4.1), (4.2).

References

[1] Y.M. Berezansky, A.A. Kalyuzhnyi: Harmonic Analysis in Hypercomplex Systems. Kluwer, Dordrecht 1998

[2] Y.M. Berezansky, A.A.Kalyuzhnyi: Hypercomplex systems and hypergroups: connections and distinctions. Contemporary Math. AMS 183 (1995) 21–44.

[3] W.R. Bloom, H.Heyer: Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups. de Gruyter, Berlin 1995

[4] W.C. Connett et al (Ed.): Applications of hypergroups and related measure algebras. Contemporary Math. AMS 183 (1995)

[5] R.G. Douglas: Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Academic Press, New York 1972

[6] Ch.F. Dunkl: Structure hypergroups for measure algebras. Pacific J. Math. 47 (1973) 413–425

[7] Ch.F. Dunkl: The measure algebra of a locally compact hypergroup. Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973) 331–348

[8] F. Filbir, R. Lasser: Reiter's condition P_2 and the Plancherel measure for hypergroups. Ill. J. of Math. 44 (2000) 20–32.

[9] R.I. Jewett: Spaces with an abstract convolution of measures. Adv. in Math. 18 (1975) 1–101.

[10] R. Lasser: Orthogonal polynomials and hypergroup II - the symmetric case. Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994) 749–770.

[11] M. Rösler: On the dual of a commutative signed hypergroup. Manuscr. Math. 88 (1995) 147–163.

[12] R. Spector: Aperçu de la théorie des hypergroups. Analyse harmonique sur les groupes de Lie. Lecture Notes in Math. Springer 497 (1975) 643–673.

[13] M. Voit: On the dual space of a commutative hypergroup. Arch. Math. 56 (1991) 380–385

[14] M. Voit: On the Fourier transformation of positive, positive definite measures on commutative hypergroups, and dual convolution structures. Manuscr. Math. 72 (1991) 141–153.

Wagners Vermutung und das Graphen-Minoren Projekt

D. Rautenbach

Abstract

- Keywords and Phrases: Wagners Vermutung, Graph, Minor, Baumweite
- Mathematics Subject Classification: 05C10, 05C75, 05C83

We describe the main ideas behind Robertson and Seymour's proof of Wagner's conjecture which states that for any infinite sequence of finite graphs $G_1, G_2, \ldots$ there are indices $i < j$ such that G_i is a minor of G_j. The proof of this conjecture was one of the main results of the Graph-Minor Project.

Eingegangen: 3. 5. 2002

Dieter Rautenbach, Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen, D-52056 Aachen. E-Mail: rauten@math2.rwth-aachen.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit[1] ist die Darstellung der wesentlichen Ideen des Beweises der folgenden Vermutung.

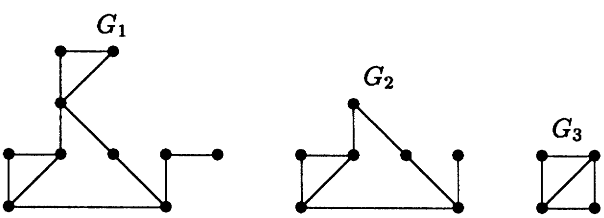
Vermutung 1.1 (Wagners Vermutung) *Für jede unendliche Folge von Graphen $G_1, G_2, \ldots$ gibt es Indizes $i < j$, so daß G_i ein Minor von G_j ist.*

Der Beweis dieser Vermutung ist eines der Hauptergebnisse des sogenannten ‚*Graphen-Minoren Projektes*', in dem Neil Robertson und Paul Seymour seit 1983 in einer Reihe von mehr als 25 Artikeln (vgl. [10]–[15]) einige der tiefsten bekannten Sätze der Graphentheorie bewiesen. Robertson und Seymours Theorie liegen zwar schöne und einfache Ideen zugrunde, sie ist aber in ihrer technischen Umsetzung nur sehr schwer zugänglich. Da wir keine Kenntniss der Graphentheorie voraussetzen, wollen wir uns auf die zur Darstellung absolut notwendigen Aussagen beschränken und werden nur wenig beweisen.

Zunächst klären wir die in Vermutung 1.1 benutzten Begriffe. Ein *Graph G* ist ein Paar (V_G, E_G) zweier endlicher[2] Mengen, wobei die Elemente der ersten Menge als *Ecken* und die Elemente der zweiten Menge als *Kanten* bezeichnet werden und jede Kante eine zwei-elementige Teilmenge der Eckenmenge ist, d.h. $E_G \subseteq \binom{V_G}{2} := \{\{u, v\} \mid u, v \in V_G,\ u \neq v\}$. Üblicherweise veranschaulicht man Graphen, indem man sie in die Ebene zeichnet. Dabei identifiziert man die Ecken des Graphen mit verschiedenen Punkten der Ebene und repräsentiert jede Kante $\{u, v\} \in E_G$ durch einen Streckenzug, der die den Ecken u und v entsprechenden Punkte verbindet. Gibt es eine solche Zeichnung eines Graphen, bei der sich je zwei Streckenzüge nur höchstens in einem gemeinsamem Endpunkt schneiden, so nennt man den Graphen *planar* und sagt, er lasse sich *in die Ebene einbetten*. Analog definiert man die Einbettbarkeit von Graphen in beliebige Flächen.

Ausgehend von der Definition eines Graphen bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, Teilstrukturen zu definieren. Ein *Teilgraph* $H = (V_H, E_H)$ eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ entsteht durch das Entfernen von Ecken oder Kanten aus G, d.h. $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G \cap \binom{V_H}{2}$. Gilt $E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2}$, so nennt man H einen *induzierten Teilgraphen* von G und schreibt $H = G[V_H]$. Bei der *Kontraktion* einer Kante $e = \{u, v\} \in E_G$ werden die Ecken u und v in V_G identifiziert und die Kante e entfernt. Ein Graph H ist ein *Minor* eines Graphen G, im Zeichen $H \subseteq_M G$, falls H aus einem Teilgraphen von G durch sukzessive Kontraktion von Kanten entsteht.

In folgendem Bild ist G_1 planar und G_2 ein (induzierter) Teilgraph von G_1. Weiter ist G_3 ein Minor von G_1 und G_2.



Da sich das Entfernen und die Kontraktion leicht in der Einbettung von G in eine Fläche nachempfinden lassen, sind mit G auch alle seine Minoren in eine bestimmte Fläche einbettbar. Der folgende klassische Satz kehrt diese Beobachtung für planare Graphen gewissermaßen um.

Satz 1.2 (Kuratowski [6]) *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn weder der vollständige Graph K_5 noch der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ ein Minor von G ist.*

Ausgehend von diesem Satz möchten wir die Bedeutung von Wagners Vermutung illustrieren. Eine Menge $\mathcal{P}$ von Graphen, die mit jedem Graphen auch alle seine Minoren enthält, nennt man *erblich*. Erbliche Mengen von Graphen ergeben sich auf sehr natürliche Weise. Nach obigen Bemerkungen bilden z.B. alle Graphen, die in eine gegebene Fläche $\mathcal{F}$ einbettbar sind, eine erbliche Menge $P_{\mathcal{F}}$.

Für eine erbliche Menge $\mathcal{P}$ definiert man die Menge $\mathrm{Verb}(\mathcal{P})$ der *minimalen verbotenen Minoren* als die Menge aller Graphen G, die nicht in $\mathcal{P}$ liegen, für die aber alle echten Minoren in $\mathcal{P}$ liegen, d.h. $G \notin \mathcal{P}$ und $H \in \mathcal{P}$ für alle $H \subseteq_M G$ mit $H \neq G$. Es ist leicht zu sehen, daß ein Graph G genau dann in $\mathcal{P}$ liegt, wenn er keinen Graphen aus $\mathrm{Verb}(\mathcal{P})$ als Minor enthält.

Das Besondere an Kuratowskis Satz 1.2 ist also nicht die Existenz einer Menge von Minoren, deren Abwesenheit die Planarität charakterisiert, sondern die Tatsache, daß diese Menge endlich ist. Mit Wagners Vermutung ist dies nun aber trivialerweise für alle erblichen Mengen $\mathcal{P}$ klar, da per Definition kein Graph in $\mathrm{Verb}(\mathcal{P})$ Minor eines anderen Graphen in $\mathrm{Verb}(\mathcal{P})$ sein kann.[3]

Ein weiteres Hauptergebnis des Graphen-Minoren Projektes ist die Existenz eines effizienten Algorithmus, der entscheidet, ob ein gegebener Graph einen festen Graphen H als Minor enthält [13]. Zusammen mit der Endlichkeit von $\mathrm{Verb}(\mathcal{P})$ folgt daher, daß es für jede erbliche Menge $\mathcal{P}$ einen effizienten Algorithmus gibt, der die Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$ testet.[4]

Im folgenden Abschnitt werden wir zunächst den für das Graphen-Minoren Projekt zentralen Begriff der Baumweite eines Graphen einführen. In einem dritten Abschnitt skizzieren wir dann den Beweis von Wagners Vermutung. Der vierte und letzte Abschnitt gibt Hinweise für weiterführende Literatur.

2 Die Baumweite eines Graphen

Es sei $G = (V_G, E_G)$ ein beliebiger Graph und $u_0, u_1, ..., u_l \in V_G$, so daß $u_{i-1}u_i \in E_G$ für $1 \leq i \leq l$ gilt. Sind die Ecken $u_0, u_1, ..., u_l$ paarweise verschieden, so nennt man $P : u_0u_1...u_l$ einen *Weg* in G. Sind die Ecken $u_1, u_2, ..., u_l$ paarweise verschieden, $l \geq 3$ und $u_0 = u_l$, so nennt man $C : u_0u_1...u_l$ einen *Kreis* in G. Der Graph G ist *zusammenhängend*, falls es zu je zwei Ecken $u, v \in V_G$ einen Weg $P : u_0u_1...u_l$ mit $u = u_0$ und $v = u_l$

gibt. Die maximal zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen sind seine *Komponenten*. Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

Bäume sind sehr einfache Graphen. Löscht man aus einem Baum eine Ecke oder Kante, so zerfällt er zwangläufig in Komponenten – was natürlich für allgemeine Graphen nicht gilt. Viele Beweise für Bäume beruhen im Grunde genommen auf dieser einfachen Beobachtung.

Ausgangspunkt für Robertson und Seymours Beweis von Wagners Vermutung war der Beweis einer Verschärfung dieser Vermutung (Vázsonyis Vermutung) für Bäume durch Kruskal [5] bzw. Nash-Williams [7]. Um diesen Spezialfall zu verallgemeinern, betrachteten sie ‚*baumähnliche*' Graphen, für die ein analoger Beweis möglich ist. Um die ‚*Baumähnlichkeit*' eines Graphen begrifflich zu fassen, nutzten Robertson und Seymour den Begriff der Baumweite, dessen Definition in leicht anderer Form ursprünglich auf Halin [4] zurückgeht.

Definition 2.1 *Eine Baumzerlegung eines Graphen* $G = (V_G, E_G)$ *ist ein Paar* $(T, \mathcal{W})$, *wobei* $T = (V_T, E_T)$ *ein Baum ist und* $\mathcal{W} = \{W_t \subseteq V_G \mid t \in V_T\}$, *so daß folgende Bedingungen erfüllt sind.*

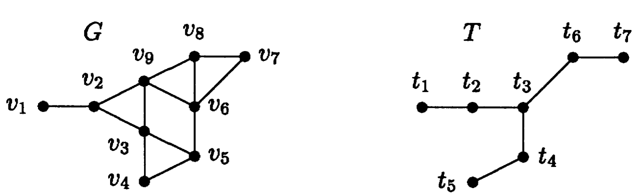
(i) Für jede Ecke $u \in V_G$ *ist der von* $S_u = \{t \in V_T \mid u \in W_t\}$ *induzierte Teilgraph* $T[S_u]$ *von* T *zusammenhängend.*
(ii) Für jede Kante $\{u, v\} \in E_G$ *gibt es ein* $t \in V_T$ *mit* $u, v \in W_t$.
Die Weite der Baumzerlegung $(T, \mathcal{W})$ *ist* $\max\{|W_t| - 1 \mid t \in V(T)\}$ *und die Baumweite* $tw(G)$ *von* G *ist die minimale Weite einer Baumzerlegung von* G.

Die induzierten Teilgraphen $G[W_t]$ für $t \in V_T$ nennt man *Teile* der Baumzerlegung. Die intuitive Idee hinter Definition 2.1 ist, daß der Baum T wiedergibt, wie die Teile der Baumzerlegung zusammengesetzt werden müssen, um den Graphen G zu ergeben. Damit repräsentiert T also die grobe Struktur von G.

Für jeden Graphen $G = (V_G, E_G)$ existiert eine triviale Baumzerlegung $(T, \mathcal{W})$, bei der T nur eine Ecke t besitzt und $W_t = V_G$ gilt. Die Weite dieser Zerlegung ist $|V_G| - 1$. Wegen Definition 2.1 (ii) hat ein Graph die Baumweite 0 genau dann, wenn er keine Kanten besitzt.

Ist $G = (V_G, E_G)$ selber ein Baum, so spiegelt G unter allen Bäumen natürlich seine eigene Struktur am besten wider. Man erhält eine Baumzerlegung $(T, \mathcal{W})$ von G der Weite ≤ 1 z.B. auf folgende Weise. Seien $T = G$ und $r \in V_G$ eine beliebige Ecke. Sei $W_r = \{r\}$ und für $u \in V_G \setminus \{r\}$ bestehe W_u aus u und der (eindeutigen) Ecke u' auf dem Weg von u zu r in G mit $uu' \in E_G$. Für dieses Paar $(T, \mathcal{W})$ prüft man leicht die Bedingungen in Definition 2.1.[5]

Wählt man G und T wie in folgendem Bild und definiert die Mengen in $\mathcal{W}$ als $W_{t_1} = \{v_1, v_2\}$, $W_{t_2} = \{v_2, v_3, v_9\}$, $W_{t_3} = \{v_3, v_6, v_9\}$, $W_{t_4} = \{v_3, v_5, v_6\}$, $W_{t_5} = \{v_3, v_4,$



$v_5\}$, $W_{t_6} = \{v_6, v_8, v_9\}$ und $W_{t_7} = \{v_6, v_7, v_8\}$, so ergibt sich ein weiteres Beispiel für eine Baumzerlegung minimaler Weite $tw(G) = 2$.

Ist eine Baumzerlegung $(T, \mathcal{W})$ eines Graphen G gegeben, so erhält man eine Baumzerlegung eines Minors H von G, indem man das Entfernen und die Identifikation von Ecken in den Mengen W_t, $t \in V_T$ einfach nachvollzieht. Da dabei die Kardinalität der Mengen W_t nicht wachsen kann, gilt offenbar folgende Aussage.

Lemma 2.2 *Ist H ein Minor von G, dann gilt $tw(H) \leq tw(G)$.*

Die Baumweite eines Graphen soll ein Maß für dessen Baumähnlichkeit darstellen. Wodurch drückt sich diese nun aber genau aus bzw. was kennzeichnet *‚baum-un-ähnliche‘* Graphen? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir folgende Eigenschaft von Bäumen.

Lemma 2.3 *Für jeden Baum $T = (V_T, E_T)$ gibt es eine Ecke $u \in V_T$, so daß keine Komponente von $T - u := T[V_T \setminus \{u\}]$ mehr als $\frac{1}{2}|V_T|$ Ecken enthält.*

Beweis. Entfernt man aus dem Baum T mit $n = |V_T|$ eine Ecke $u \in V_T$, dann zerfällt T (s.o.) in $k \geq 1$ verschiedene Komponenten $T_1, T_2, ..., T_k$. Es sei n_i die Zahl der Ecken von T_i für $1 \leq i \leq k$ und o.B.d.A. gelte $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Offenbar gilt $n_1 + n_2 + ... + n_k = n - 1$.

Sei nun $u \in V_T$ so gewählt, daß n_1 minimal ist. Wir machen die Widerspruchsannahme, daß $n_1 > \frac{1}{2}n$ gilt. Dies impliziert $n_2 + ... + n_k < \frac{1}{2}n - 1$. Es sei u_1 die (eindeutige) Ecke von T_1 mit $\{u, u_1\} \in E_T$. Entfernt man u_1 aus T, so zerfällt T in Komponenten, von denen jede offenbar höchstens $\max\{n_1 - 1, n_2 + ... + n_k + 1\} \leq n_1 - 1$ Ecken enthält. Dies widerspricht der Wahl von u und wir erhalten als gewünschte Behauptung, daß keine Komponenten von $T - u$ mehr als $\frac{1}{2}n$ Ecken enthält. □

Man kann also jeden Baum durch das Entfernen einer Ecke in ‚vergleichbar‘ große Teile zerlegen. Es sei nun $(T, \mathcal{W})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G von minimaler Weite $tw(G)$. Aufgrund von Definition 2.1 zerfällt der Graph G durch das Entfernen der Ecken in W_t für ein $t \in V_T$ in Komponenten, die den Komponenten von $T - t$ entsprechen. Wir können nun den Beweis von Lemma 2.3 einfach für den Graphen G anhand des Baumes T in seiner Baumzerlegung nachempfinden. Dabei ergibt sich, daß auch G durch Entfernen weniger Ecken in ‚vergleichbar‘ große Teile zerlegt werden kann. Da die Mengen W_t jeweils höchstens $tw(G) + 1$ Ecken enthalten, liefert dies folgendes Lemma.

Lemma 2.4 *Zu jedem Graphen $G = (V_G, E_G)$ existiert eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq tw(G) + 1$, so daß keine Komponente von $G - C := G[V_G \setminus C]$ mehr als $\frac{1}{2}|V_G|$ Ecken enthält.*

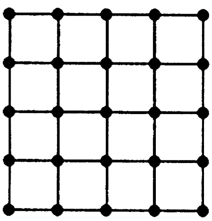
Lemma 2.2 und Lemma 2.4 zusammen liefern leicht untere Schranken für die Baumweite von Graphen.

Entfernt man aus dem vollständigen Graphen $K_{2k+1} = (V, \binom{V}{2})$ mit $|V| = 2k + 1$ Ecken eine Menge C von höchstens k Ecken, so ist der entstehende Graph natürlich zusammenhängend und enthält mindestens $k + 1 > \frac{1}{2}|V|$ Ecken. Daher gilt nach Lemma 2.4 die Abschätzung $tw(K_{2k+1}) \geq k$. Jeder Graph, der den vollständigen Graphen K_{2k+1} als Minor enthält, hat also nach Lemma 2.2 Baumweite mindestens k.

Neben den vollständigen Graphen gibt es weitere spezielle Graphen hoher Baumweite, die ganz zentral für das Graphen-Minoren Projekt sind, nämlich die *(k-)Gitter* $Grid_k$.

Für $k \in \mathbb{N}$ hat $Grid_k$ die Eckenmenge $\{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq k\}$ und die Kantenmenge $\{\{(i,j),(i',j')\} \mid |i-i'| + |j-j'| = 1 \text{ und } 1 \leq i,j \leq k\}$. Folgendes Bild zeigt das 5-Gitter $Grid_5$.

$Grid_5$



Entfernt man aus dem $(2k+1)$-Gitter $Grid_{2k+1}$ eine Menge C von höchstens k Ecken, so bleiben mindestens $k+1$ ‚*Spalten*' und $k+1$ ‚*Zeilen*' vollständig erhalten. Die Ecken dieser Spalten und Zeilen sind alle in einer Komponente von $Grid_{2k+1} - C$ enthalten, die daher mehr als die Hälfte aller Ecken enthält. Daher folgt analog $tw(Grid_{2k+1}) \geq k$ und jeder Graph, der das $(2k+1)$-Gitter als Minor enthält, hat Baumweite mindestens k.[6] Wir erhalten also

$K_{2k+1} \subseteq_M G$ oder $Grid_{2k+1} \subseteq_M G \Rightarrow tw(G) \geq k$.

Eines der wichtigsten Ergebnisse des Graphen-Minoren Projektes ist die teilweise Umkehrung dieser Implikation. Da das k-Gitter offenbar ein planarer Graph ist, enhält es nach Satz 1.2 keinen K_5 als Minor. Aus einer hohen Baumweite eines Graphen kann also nicht auf die Existenz großer vollständiger Graphen als Minor geschlossen werden. Beim Gitter ist die Situation anders.

Satz 2.5 [11], [16] *Es gibt eine Funktion* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *so daß jeder Graph G mit Baumweite* $tw(G) > f(k)$ *für ein* $k \in \mathbb{N}$ *das k-Gitter als Minor enhält.*

Wir haben nun alle wichtigen Aussagen gesammelt, um Robertson und Seymours Beweis von Wagners Vermutung darzustellen.

3 Der Beweis von Wagners Vermutung

Wie bereits erwähnt, erweiterten Robertson und Seymour zunächst den Beweis von Wagners Vermutung für Bäume zu folgendem Satz.

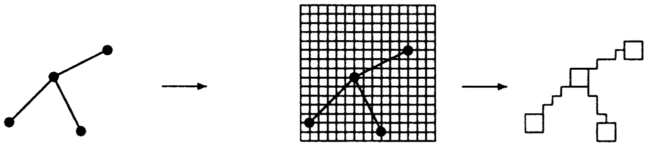
Satz 3.1 [10] *Sei* $k \in \mathbb{N}$. *Wagners Vermutung gilt für alle Graphen mit Baumweite* $\leq k$.

Zusammen mit Satz 2.5 ergibt dies sofort Wagners Vermutung für planare Graphen.

Satz 3.2 [10] *Wagners Vermutung gilt für planare Graphen.*

Beweis. Es sei $G_1, G_2, \ldots$ eine unendliche Folge planarer Graphen. Wir machen die Widerspruchsannahme, daß keine Indizes $i < j$ existieren, für die G_i Minor von G_j ist. Dies bedeutet insbesondere, daß G_1 kein Minor von G_i für alle $i \geq 2$ ist.

Es ist leicht zu sehen, daß jeder planare Graph Minor eines hinreichend großen Gitters ist. Wie in folgendem Bild, kann man über den gegebenen planaren Graphen ein feines Gitter legen und diesen dann in diesem Gitter ‚*approximieren*'.

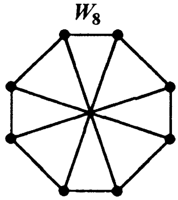


Es folgt, daß $Grid_k$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$ kein Minor von G_i für $i \geq 2$ ist. Nach Satz 2.5 gilt daher $tw(G_i) \leq f(k)$ für $i \geq 2$ und mit Satz 3.1 folgt die Existenz zweier Indizes $2 \leq i < j$, für die G_i Minor von G_j ist. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Wie kann man nun obigen Beweis für nicht-planare Graphen verallgemeinern? Ist eine Folge $G_1, G_2, \ldots$ beliebiger Graphen gegeben, so kann man natürlich wieder annehmen, daß G_1 kein Minor von G_i für $i \geq 2$ ist. Da trivialerweise G_1 ein Minor des vollständigen Graphen mit $|V_{G_1}|$ Ecken ist, folgt, daß dieser kein Minor von G_i für $i \geq 2$ ist. Wie erwähnt bedeutet das aber leider noch nicht, daß die Graphen G_i für $i \geq 2$ von beschränkter Baumweite sind.

Um den Beweis wie für Satz 3.2 zu vollenden, brauchte man an dieser Stelle eine Charakterisierung der Graphen, die einen gegebenen großen vollständigen Graphen nicht als Minor enthalten. Die geniale Idee von Robertson und Seymour war es, solch eine Charaterisierung wiederum mit Hilfe von Baumzerlegungen $(T, \mathcal{W})$ von G zu formulieren, indem sie diesmal die Teile $G[W_t]$, $t \in V_T$ der Zerlegung nicht wie zuvor in der Anzahl ihrer Ecken beschränken, sondern in ihren topologischen Eigenschaften der Einbettbarkeit in bestimmte Flächen. Als Prototyp einer solchen Charkterisierung konnten sie auf Wagners Charakterisierung [19] der Graphen zurückgreifen, die keinen K_5 als Minor enthalten. Wagners Satz besagt, daß sich jeder Graph ohne K_5 als Minor rekursiv aus planaren Graphen (beliebiger Größe) und einem Ausnahmegraphen W_8 durch ‚Verkleben' entlang kleiner Eckenmengen konstruieren läßt.

W_8



In der Sprache der Baumzerlegungen heißt das, daß ein Graph G ohne K_5 als Minor eine Baumzerlegung besitzt, deren Teile entweder planar oder gleich dem W_8 sind. Einer der wohl tiefsten Sätze des Graphen-Minoren Projektes ist die folgende Verallgemeinerung dieser Aussage.

Satz 3.3 [14] *Ist der vollständige Graphen K_k mit $k \geq 1$ Ecken kein Minor eines Graphen G, dann besitzt G eine Baumzerlegung, deren Teile alle fast in eine Fläche einbettbar sind, in die der K_k nicht einbettbar ist.*

Wir wollen hier nicht exakt definieren, was es bedeutet *'fast'* in eine Fläche einbettbar zu sein. Das Wesentliche an Satz 3.3 ist es, daß man nun für die Teile der Baumzerlegung in einer ähnlichen Situation ist wie für die planaren Graphen. Robertson und Seymour bewiesen daher zunächst Wagners Vermutung für Graphen, die fast in eine gegebene Fläche einbettbar sind. Schließlich vollendeten sie ihren Beweis [15], indem sie zeigten, daß Wagners Vermutung für Graphen gilt, die aus solchen Teilen baumartig zusammengesetzt sind.

4 Weiterführende Literatur

Bis auf wenige Ausnahmen erschienen alle Arbeiten des Graphen-Minoren Projektes im *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* Einen Überblick über verschiedene Aspekte des Projektes geben die Survey-Artikel [8], [9], [17] und [18].

Besonders [17] erwähnt dabei viele tiefe Anwendungen der Ideen des Graphen-Minoren Projektes, die erahnen lassen, ein wie starkes Hilfsmittel die Theorie der Minoren darstellt.

Schließlich befaßt sich auch das letzte Kapitel des Lehrbuches [3] mit diesem Projekt.

An dieser Stelle möchte ich Professor Dr. A. Krieg für die Anregung und Möglichkeit danken, meinen Habilitationsvortrag auf diese Weise zu veröffentlichen. Professor Dr. L. Volkmann danke ich für die Durchsicht des Manuskriptes.

Anmerkungen

1 Diese Arbeit stellt die Ausarbeitung meines Habilitationsvortrages vom 21.11.2001 an der RWTH Aachen dar.
2 Es werden ausschließlich endliche Graphen betrachtet.
3 Ist $\mathcal{F}$ eine beliebige nicht-orientierbare geschlossene Fläche, so wurde die Endlichkeit von Verb $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ unabhängig von Wagners Vermutung erst 1989 [2] bewiesen. Vgl. ebenfalls [1], [12].
4 Ein Beispiel für eine erbliche Menge $\mathcal{P}$, für die vor dem Graphen-Minoren Projekt weder die Endlichkeit von Verb $(\mathcal{P})$ noch die Existenz irgendeines Algorithmus bekannt war, bilden die *'linklessly embeddable'* Graphen, vgl. [17].
5 Im allgemeinen gilt, daß ein Graph genau dann Baumweite ≤ 1 hat, wenn er keinen Kreis besitzt.
6 Genauer gilt $tw(K_k) = k - 1$ und $tw(Grid_k) = k$.

Literatur

[1] *D. Archdeacon:* A Kuratowski theorem for the projective plane, J. Graph Theory **5** (1981), 243–246 .

[2] *D. Archdeacon and P. Huneke:* A Kuratowski theorem for nonorientable surfaces, J. Comb. Theory, Ser. B **46** (1989), 173–231.

[3] *R. Diestel:* Graphentheorie, Springer (2000), 314pp.

[4] *R. Halin:* S-functions for graphs, J. Geometry **8** (1976), 171–186.

[5] *J.B. Kruskal:* Well-quasi ordering, the tree theorem, and Vazsonyi's conjecture, Trans. Am. Math. Soc. **95** (1960), 210–225.

[6] *K. Kuratowski:* Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fundamenta Mathematicae **15** (1930), 271–283.

[7] *C.S.J.A. Nash-Williams:* On well-quasi-ordering infinite trees, Proc. Camb. Philos. Soc. **61** (1965), 697–720.

[8] *D. Rautenbach and B. Reed:* Tree width and graph minors, manuscript.

[9] *B. Reed:* Tree width and tangles: A new connectivity measure and some applications, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **241** (1997), 87–162.

[10] *N. Robertson and P.D. Seymour:* Graph minors. IV: Tree-width and well-quasi-ordering, J. Comb. Theory, Ser. B **48** (1990), 227–254.

[11] *N. Robertson and P.D. Seymour:* Graph minors. V. Excluding a planar graph, J. Comb. Theory, Ser. B **41** (1986), 92–114.

[12] *N. Robertson and P.D. Seymour:* Graph minors. VIII: A Kuratowski theorem for general surfaces, J. Comb. Theory, Ser. B **48** (1990), 255–288.

[13] *N. Robertson and P.D. Seymour:* Graph minors. XIII: The disjoint paths problem, J. Comb. Theory, Ser. B **63** (1995), 65–110.

[14] *N. Robertson and P.D. Seymour:* Graph minors. XVII: Excluding a non-planar graph, manuscript.

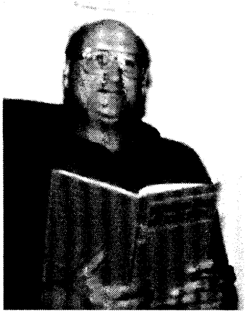
[15] *N. Robertson and P.D. Seymour:* Graph minors. XX: Wagner's conjecture, J. Comb. Theory, Ser. B **77** (1999), 162–210.

[16] *N. Robertson, P.D. Seymour and R. Thomas:* Quickly excluding a planar graph, J. Comb. Theory, Ser. B **62** (1994), 323–348.

[17] *R. Thomas:* Recent excluded minor theorems for graphs, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **267** (1999), 201–222.

[18] *C. Thomassen:* Embeddings and minors, R.L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász (eds.), Handbook of Combinatorics. Vol. 1, Elsevier (North-Holland) (1995), 301–349.

[19] *K. Wagner:* Ueber eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski, Deutsche Math. **2** (1937), 280–285.



Discriminants, Resultants and a Conjecture of S. Halperin

V. Hauschild

Abstract

- Keywords and Phrases: Serre spectral sequence, Self homotopy equivalences Weighted complete intersections, Negatively graded derivations
- Mathematics Subject Classification: Primary 55P62, 55T10; Secondary 13D10, 13E10, 14B07, 14B12, 14M10

It is a conjecture of S. Halperin that the Serre spectral sequence of an oriented fibration whose fiber is a space of elliptic type collapses. By a result of W. Meier this has a purely algebraic form saying that a weighted homogeneous complete intersection of finite length does not have derivations of negative degree. In this note we give a review of the commutative algebra around this conjecture. Using the theory of the resultant in the anisotropic case it is shown that weighted complete intersections without negative derivations form an open subspace in the space of all such algebras. Halperin's conjecture is reformulated using anisotropic resultants.

Eingegangen: 26. 02. 2002

Volker Hauschild, Dipartimento di Matematica, Universitá della Calabria
I-87036 Rende (CS). E-Mail: hausch@unical.it

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

Let k be a field, $char\, k = 0$, and let $E_0|k$ be a weighted homogeneous complete intersection (HCI) of finite length over k. Then the graded $k-$algebra E_0 can be written as $E_0 = P/I_0$, where P is isomorphic to a graded polynomial algebra $k[x_1, \dots, x_n]$, $deg\, x_i = m_i$ and the ideal $I_0 \subset (x_1, \dots, x_n)$ is generated by a regular sequence $f_1, \dots, f_n$ of polynomials homogeneous with respect to the given grading on P. If $deg f_j = d_j$ consider the ordered sets $D = (d_1, \dots, d_n)$ and $M = (m_1, \dots, m_n)$. In the case n is minimal, the sets D and M are uniquely determined by the isomorphism type of E_0. In the following the couple (D, M) is called the weighting type of E_0.

At the other hand we consider 1-connected spaces X with the homotopy type of a CW-complex such that X has finite-dimensional rational cohomology, i.e, $dim\, H^*(X; \mathbb{Q}) < \infty$, has finite-dimensional rational homotopy, i.e., $dim\, \pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} < \infty$ and vanishing odd rational cohomology, i.e., $H^{od}(X) = 0$. In the terminology used in rational homotopy theory such spaces are called of elliptic type or sometimes of type F_0, see e.g. [5]. It is now one of the major results of S. Halperin [2] that the rational cohomology ring $H^*(X)$ of a space of elliptic type is always a HCI, in particular it is a commutative algebra. Conversely rational homotopy theory teaches that every HCI is the cohomology ring of a space X of elliptic type. Among the spaces of elliptic type, there are many popular spaces, so for example the simply connected homogeneous spaces G/H, of compact Lie groups G and H of the same rank. Let $X \to Y \to B$ be an oriented fibration. Then in a private communication Halperin gave the following conjecture.

Conjecture 1. *For every orientable fibration $X \to Y \to B$ with fiber X a space of type F_0 the Serre spectral sequence has vanishing differentials and therefore collapses.*

There is also a purely algebraic form of Halperin's conjecture due to W. Meier. Observe that the E_0-module $Der_k(E_0)$ of derivations of E_0 inherits a grading from the grading of E_0 in a natural way. There could however – at least in principle – also be homogeneous components of negative degree. As is shown in [12, 13] these components are responsible for the nonvanishing of the differentials in the Serre spectral sequence of an oriented fibration if E_0 is the cohomology of the fiber. Along these lines W. Meier gave the following form of Halperins conjecture.

Conjecture 2 *Let k be a field, char $k = 0$, and let E_0 be a HCI over k of finite length. Then the negatively graded part $Der_k(E_0)_-$ of $Der_k(E_0)$ is zero.*

In this form Halperins conjecture becomes accessible to diverse algebraic methods and deep relations to algebraic geometry become evident, see for example the note of J. Wahl [16]. The conjecture has been proved for a series of important elliptic spaces as for example the mentioned homogeneous spaces G/H by Shiga and Tezuka in [15]. In the special case that E_0 is multiplicatively generated by ≤ 3 elements the conjecture has been proved by Hao Chen, see [1].

It is interesting that in some special cases the hypothesis that E_0 is a complete intersection is not necessary for the nonexistence of negative derivations. For example, if E_0 is an artinian algebra generated by elements which are all of the same degree, there are never negative derivations, see e.g. [6], Lemma 5.3.

In this note we consider Halperin's conjecture from the point of view of resultant theory in the anisotropic case, see [7]. Let $V \cong k^N$ be the space of parameters and let A be its ring of regular functions. We depart from the universal subscheme of $V \times {}^aP_k^{n-1}$ given by the universal quasi-homogeneous polynomials $F_1, \ldots, F_n$ with

$$F_j = \sum_{d_j = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n} c_{j\alpha} x^\alpha \in A[x_1, \ldots, x_n]$$

for $j = 1, \ldots, n$ and $deg\, F_j = d_j$ where ${}^aP_k^{n-1}$ is the anisotropic projective space with respect to the G_m-action on k^n with weights $a_1, \ldots, a_n$. Then the resultant $R = {}^aRes(F_1, \ldots, F_n) \in A$ vanishes at $t \in V$ if and only if the quasi-homogeneous ideal $(F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x))$ has a nontrivial zero in k^n, i.e., has a zero in ${}^aP_k^{n-1}$. So the non-vanishing of R in t means that $F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)$ is a regular sequence of quasi-homogeneous polynomials. Therefore the open subset $V_R = Spec A_R$ can be considered the set of complete intersections of this weighting type. Now, in V_R we consider the subset W of those complete intersections without negative derivations. It is shown (Thm. 8) that W is open in the Zariski-topology. So, if there is a complete intersection of this weighting type without negative derivations, we can conclude that almost all other complete intersections do not have negative derivations. This gives a strong confirmation of the conjecture of Halperin's. As a obvious byproduct we state the conjecture in a resultant-like form (Conjecture 3).

2 Some differential calculus around Halperin's conjecture

Let k be a field, let $E_0 = P/I_0$ be a HCI over k of finite length. Let R be a positively graded noetherian ring, let $E|R$ be an $R-$algebra flat on R with $E/\underline{m}_R E \cong E_0$. Then E represents what is called a (positively graded) deformation of E_0. When E is a deformation of E_0, we can write

$$E = P_R/I$$

where P_R is the polynomial algebra $P_R = R[x_1, \ldots, x_n]$ and $I \subset P_R$ is generated by elements $F_j, j = 1, \ldots n$, of the type $F_j = f_j + r_j$, where the r_j are elements of the ideal in P_R generated by the maximal ideal $\underline{m}_R$. In the following we consider the Kähler module $\Omega_{E|R}$. There is an exact sequence of E-modules

$$I/I^2 \xrightarrow{Jac^*} \Omega_{P_R|R} \otimes_{P_R} E \longrightarrow \Omega_{E|R} \to 0.$$

The module I/I^2 is free over E and the P_R-module $\Omega_{P_R|R}$ is also free over P_R. Let us write

$$I/I^2 = \bigoplus_{j=1}^{n} E\, dF_j$$

and

$$\Omega_{P_R|R} = \bigoplus_{i=1}^{n} P_R\, dx_i.$$

The homomorphism Jac^* is given on the basis elements by

$$Jac^*(dF_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + I \right) dx_i.$$

Dualizing with the functor $Hom_E(-, E)$ gives again an exact sequence:

$$0 \to Hom_E(\Omega_{E|R}, E) \longrightarrow Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R}, E) \xrightarrow{Jac} Hom_E(I/I^2, E).$$

Since $Hom_E(-, E)$ is not right-exact there is a cokernel which traditionally is called $T^1_R(E)$. By the universality of the Kähler module one has

$$Der_R(E) = Hom_E(\Omega_{P_R|R}, E).$$

Using the freeness, we can write

$$Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R}, E) = \bigoplus_{i=1}^{n} E \frac{\partial}{\partial x_i}$$

and

$$Hom_E(I/I^2, E) = \bigoplus_{j=1}^{n} E \frac{\partial}{\partial F_j}.$$

Let Jac be the E-linear map given on generators by

$$Jac\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + I \right) \frac{\partial}{\partial F_j}.$$

Let $|Jac| = det\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) \in P_R$ and let $\Delta \in E$ be the class of $|Jac|$.

Lemma 1. *The element Δ is not a zero divisor of E, if and only if $Der_R(E) = 0$.*

Proof: This is a simple consequence of Cramers rule, in particular of the elementary fact that a homogeneous (n, n)-system $Yx = 0$ of linear equations over a local or positively graded noetherian ring R has only the trivial solution if and only if $det\ Y$ is not a zero divisor of R. □

Lemma 2. *Let R be a positively weighted noetherian ring with augmentation ideal $\underline{m}_R$, $R/\underline{m}_R = k$. Let $E|R$ be a graded deformation of E_0 as above. If Δ is not a zero divisor of E, then*

$$Der_k(E_0) \cong Tor_1^R(T^1_R(E), k).$$

Proof: By the above Lemma $Der_R(E) = 0$. Then there is an exact sequence

$$0 \to Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R}, E) \xrightarrow{Jac} Hom_E(I/I^2, E) \longrightarrow T^1_R(E) \to 0.$$

Now, the middle term of this sequence is a free E–module and since E is flat on R by grading reasons it is projective and therefore also free. Applying the functor $(-) \otimes_R k$ gives the exact sequence

$$0 \to Tor_1^R(T_R^1(E),k) \longrightarrow Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R},E_0) \xrightarrow{Jac} Hom_E(I/I^2,E_0).$$

for $E_0 = E \otimes_R k = P/I_0$. Then the above sequence is

$$0 \to Tor_1^R(T_R^1(E),k) \longrightarrow Hom_P(\Omega_{P|k},E_0) \xrightarrow{Jac \otimes_R k} Hom_{E_0}(I_0/I_0^2,E_0)$$

But this means

$$Der_k(E_0) = Ker\,(Jac \otimes_R k) = Tor_1^R(T_R^1(E),k)$$

which proves the Lemma. □

In the following to a presentation $E_0 = P/I_0$ of E_0 we associate what is called a defining deformation of E_0. Let $n = dim\,P$ and let $R = k[y_1,\dots,y_n]$ be the graded polynomial algebra over k with $deg\,y_j = deg f_j$, $j = 1,\dots,n$. Consider the graded homomorphism of graded polynomial algebras $f\colon R \to P$ given by $f(y_j) = f_j \in P$. Then P is a flat graded R–algebra. Moreover P is flat over R and we have

$$P \otimes_R k \cong E_0.$$

We can write

$$E = R[x_1,\dots,x_n]/I,$$

where I is the ideal generated by the homogeneous elements $F_j = f_j - y_j \in R[x_1,\dots,x_n]$. It follows $E = P$. Then let again Δ be the class of the functional determinant. Now, since E is a domain, Δ is not a zero divisor of E. Thus it follows by Lemma 1 that $Der_R E = 0$. It follows $Der_k(E_0) = Tor_1^R(T_R^1(E),k)$. The exact sequence

$$0 \to Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R},E) \xrightarrow{Jac} Hom_E(I/I^2,E) \longrightarrow T_R^1(E) \to 0.$$

can also be considered as an exact sequence of R-modules. The first two terms are free as E-modules. Since E is a graded complete intersection over R, it is also free over R. We therefore have for the projective dimensions $pd_E T_R^1(E) = pd_R T_R^1(E) \leq 1$. It follows

Lemma 3. *Let $E|R$ be as above, then $T_R^1(E)$ is Cohen-Macaulay of dimension $dim\,R - 1$.*

We consider again the element Δ and the ring $E/\Delta E$.

Lemma 4. *The support $Supp_R E/\Delta E$ of the R–module $E/\Delta E$ coincides with the support $Supp_R T_R^1(E)$.*

Proof: We consider a prime ideal $\underline{p} \subset R$ and consider the exact sequence

$$0 \to Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R},E)_{\underline{p}} \xrightarrow{Jac_{\underline{p}}} Hom_E(I/I^2,E)_{\underline{p}} \longrightarrow T_R^1(E)_{\underline{p}} \to 0.$$

Then $T_R^1(E)_{\underline{p}} = 0 \iff Jac_{\underline{p}}$ is an isomorphism $\iff det\,Jac_{\underline{p}} \notin \underline{p} \iff \underline{p} \notin Supp_R E/\Delta E$. □

It follows that $Supp_R T_R^1(E) \subset Spec\,R$ is given by the zero set of an element $\delta \in R$, which in the following is called the discriminant of $E|R$. Consider the following statement.

Lemma 5. *Let $h: R \to S$ be a homomorphism of graded rings, then the following statements are equivalent.*

ii) $Der_S(E \otimes_R S) = 0$.

iii) The element det $(Jac \otimes_R S)$ *is a non zerodivisor of* $E \otimes_R S$.

This an obvious consequence of Lemma 1 and the fact that the Jacobian is stable under base change. □

A graded homomorphism $h : R \to S$ with the properties of Lemma 5 is called *d*-transversal with respect to the defining deformation of E_0. In the following we reduce our situation to the special case when $R = k[t]$.

Lemma 6. *When* $deg\, t = 1$, *then there exists a d-transversal homorphism.*

Proof: It suffices to show that $\Delta \otimes_R S$ remains not a zero divisor for $E \otimes_R S$. This would be the case for example if the $S-$scheme $E \otimes_R S$ is reduced, see e.g. [9], 10.14 Theorem. But this is the case if and only if the support of the $R-$module S has only a trivial intersection with the support of the $R-$scheme $Spec\, E/\Delta E$. If the homomorphism h is given by $h(y_j) = a_j t^{d_j} j = 1, \dots, n$, then this means that the elimination ideal

$$(f_1 - a_1 t^{d_1}, \dots, f_n - a_n t^{dn}, \Delta) \cap S$$

is different from zero and therefore has the form (t^m) for some m. Geometrically this means that the following transversality condition must be satisfied.

$$Supp_R S \cap Supp_R E/\Delta E = \{0\}.$$

Call the support $Supp\, E/\Delta E \subset Spec\, R$ of $E/\Delta E$ the discriminant of E. Then the support of the R-module S must be "transversal" to the discriminant, i.e., δ must be a non-zerodivisor of S, or the multiplication with δ on $R/Ker\, h$ is injective. If the field k has infinitely many elements, it is easy to find a monoidal curve in $Spec\, R$, i. e., the closure of a G_m-orbit, such that the above transversality condition is satisfied. Take simply a closed point p outside the discriminant ($char\, k = 0$) and consider the closure of the corresponding G_m-orbit $G_m(p)$. In general this curve can have a singularity at the origin. Take for S the normalization of the corresponding ring and after composing with the homomorphisms involved we are done. □

Let therefore $h: R \to S$ be d-transversal. By the canonical isomorphism

$$T^1_S(E \otimes_R S) \cong T^1_R(E) \otimes_R S$$

we have an exact sequence

$$0 \to Hom_{P_R}(\Omega_{P_R|R}, E) \otimes_R S \to Hom_E(I/I^2, E) \otimes_R S \to T^1_R(E \otimes_R S) \to 0.$$

of S-modules. It follows

$$Tor_1^R(T^1_R(E), k) = Tor_1^S(T^1_R(E) \otimes_R S, k) = Tor_1^S(T^1_S(E \otimes_R S), k)$$

For to calculate $Tor_1^R(T^1_R(E), k)$ we can therefore use the fact that S is a principal ideal domain. The $S-$module $T^1_S(E \otimes_R S)$ is of dimension zero, i. e., is fully torsion and so the elementary divisors of this module are all of the kind t^m for $m \in \mathbb{N}$. Let $x \in T^1_S(E \otimes_R S)$ be a homogeneous generator of negative degree $-d$ of a cyclic submodule $Sx \subset T^1_S(E \otimes_R S)$ Let $exp\, x$ be the minimal natural number m such that $t^m x = 0$, i.e., $Sx \cong S/(t^m)(d)$.

In the following we adopt the standard notation: If M is a graded module, let $M(l)$ be the shifted module l-times to the left, i.e., $M(l)_i = M_{i+l}$. Then

$$Tor_1^S(S/(t^m)(d), k) \cong (t^m) \cap (t)/(tm+1)(d) \cong \langle t^m \rangle (d).$$

By Lemma 2 the element x gives therefore rise to a homogeneous element in $Der_k(E_0)$ of degree $-d+m$. In any case we see that a degree eventually negative by this process becomes less negative, eventually non-negative. The statement that E_0 has no negative derivations, is therefore equivalent to the statement that every generator of the S-module $T^1_S(E \otimes_R S)$ must have a torsion exponent greater or equal to $-deg\, x$ and conversely. So, for example, the generator given by the image of the partial derivative $\partial/\partial F_n$ (which is of degree $-deg\, F_n$) in $T^1_S(E \otimes_R S)$ must have as torsion exponent at least $d_n = deg\, F_n$.

Theorem 1. *Let $E_0 = P/I_0$ be a HCI of finite length. Then the following statements are equivalent.*

i) E_0 does not have derivations of negative degree.
ii) Let E be the defining deformation of E_0 as flat graded R–algebra. Let $S = k[t]$ and let $h: R \to S$ be a d-transversal homomorphism. Then for any homogeneous element $x \in T^1_S(E \otimes_R S)$ the torsion exponent satisfies $deg\, t \cdot exp\, x \geq -deg\, x$.

In a similar way we obtain the following statement.

Theorem 2. *Let $E_0 = P/I_0$ be a HCI of finite length where I_0 is generated by the homogeneous polynomials $f_1, \ldots, f_n$ with*

$$deg f_1 \leq deg f_2 \leq \ldots \leq deg f_n.$$

Let E be the defining deformation of E_0 as flat graded R–algebra. Let $S = k[t]$ and let $h: R \to S$ be a d-transversal homomorphism. Then E_0 does not have derivations of degree less than $deg\, t - deg f_n$.

In particular it follows that E_0 does not have negative derivations if there exists a d-transversal homomorphism $h: R \to k[t]$ with $deg\, t = deg f_n$. This special case will be considered in the next paragraph.

3 The role of the quantum deformation

The following paragraph finds its motivation in the article [15] and the article [14] which seems to be inspired by the former. Consider again the defining deformation given by the flat R–algebra E. We consider a very special homomorphism $R \to S$. Suppose the generators $f_j, j = 1, \ldots, n$ are ordered in a way such that for the degrees $d_j = deg f_j$ we have $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. Let $S = k[t]$ with $deg\, t = deg\, y_n$. The **quantum deformation** is a 1-parameter deformation obtained from $E|R$ by base change with $h: R \to S$ with $h(y_j) = 0$ for $1 \leq j \leq n-1$ and $h(y_n) = t$. (The name is motivated by the fact that in the cases of flag manifolds this deformation is the quantum cohomology, see e.g. [8], sec. 6, Theorem.) Let $E_q = E \otimes_R S$, then we can write for the quantum deformation

$$E_q = \frac{S[x_1, \ldots, x_n]}{(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n - t)}.$$

Let again Δ be the corresponding Jacobian determinant. The elimination ideal $(f_1 - y_1, \ldots, f_n - y_n, \Delta) \cap k[y_1, \ldots, y_n]$ is a principal ideal generated by an irreducible polynomial $\delta \in R$, called the discriminant. We collect a family of equivalent statements on E_q such that every statement implies that E_0 does not have negative derivations.

Theorem 3. *Let k be an algebraically closed field, then the following statements are equivalent.*

i) The element Δ is not a zero divisor of E_q.
ii) The series $f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n - t, \Delta$ is a regular sequence in $k[t, x_1, \ldots, x_n]$.
iii) The series $f_1, \ldots, f_{n-1}, \Delta$ is a regular sequence in $k[x_1, \ldots, x_n]$.
iv) The ring $E_q/\Delta E_q$ is torsional on S.
v) $1 \in (f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n - 1, \Delta)$
vi) The module homomorphism $m_\Delta : E_q \to E_q$ induced by multiplication with Δ gives an isomorphism after inverting t.
vii) The determinant $\det m_\Delta[t^{-1}]$ is nonzero.
viii) The $S[t^{-1}]$-scheme $E_q[t^{-1}]$ is smooth over $S[t^{-1}]$.
ix) $\delta \notin Ker\, h$, i.e., h is d-transversal.
x) $Der_S(E_q) = 0$.

The proof of the equivalences

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$

needs only standard facts from commutative algebra and is left to the reader. The proof of the equivalence with (vi) and (vii) follows from Cramer's rule. The equivalence of (vii) with (viii) follows from the definition of smoothness, see e.g. [4], p. 268. Write $E_q = P_S/I_q$ with $I_q = (f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n)$ and consider the exact sequence

$$I_q/I_q^2 \to \Omega_{P_S|S} \otimes E_q \to \Omega_{E_q|S} \to 0$$

where the first two modules are free over E_q and the homomorphism between them is given by the transpose of the Jacobi-matrix. By condition (vii) this becomes an isomorphism after inverting t. So (vii) is equivalent to

$$\Omega_{E_q[t^{-1}]|S[t^{-1}]} = 0$$

This is equivalent to the condition

$$dim_{k(x)}\left(\Omega_{E_q|S} \otimes k(x)\right) = 0.$$

for every point $x \in Spec\, E_q$. Since E_q is flat over S of relative dimension zero this means the claimed smoothness.

Now to the equivalence between (viii) and (ix). The condition (x) is equivalent to the condition (i) and therefore to all other conditions (i) to (viii). Therefore it suffices to prove the equivalence between (ix) and (x). As we have seen above we have

$$Tor_1^R(T_R^1(E), S) = Der_S(E_q) = 0.$$

Now $Supp_R T_R^1(E) = V(\delta)$, where $(\delta) = (\Delta) \cap R$ is the discriminant. There is a filtration of $M = T_R^1(E)$ with

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{i-1} \supset M_i \supset \ldots \supset M_N \supset 0$$

with $M_{i-1}/M_i \cong R/(\delta_j)$ where δ_j is an irreducible factor of δ. Then using the exact sequence

$$0 \to M_i \to M_{i-1} \to R/(\delta_j) \to 0$$

together with $Tor_2^R(R/(\delta_j), S) = 0$ we obtain the exact sequence

$$0 \to Tor_1^R(M_i, S) \to Tor_1^R(M_{i-1}, S) \to Tor_1^R(R/(\delta_j), S).$$

Then $Tor_1^R(M, S) = 0$ implies $Tor_1^R(M_i, S) = 0$ for all M_i and therefore $Tor_1^R(M_N, S) = 0$. But for all j we can find a filtration ending with $M_N = R/(\delta_j)$ and so we get $Tor_1^R(R/(\delta_j), S) = 0$ for all j.

Conversely, if $Tor_1^R(R/(\delta_j), S) = 0$ for all j, by the above exact sequence we have $Tor_1^R(M, S) = 0$. So we see that $Der_S(E_q) = 0$ is equivalent to the statement $Tor_1^R(R/(\delta_j), S) = 0$ for all irreducible factors δ_j of δ. Now we have

$$Tor_1^R(R/(\delta_j), S) = \frac{(\delta_j) \cap Ker\, h}{(\delta_j) \cdot Ker\, h}$$

and therefore $Tor_1^R(R/(\delta_j), S) = 0$ if and only if δ_j is a nonzero divisor of $R/Ker\, h$. But $Ker\, h = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, i.e., $S = R/Ker\, h$. So (x) is equivalent to $h(\delta_j) \neq 0$ for all factors δ_j and so is equivalent to $h(\delta) \neq 0$. □

We say that E_0 has the star property if among all the polynomials f_j of maximal degree there is one, say f_n, such that one (and then all) of the conditions of Thm. 3 are satisfied. We observe that verification of this property can be reduced to the special case when all algebra generators have the same degree. We consider a graded polynomial algebra $Q = k[u_1, \ldots, u_n]$ with $deg\, u_i = 1$ for all i. Let $P_S = S[x_1, \ldots, x_n]$ and $Q_S = S[u_1, \ldots, u_n]$. Then choose a regular sequence $h_1, \ldots, h_n$ in Q, $deg\, h_i = deg\, x_i$. This defines a graded ring homomorphism $h : P_S \to Q_S$ with $x_i \mapsto h_i(x)$, such that Q_S becomes a flat graded P_S-module. It follows that Q_S will be free on P_S. Let $I_q = (f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n - t)$ be the defining ideal of E_q in P_S. Let $J_q = I_q Q_S$ be the ideal in Q_S generated by I_q. Then J_q is generated by the compositions $f_j \circ h, \ldots, f_{n-1} \circ h, f_n \circ h - t$. Moreover by flatness we have $J_q \cap P_S = I_q$. Let Δ_u be the Jacobian determinant of the ideal J_q. Then by the chain rule

$$\Delta_u = \Delta \circ h \cdot \det\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right).$$

Let $B_q = Q_S/J_q$, then B_q is the quantum deformation of $B_0 = Q/J_0$.

Lemma 7. *If B_q has the star property, then E_q has the star property.*

Proof: Let in E_q hold an equation of the type

$$\Delta \cdot c = 0.$$

Then

$$\Delta_u \cdot h(c) = 0$$

and therefore $h(c) = 0$. But B_q is free on E_q and therefore $h(c) = 0$ implies $c = 0$. $\square$

Example: Let G be a compact connected Lie group, let T be a maximal torus of G and let $U \subset G$ a closed connected subgroup of maximal rank. By Lemma 7 we can conclude that $H^*(G/U; \mathbb{C})$ has the star property if $H^*(G/T; \mathbb{C})$ has this property.

The following theorem shows the connection with the Halperin conjecture.

Theorem 4. *A complete intersection E_0 of finite length over a field k of characteristic zero has no negative derivations if it has the star property.*

Proof: Suppose the star property is satisfied. By (ii) and Lemma 1 we have the exact sequence

$$0 \to Hom_{P_S}(\Omega_{P_S|S}, E_q) \xrightarrow{Jac} Hom_{E_q}(I/I^2, E_q) \longrightarrow T^1_S(E_q) \to 0.$$

The minimum degree a generator of the $S-$module $T^1_S(E_q)$ can have is $-d_n$. But t has degree equal to d_n. By the above considerations the minimum degree a homogeneous element in $Tor^1_S(T^1_S(E_q), k)$ is therefore greater or equal to $-d_n + md_n$, where m is a torsion exponent. But $T^1_S(E_q)$ is torsion and therefore $m > 1$. This shows that the degree of the elements in $Der_k(E_0)$ are greater or equal to zero. $\square$

4 Some examples of discriminants

Using the system CoCoA we calculate some examples for the discriminant illustrating condition (ix).

A) The standard example for the discriminant is always the versal deformation of the singularity A_n. i.e., for the ring $E_0 = k[x]/(x^{n+1})$ which is given by

$$E = \frac{k[t_1, \ldots, t_n][x]}{(F)}$$

with $F = x^{n+1} - t_2x^{n-1} - \ldots - t_nx - t_{n+1}$. So, for example in the case $n = 2$ and $s = t_2, t = t_3$ we have to consider the elimination ideal

$$(\delta) = (F, G) \cap k[s, t]$$

with $F = x^3 - sx - t$ and $G = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - s$. Then

$$\delta = -2/9s^3 + 3/2t^2.$$

This describes a cusp with the singolarity at the origin.

In the case $n = 3$ we have to consider the ideal $(\delta) = (F, G) \cap k[s, t, u]$ with $F = x^4 - sx^2 - tx - u$ and $G = \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 2x - t$. Then

$$\delta = -2/9s^3t^2 + 8/9s^4u + 3/2t^4 - 8st^2u + 64/9s^2u^2 + 128/9u^3.$$

In the case $n = 4$ we obtain the little bit lenghthy expression

$$\begin{aligned}\delta = {} & 2/9s^3t^2u^2 + 8/9s^4u^3 + 8/9s^3t^3v - 4s^4tuv \\ & + 6s^5v^2 + 3/2t^4u^2 - 8st^2u^3 + 64/9s^2u^4 \\ & - 6t^5v + 35st^3uv - 280/9s^2tu^2v - 275/6s^2t^2v^2 \\ & + 50s^3uv^2 + 128/9u^5 - 800/9tu^3v + 125t^2uv^2 \\ & + 1000/9su^2v^2 - 625/3stv^3 - 3125/18v^4\end{aligned}$$

B) Take $E_0 = k[x,y,z]/(x+y+z, xy+xz+yz, xyz)$ and consider the deformation of E_0 given by

$$E = \frac{k[u,v,w][x,y,z]}{(F,G,H)}$$

with $F = x+y+z-u$, $G = xy+xz+yz-v$ and $H = xyz-w$. The fundamental determinant is $\Delta = (x-y)(x-z)(y-z)$. Then the discriminant has the form

$$\delta = -u^2v^2 + 4v^3 + 4u^3w - 18uvw + 27w^2.$$

The interesting variable is of course w. As another example we consider

$$E = \frac{k[s,t,v,w][x,y,z,u]}{(\sigma_1 - s, \sigma_2 - t, \sigma_3 - v, \sigma_4 - w, \Delta)}$$

with $\Delta = (x-y)(x-z)(x-u)(y-z)(y-u)(z-u)$. Then we obtain

$$\begin{aligned}\delta = {} & -s^2t^2v^2 + 4t^3v^2 - 4s^3v^3 + 18stv^3 \\ & + 27v^4 + 4s^2t^3w - 16t^4w + 18s^3tvw \\ & - 80st^2vw + 6s^2v^2w - 144tv^2w + 27s^4w^2 \\ & - 144s^2tw^2 + 128t^2w^2 - 192svw^2 - 256w^3.\end{aligned}$$

In all this cases we see that a power of the relevant variable stands alone in the expression as it must be after Thm. 1, (ix).

C) Finally we consider the following two examples: Take in $k[t,x,y,z]$ the ideal I generated by $x^3, y^5, z^7 - t$. Then $\Delta = 105x^2y^4z^6$ and the elimination ideal $I + (\Delta) \cap k[t]$ is (0) obviously because $(x^3, y^5, x^2y^4z^6)$ is not reduced. At the other hand take $J = (x^3 + y^3, y^5 + z^5.z^7 - t)$, then the corresponding fundamental determinant is equal to Δ but the elimination ideal $(J + (\Delta)) \cap k[t]$ is $(-t^3)$.

5 Complex flag manifolds

In this paragraph we use the method of Shiga and Tezuka [15] as an illustration of the observations of the previous paragraph.

Theorem 5. *(Shiga-Tezuka) Let $X = G/U$, where G is a compact connected Lie group and $U \subset G$ a closed connected subgroup of maximal rank. Then $H^*(X;\mathbb{C})$ has no negatively graded derivations.*

We prove the statement only for the case $G = U(n)$. For a proof of the full theorem see [15]. As we mentioned before, it suffices to consider the quantum deformation of $H^*(U(n)/T; \mathbb{C})$. Then we can write with $S = \mathbb{C}[t]$

$$E_q = \frac{S[x_1, \ldots, x_n]}{(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n - t)},$$

where the σ_j are the elementary symmetric polynomials in the x_i and t is a homogeneous generator with $deg\, t = deg\, \sigma_n$. When we want to find a point in the variety of the defining ideal for $t = 1$, we have to solve the system of equations

$$\sigma_1(\omega) = \cdots = \sigma_{n-1}(\omega) = 0$$

and

$$\sigma_n(\omega) = 1$$

We thus have to consider the solutions of the equation $\tau^n + 1 = 0$ which are

$$\omega_\nu = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\nu}{n}} e^{\pi\sqrt{-1}}$$

for $\nu = 0, \ldots, n-1$. Let $S' = \mathbb{C}[\tau]$, $deg\, \tau = 1$, and let $S \to S'$ be the homomorphism $t \mapsto \tau^n$. Consider now $B_q = E_q \otimes_R S$ and write $B_q = P_{S'}/I_q$ where $P_{S'} = S'[x_1, \ldots, x_n]$ and $I_q = (\sigma_1 \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n - \tau^n)$. Then B_q has an associated prime ideal P of the form

$$P = (x_1 - \omega_1 t, \ldots, x_n - \omega_n t).$$

Let $w \in WSU(n)$, then let

$$P^w = (x_{w(1)} - \omega_1 \tau, \ldots, x_{w(n)} - \omega_n \tau).$$

It follows by the symmetry of I_q under the action of WG, that

$$I_q \subset J_q$$

where

$$J_q = \bigcap_{w \in WSU(n)} P^w$$

This gives a surjective map of S-algebras

$$B_q = P_S/I_q \to P_S/J_q.$$

Let $K \subset B_q$ be the kernel of this map. But B_q is a free S–module of rank equal to the order $n!$ of the Weyl group $WSU(n)$. If we make t invertible, we then get an isomorphism. It follows that K is a S–torsion submodule of B_q and therefore must be zero. Consequently $I_q = J_q$, i.e., $I_q = Rad\, I_q$ and so B_q is reduced. Then also E_q is reduced, and since we are working over $\mathbb{C}$ this implies that $E_q[t^{-1}]$ is smooth over $S[t^{-1}]$, i.e., Thm. 3, condition (viii) is satisfied and so $H^*(U(n)/T; \mathbb{C})$ has the star property. But then by the example following Lemma 7 the graded $\mathbb{C}$-algebra $H^*(U(n)/U; \mathbb{C})$ has the star property for all closed connected subgroups $U \subset U(n)$ of maximal rank. By Thm. 4 the ring $H^*(U(n)/U, \mathbb{C})$ does not have negative derivations. By [6], Prop. 3.1, it follows that $H^*(G/U; \mathbb{C})$ does not have negative derivations for every product $G = U(n_1) \times \ldots \times U(n_s)$ and every maximal rank subgroup U of G. $\square$

6 The arithmetic condition of Friedlander and Halperin

A necessary and sufficient condition for the existence of algebras of finite k-length of a given weighting type is the strong arithmetic condition (S. A. C.) of Friedlander and Halperin, see [3]. This is an combinatorial condition on the pair of ordered sets $D = (d_1, \dots, d_n)$ and $M = (m_1, \dots, m_n)$.

Definition 1. *Let $D = (d_1, \dots, d_q)$, $M = (m_1, \dots, m_r)$ be two finite sequences of positive integers. We say that (D, M) satisfies S.A.C. if for every subsequence M^* of M of length s, $1 \leq s \leq r$, there exist at least s elements d_j of D of the form*

$$d_j = \sum_{m_i \in M^*} \gamma_{ij} m_i$$

where the γ_{ij} are non-negative integers and $\sum_{m_i \in M^*} \gamma_{ij} \geq 2$.

A one-connected space S is called of type F if

$$dim\, H^*_{sing}(S; \mathbb{Q}) < \infty \quad \text{and} \quad dim\, \pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} < \infty.$$

Spaces of type F include all homogeneous spaces G/K in which K is a closed connected subgroup of a connected Lie group G. (If in addition $H^{od}(S; \mathbb{Q}) = 0$, we say that S is elliptic or of type F_0.) Let S be a space of type F and let $2d_1 - 1, \dots, 2d_q - 1; 2m_1, \dots, 2m_r$ be the (positive) integers occurring as the degrees of a homogeneous basis of $\pi_*(S)$. The integers $d_1, \dots, d_q; m_1, \dots, m_r$ will be called the d-exponents and the m-exponents of S. The following is a characterization of the sequences of positive integers which can occur as the d-exponents and the m-exponents of a space of type F, see [3], Thm. 1.

Theorem 6. *(Friedlander-Halperin[3]) Let $D = (d_1, \dots, d_q)$ and $M = (m_1, \dots, m_q)$ be a pair of sequences of positive integers. The following conditions are equivalent:*

i) (D, M) satisfies S.A.C.

ii) The sequences D and M occur as the d- and m-exponents of a space S of type F. Moreover, if $d_j \geq 2$ for all j and S. A. C. holds, then S may be chosen to be simply connected: if in addition $q > r$, the set S may be taken to be a closed manifold.

This theorem is a consequence of Thm. 3 in the same paper [3]. Let k be an infinite field. Assume

$$\Phi_j = \{\sigma_{jl}\}_{l=1,\dots,l_j}, \quad j = 1, \dots, q$$

are families of nonlinear monomials σ_{ij} in the variables $x_1, \dots, x_n$.

Definition 2. *We say that families $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ satisfy P. C. (polynomial condition) if for each s and for each set of variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ there are at least s families $\Phi_{m_1}, \dots, \Phi_{m_s}$ containing a monomial in $k[x_{i_1}, \dots, x_{i_s}]$.*

Given sets $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ of monomials, we consider quasihomogeneous elements $f_1, \dots, f_q$ of the graded polynomial ring $k[x_1, \dots, x_r]$ of the form

$$f_j = \sum_{l=1}^{l_j} c_{jl}\, \sigma_{jl}, \quad c_{ij} \in k,\ \sigma_{jl} \in \Phi_j \quad (1 \leq l \leq l_j)$$

Theorem 7. *(Friedlander-Halperin [3]) Let $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ be sets of monomials as above. Then the following statements are equivalent.*

i) The families $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ satisfy P.C.

ii) There are polynomials f_i as above such that

$$dim_k \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_q)} < \infty.$$

The connection between P.C. and the earlier conditions occurs as follows. Let $D = (d_1, \dots, d_q)$, $M = (m_1, \dots, m_r)$ be finite sequences of positive integers. To the variables x_i, $1 \leq i \leq r$ assign the degree m_i. For $1 \leq j \leq q$, denote by Φ_j the set of non-linear monomials in the $x_1, \dots, x_n$ of degree d_j. Observe that $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ satisfies P.C. if and only if (D, M) satisfies $S.A.C.$ There follows at once from [3], Thm. 3.

Corollary 1 *The following statements are equivalent.*

i) The pair (D, M) satisfies S.A.C.

ii) In $k[x_1, \dots, x_r]$ there exist $f_1, \dots, f_q$ where the f_j are linear combination of non-linear monomials of degree d_j with

$$dim_k \frac{k[x_1, \dots x_r]}{(f_1, \dots, f_q)} < \infty.$$

7 The resultant in the anisotropic case

We first restrict to the case $r = q = n$ and $M = (1, 1, \dots, 1)$. Consider the polynomials

$$F_j = \sum_\alpha c_{j\alpha} u^\alpha.$$

where in the sum the monomials u^α are running over the set of all monomials u^α of degree $|\alpha| = d_j$. Consider the ring $A_c = k[\{c_{j\alpha}; 1 \leq j \leq n, \alpha\}]$ where we suppose that all generators $c_{j\alpha}$ have degree zero. Let I_c be the ideal in $P_{A_c} = A_c[u_1, \dots, u_n]$ generated by $F_1, \dots, F_n$ and let $B_c = P_A/I_c$ be called the universal algebra in the classical (or isotropic) case. Then by the main theorem of elimination theory there exists a hypersurface $V(R) \subset Spec\, A_c$ with the property: $t \notin V(R)$ if and only if the fiber algebra $B_{c,t} = B_c \otimes_{A_c} k(t)$ has finite length over the residue field $k(t)$. So, the open set $Spec\, A_R \subset Spec\, A$ can be considered as the variety of complete intersections of this weighting type. In classical elimination theory it is proved that R is irreducible.

In analogy with the definition of the algebra B_c we define a universal algebra for the more general quasihomogeneous case or anisotropic case, see [7], sec. 6.3. Let (D, M) be weighting pair satisfying the condition S.A.C. Consider independent variables $x_1, \dots, x_n$ with $deg\, x_i = m_i$ and consider the generic polynomials

$$F_j = \sum_{d_j = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n} c_{j\alpha} x^\alpha$$

where $c_{j\alpha}$ are indeterminates of degree zero. Consider the ring

$$A = k[\{c_{j\alpha}\}],$$

let $P_A = A[x_1, \ldots, x_n]$, let $I \subset P_A$ be the ideal generated by the F_j and consider the A- algebra

$${}^aB = P_A/I.$$

Then B_c is the special case of this A-algebra for $M = (1, 1, \ldots, 1)$.

Proposition 1. *Let k be a field, $\operatorname{char} k = 0$, and suppose the pair (D, M) satisfies S.A.C., then the following statements hold.*

i) There exists a reduced element

$$R = {}^aRes(F_1, \ldots, F_n) \in A$$

such that $R(t) \neq 0$ if and only if $lg\, B_t < \infty$.

ii) The A_R-module B_R is locally free finite.

The element R is called the resultant in the anisotropic case. Recall that in [7] the pair (D, M) is assumed to satisfy the condition μ/d_j for all j, where

$$\mu = l.c.m(m_1, \ldots, m_n)$$

is the least common multiple of the m_i. It is easy to verify that this condition implies $S.A.C.$ but not conversely. The reader should observe that all results of [7] concerning the resultant in the anisotropic case are proved only under this hypothesis. The above proposition is the minimum we need for a proof of our openess result in the next paragraph. It might however be very interesting to generalize the results of [7] to all weighting types satisfying S.A.C.

Proof: We consider the graded ring $Q_A = A[u_1, \ldots, u_n], deg\, u_i = 1$ and the homomorphism $h: P_A \to Q_A$ with $h(x_i) = u_i^{m_i}$. Let $J \subset Q_A$ be the ideal $J = IQ_A$. Then J is generated by the polynomials

$$G_j = h(F_j) = \sum_{\alpha} c_{j\alpha}\, u^{\alpha \circ M},$$

where

$$\alpha \circ M = (m_1\alpha_1, m_2\alpha_2, \ldots, m_n\alpha_n).$$

Let $B' = Q_A/J$. Let B_c be the A_c-algebra considered above or in [7]. Then B' is obtained from it by base change with a closed immersion given by a surjective homomorphism $res: A_c \to A$. Let $R_c \in A_c$ be the classical resultant and let R be a generator of the ideal $(res(R_c))$. Since (D, M) satisfies S.A.C., the sets of monomials $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ with

$$\Phi_j = \{x^\alpha | d_j = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n\}$$

satisfy the condition P.C. and therefore by Thm. 3 in [3] there exist values $t_{j\alpha} \in k$ of the coefficients $c_{j\alpha}$ such that the polynomials

$$f_j = \sum_{d_j = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n} t_{j\alpha} x^\alpha$$

have a variety $V(f_1, \ldots, f_n) = \{0\} \in k^n$. Let

$$g_j = \sum_{d_j=\alpha_1 m_1+\ldots+\alpha_n m_n} t_{j\alpha} u^{\alpha \circ M},$$

then also the ideal $(g_1, \ldots, g_n)$ has the variety $V(g_1, \ldots, g_n) = \{0\}$. It follows that R does not vanish at the point $t = (t_{j\alpha}) \in Spec\, A$ and so R is a nontrivial polynomial with the property $R(t) \neq 0$ if and only if $lg\, B'_t < \infty$ for $t \in Spec\, A$. But of course $lg\, B'_t < \infty$ if and only if $lg\, B_t < \infty$. This proves (i).

For to prove (ii) we observe that by construction B' is free and finite on B. Moreover by Prop. 2.6 (i) in [7] B_{c,R_c} is locally free and finite on A_{c,R_c}. So, B'_R is locally free on A_R. For to show that B_R is projective on A_R it suffices to show that for a $t \in Spec\, A_R$ it follows $Tor_1^{A_R}(B_R, k(t)) = 0$. But we have $Tor_1^{A_R}(B'_R, k(t)) = 0$ by the above cited result of Jouanolou. Let $\underline{m} \subset A_R$ be the maximal ideal of the closed point t. Then $B'_{\underline{m}}$ is free on $B_{\underline{m}}$. Therefore writing $B'_{\underline{m}} = \oplus_i B_{\underline{m}} e_i$, we get

$$0 = Tor_1^{A_R}(B'_R, k(t)) = Tor_1^{A_{\underline{m}}}(B'_{\underline{m}}, k(t)) = \bigoplus_i Tor_1^{A_{\underline{m}}}(B_{\underline{m}} e_i, k(t))$$

and therefore $Tor_1^{A_R}(B_R, k(t)) = Tor_1^{A_{\underline{m}}}(B_{\underline{m}} e_i, k(t)) = 0$. This proves (ii) □

8 An openess property

In this section we will show that the set of HCI of a fixed weighting type (D, M) without negative derivations forms an open subset of the variety of all HCI of this weighting type. Let $V_R \subset Spec\, A$ be the open set $V_R = Spec\, A[R^{-1}]$. Let $t \in Spec\, A$ be a k-valued closed point. Then B_t is a HCI of finite length if and only if $t \in V_R$. So, V_R is the set of complete intersections of weighting type (D, M). Let $W \subset V_R$ be the subset of those complete intersections without derivations of negative degree.

Theorem 8. *Let k be any field. The subset $W \subset V_R$ of the complete intersections of weighting type (D, M) which do not have derivations of negative degree is an (eventually empty) Zariski-open subset of V_R and therefore of V.*

This means that deforming a weighted homogeneous complete intersection B_t without negative derivations gives again a weighted homogeneous complete intersection B_s without negative derivations (for little values of $\|s - t\|$ of course). From a probabilistic point of view one can say that the probability to pick at random a complete intersection without negative derivations is equal to one. (If there is one.)

Let A be a ring with trivial grading, let M be a A−module, then we define $F_d M \subset M$ as the set of all elements of degree less than d, i.e.,

$$F_d M = \{m \in M \mid deg\, m < d\}.$$

We need the following lemma.

Lemma 8. *Let A be a ring with trivial grading, i.e., all elements of A are of degree zero. Let M be a graded A-module which is projective as A-module. Then the following holds.*

i) $F_d M$ is a projective $A-$submodule of M.
ii) For all maximal ideals $\underline{m} \subset A$ the image of $F_d M$ in $M/\underline{m}M$ under the residue homomorphism is $F_d(M/\underline{m}M)$.

This is obvious, since $F_d M$ is the direct sum of the M_i for all $i < d$, and passage modulo $\underline{m}M$ commutes with direct sums. □

For to avoid a too heavy notation during the proof we rename A and B setting

$$A := A_R$$

and

$$B := B_R.$$

The following is an immediate consequence of Lemma 8.

Lemma 9. *If*

$$T^1_A(B)_- = G_0 T^1_A(B)$$

is the negatively graded part of $T^1_A(B)$, then we have an exact sequence

$$M \xrightarrow{Jac^-} N \to T^1_A(B)_- \to 0.$$

where M and N are projective and for all $t \in Spec\, A$

$$M \otimes_A k(t) \subset Hom_{P_{k(t)}}(\Omega_{P_{k(t)}|k(t)}, B_t)$$

and

$$N \otimes_A k(t) \subset Hom_{B_t}(I_t/I_t^2, B_t)$$

are the respective negatively graded parts. Moreover

$$Jac^- \otimes_A k(t) = Jac_t|_{M \otimes k(t)}.$$

where Jac_t is the Jacobian corresponding to the fiber algebra $B_t = B \otimes_A k(t)$.

Proof: With $B = P_A/I$ we have the usual exact sequence

$$0 \to Der_A(B) \to Hom(\Omega_{P_A|A}, B) \xrightarrow{Jac} Hom_A(I/I^2, B) \to T^1_A(B) \to 0.$$

Taking negatively graded parts one obtains the exact sequence of $A-$modules

$$0 \to Der_A(B)_- \to M \xrightarrow{Jac^-} N \to T^1_A(B)_- \to 0.$$

By Prop. 1 (ii) the A-algebra B is projective. Now $\Omega_{P_A|A}$ is free on A and therefore the A-modules $Hom(\Omega_{P_A|A}, B)$ is projective. That $Hom_B(I/I^2, B)$ is locally free follows from the statement that I is generated by a series $F_1, \ldots, F_n$ of polynomials which are regular in the neighborhood of every $t \in Spec\, A$, so it is projective. It follows from Lemma (i) that the corresponding negatively graded parts M and N are also projective. So the result follows from Lemma 8 (ii). The rest of the statement follows from the naturality of the Jacobian homomorphism with respect to base change with $A \to k(t)$. □

Proof of Thm. 8: As the parameters c_{ij} have degree zero, for every $t \in V$ the fiber algebra B_t inherits a grading from B. Let M and N be the A-modules as in the previous Lemma. Let $r = rk_A M$ and $s = rk_A N$ Let $\mathcal{F}_{s-r}(T^1_A(B)_-) \subset A$ be the $(s-r)$–th Fitting ideal of $T^1_A(B)^-$. Then Jac_t^- is injective if and only if $t \notin V(\mathcal{F}_{s-r}(T^1_A(B)_-))$. Now, $Ker\, Jac_t|_{M \otimes_A k(t)} = Der_{k(t)}(B_t)_-$ and so B_t has no negative derivations if and only if t is not an element of $V(\mathcal{F}_{s-r}(T^1_A(B)_-))$. □

It is however not clear that W is always nonempty. In the case k algebraically closed by the Hilbert Nullstellensatz it suffices to show that the ideal $\mathcal{F}_{s-r}(T^1_A(B)_-)$ is different from the zero ideal, or in other terms, that there is at least one point $t \in V_0$ such that the associated fiber algebra B_t does not have negative derivations. So, the conjecture of Halperin can be formulated as a statement on the resultant.

Conjecture 3. *For every pair (D, M) satisfying S.A.C. one has*

$$1 \in Rad\, \mathcal{F}_{s-r}(T^1_{A_R}(B_R)_-).$$

or in the nonlocalized version:

$$^aRes(F_1, \ldots, F_n) \in Rad\, \mathcal{F}_{s-r}(T^1_A(B)_-).$$

Finally, we obtain a result in complexity theory.

Theorem 9. *Given a pair (D, M) satisfying S.A.C., then the question whether there exists a complete intersection E_0 of weighting type (D, M) with negative derivations can be decided by a finite algorithm in commutative algebra.*

Proof: There is no HCI of weigting type (D, M) with negative derivations if and only if R is not a member of $Rad\, \mathcal{F}_{s-r}(T^1_A(B)_-)$. But this can be decided using Groebner bases and the Buchberger division algorithm. □

Example: Take $A = k[t]$, $deg\, t = 0$ and consider the A-algebra

$$B = A[x]/I$$

with $I = (F)$ where $F = tx^n$. So, the resultant is given by $Res = t$. We have

$$Hom(\Omega_{P_A|A}, B) \cong B\frac{\partial}{\partial x}$$

and

$$Hom_A(I/I^2, B) \cong B\frac{\partial}{\partial F}.$$

The Jacobian is given by

$$Jac\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = ntx^{n-1}\frac{\partial}{\partial F}.$$

It follows

$$T^1_A(B) = k[t,x]/(tx^n, ntx^{n-1})\overline{\frac{\partial}{\partial F}}$$

If $(char\, k, n) = 1$, we have

$$T^1_A(B) = k[t,x]/(tx^{n-1})\overline{\frac{\partial}{\partial F}}.$$

We see that $T^1_A(B)$ decomposes into a free A−module of rank $n-1$ and a infinite sum of simple A-modules, i.e., copies of the ground field. We have $M = A\frac{\partial}{\partial x}$ and $N = Hom_A(I/I^2, B)$. The matrix of Jac is then given by

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & nt \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and the matrix of Jac^- is

$$\begin{pmatrix} nt \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Then with $r = 1$ and $s = n$ we have

$$\mathcal{F}_0(T^1_A(B)_-) = \mathcal{F}_1(T^1_A(B)_-) = \ldots = \mathcal{F}_{n-2}(T^1_A(B)_-) = 0$$

and $\mathcal{F}_{n-1}(T^1_A(B)_-) = (nt)$. Since we have ${}^aRes \in (nt)$ it follows $Der_k(B_t)_- = 0$ for all $t \neq 0$ as it must be.

9 Resultant and star property

We consider the graded ring $T = A[y_1, \ldots, y_n]$ where the y_j are indeterminants of degree $deg\, y_j = deg\, F_j = d_j$. Let $J \subset T[x_1, \ldots, x_n]$ be the ideal generated by $\Phi_j = F_j - y_j$ and consider the algebra

$$\mathcal{B} = T[x_1, \ldots, x_n]/J.$$

Then the class of the Jacobi matrix

$$\Delta = \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\right)$$

in $\mathcal{B}$ is not a zero divisor and therefore the sequence

$$0 \to Hom_{T[X]}(\Omega_{T[X]\|T}, \mathcal{B}) \to Hom_{\mathcal{B}}(J/J^2, \mathcal{B}) \to T^1_T(\mathcal{B}) \to 0$$

is exact. We suppose now $S = k[t], deg\, t = d_n$ and $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. consider the homomorphism $h: k[y_1, \ldots, y_n] \to S$ with $h(y_j) = 0$ for $1 \leq j \leq n-1$ and $h(y_n) = t$. Let $H: T \to A[t]$ be the A−homomorphism induced by h. Then $H: T \to A[t]$ is surjective and therefore describes a closed immersion $Spec\, A[t] \subset Spec A[y_1, \ldots, y_n]$. Let $\delta \in A[y_1, \ldots, y_n]$ be the discriminant of the T-algebra $\mathcal{B}$. We consider the A-algebra

$$N = A[y_1, \ldots, y_n]/(y_1, \ldots, y_{n-1}, \delta) = A[y_n]/(\delta'),$$

where δ' is the mod-$(y_1,\dots,y_{n-1})$-reduction of δ. Let $\delta' \in A \otimes k[y_n]$ be the mod-$(y_1,\dots,y_{n-1})$-reduction of δ. Then one has $\delta' = cy_n^m$ for $c \in A$ and a certain power m.

Lemma 10. *There is a hypersurface $V_{fat} \subset V(D,M)$ such that for all $y \neq V_{fat}$ the $k(y)$–algebra A_y has the star property.*

For a proof take simply $V_{fat} = V(c)$ using Thm. 3 condition (ix). □

It follows from Thm. 3 (iii) that c is a power of ${}^aRes(F_1,\dots,F_{n-1},\Delta)$. This implies the following statement.

Lemma 11.

$${}^aRes(F_1,\dots,F_{n-1},\Delta) \in Rad\,\mathcal{F}_{s-r}(T_A^1(B)_-)$$

Proof: This follows from Thm. 4 which says that a HCI B_t satisfying the star-property does not have negative derivations, i. e., $t \in V(\mathcal{F}_{s-r}(T_A^1(B)_-))$. □

Of course it would be nice to be able to prove that the statement of the lemma implies Conjecture 3. In any case we have to study the relationship between the resultants

$${}^aRes(F_1,\dots,F_n)$$

and

$${}^aRes(F_1,\dots,F_{n-1},\Delta).$$

As a first result we state the following lemma.

Lemma 12. *Suppose μ/d_j for all j, where $\mu = l.c.m.(m_1,\dots,m_n)$. and suppose $(m_1,\dots,m_n,d_1,\dots,d_n,char\,k) = 1$, then for all i there exists a λ_i such that*

$${}^aRes(F_1,\dots,F_{i-1},\Delta,F_{i+1},\dots,F_n) = \lambda_i \cdot {}^aRes(F_1,\dots,F_n).$$

Proof: Since the polynomials F_j are quasihomogeneous we have the equations

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = d_j F_j$$

for all j. Then it follows from Cramer's rule

$$\Delta \cdot m_i x_i \in (b_1\, F_1,\dots,b_n\, F_n)$$

for all i and therefore $x_i^N \Delta \in (F_1,\dots,F_n)$ for all i and all powers N by the assumption on the characteristic of k. This shows

$$(F_1,\dots,F_{j-1},x_i^N\Delta,F_{j+1},\dots,F_n) \subset (F_1,\dots,F_n).$$

for all powers N. It follows from [7], 6.3.9.1, 6.3.9.5

$$({}^aRes(F_1,\dots,F_{j-1},x_i^N\Delta,F_{j+1},\dots,F_n) \subset ({}^aRes(F_1,\dots,F_n))$$

for all powers N. By the above cited results in [7] 6.3.9.1

$${}^aRes(F_1,\dots,F_{j-1},x_i^N\Delta,F_{j+1},\dots,F_n)$$

decomposes into the product of

$$^{a}Res(F_1,\dots,F_{j-1},x_i^N,F_{j+1},\dots,F_n)$$

and

$$^{a}Res(F_1,\dots,F_{j-1},\Delta,F_{j+1},\dots,F_n).$$

Let the $\bar{F}_j$ are the mod-x_i-reductions of the F_j. By another result of the same paper (6.3.9.2) we have

$$^{a}Res(F_1,\dots,F_{j-1},x_i^{N_i},F_{j+1},\dots,F_n) = {}^{a}Res(\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{j-1},\bar{F}_{j+1},\dots,\bar{F}_n)^M,$$

for certain integers N_i and M.. Therefore the product

$$^{a}Res(\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{j-1},\bar{F}_{j+1},\dots,\bar{F}_n)^M \cdot {}^{a}Res(F_1,\dots,F_{j-1},\Delta,F_{j+1},\dots,F_n)$$

is an element of the ideal $({}^{a}Res(F_1,\dots,F_n))$. Now ${}^{a}Res(F_1,\dots,F_n)$ is irreducible and since

$$deg\,{}^{a}Res(\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{j-1},\bar{F}_{j+1},\dots,\bar{F}_n) < deg\,{}^{a}Res(F_1,\dots,F_n)$$

we have

$$^{a}Res(F_1,\dots,F_{j-1},\Delta,F_{j+1},\dots,F_n) \in ({}^{a}Res(F_1,\dots,F_n)).$$

for all j.

So we see that we are in the following situation.

$$\begin{tikzcd}
 & V({}^{a}Res(F_1,\dots,F_n)) \arrow[d, "\cap"] \\
V(\mathcal{F}_{s-r}(T_A^1(B)_-) \arrow[ur, "?"] \arrow[r, hook] & V({}^{a}Res(F_1,\dots,F_{n-1},\Delta))
\end{tikzcd}$$

The variety

$$V({}^{a}Res(F_1,\dots,F_n))$$

is an irreducible component of

$$V({}^{a}Res(F_1,\dots,F_{n-1},\Delta))$$

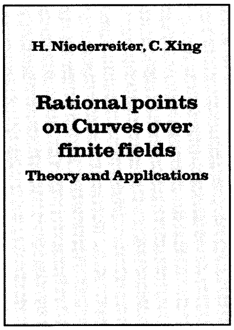
which together with Conjecture 3 brings us hopefully nearer to a proof of the Halperin conjecture. In any case it seems interesting to develop a theory of the resultant in the anisotropic case which is free of the divisibility condition using only the arithmetic condition of Friedlander and Halperin.

References

[1] *Hao Chen:* Nonexistence of Negative Weight Derivations on Graded Artin Algebras: A Conjecture of Halperin, J. of Algebra 216, 1–12 (1999)

[2] *Halperin, S.:* Finiteness in the minimal models of Sullivan, T.A.M.S., Vol. 230, 173-199 (1977)

[3] *Friedlander, J. B., Halperin, S.:* An Arithmetic Characterization of the Rational Homotopy Groups of Certain Spaces, Inv. math. 53 (1979) 117–133
[4] *Hartshorne, R.:* Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977
[5] *Hauschild, V.:* Deformations and the Rational Homotopy of the Monoid of Fiber Homotopy Equivalences, Illinois Journal of Mathematics, Vol. 37, Number 4, Winter 1993, 537–560
[6] *Hauschild, V.:* Fibrations, self homomotopy equivalences and negative derivations, AMS-Contemporary Mathematics, Vol. 274, 2001, pp. 169–182, Proc. of the Workshop on Groups of Homotopy Self-Equivalences and related Topics, Sept. 5–11, 1999, University of Milan, Gargnano, Italy, Ken-ichi Maruyama, John W. Rutter, Editors
[7] *Jouanolou, J. P.:* Le formalisme du résultant, Advances in Math. 90, 117–263 (1991)
[8] *Kim, B.:* Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices, *Ann. of Math.*, 149 (1999), 129-148
[9] *Kunz, E.:* Kähler Differentials, Vieweg Advanced Lectures in Mathematics, Braunschweig, 1986
[10] *Markl, M.:* Towards one conjecture on collapsing of the Serre spectral sequence, Suppl. ai Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. II, II.22 (1989), 152–159
[11] *Matsumura, H.:* Commutative Algebra, 2^{nd} edition, The Benjamin Cummings Publishing Company, 1980
[12] *Meier, W.:* Rational universal fibrations and flag manifolds, Math. Ann. 258, 329-340, 1982
[13] *Meier, W.:* Kähler manifolds and homogeneous spaces, Math. Z. 183, 473–481, 1983
[14] *Papadima, S., Panescu, L.:* Reduced weighted complete intersection and derivations, J. of Algebra 183, 595–604, 1996
[15] *Shiga, H., Tezuka, M.:* Rational fibrations, homogeneous spaces with positive Euler characteristics and Jacobians, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 37, 1, 81–106, 1987
[16] *Wahl, J.:* Derivations, automorphisms and deformations of quasi-homogeneous singularities, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 40, Part 2, 613–624, A.M.S., Providence, 1983



H. Niederreiter, C. Xing
Rational points on Curves over finite fields
Theory and Applications
(London Math. Soc. LNS 285)

Cambridge University Press, 2001, 245 S., £ 27.95

Im Vorwort beschreiben die Autoren die Zielsetzung ihres Buches sehr zutreffend. Zitat:

Algebraic curves over finite fields and their function fields have been and are still a source of great fascination for number theorists and geometers, ever since the seminal work of Hasse and Weil in the 1930s and 1940s. Many important and fruitful ideas have arisen out of this area, where number theory and algebraic geometry meet, and these developments have even spawned a new subject called arithmetic algebraic geometry which now has a broad appeal.

For a long time, the study of algebraic curves over finite fields and their function fields was the province of pure mathematicians. But then, in a series of three papers in the period 1977–1982, Goppa found stunning applications of algebraic curves over finite fields, and especially of those with many rational points, to coding theory. This created a much stronger interest in the area and attracted new groups of researchers such as coding theorists and algorithmically inclined mathematicians. An added incentive was provided by the invention of elliptic-curve cryptosystems in 1985. ...

Entirely new areas of applications have opened up for algebraic curves over finite fields and their function fields in the last five years. These include stream ciphers, hash functions, and authentication schemes in cryptography as well as the construction of low-discrepancy sequences for quasi-Monte Carlo methods. In all these applications, the methods of algebraic geometry have been more successful than classical approaches.

The main aim of this book is to make interested graduate students and researchers conversant with these recent developments, by not only offering a unified exposition of the relevant results and techniques, but also providing the necessary background as far as possible in a limited space.

In den ersten drei Kapiteln werden in knapper, aber sehr übersichtlicher Weise die grundlegenden Tatsachen aus der Theorie globaler Funktionenkörper (d. h. Funktionenkörper über einem endlichen Konstantenkörper) zusammengestellt. Die Stoffauswahl geht hier bereits in vieler Hinsicht über die gängige Literatur hinaus: neben der allgemeinen Klassenkörpertheorie globaler Funktionenkörper (einschließlich des Satzes von Golod-Safarevic) wird besonderes Gewicht auf *explizite* Beschreibungen abelscher Erweiterungen gelegt.

Grundlegende Resultate von Hasse und Weil, Serre und Oesterlé sowie von Drinfeld und Vladut geben obere Schranken für die Anzahl rationaler Stellen eines globalen Funktionenkörpers in Abhängigkeit von dessen Geschlecht, und es ist eine für die später geschilderten Anwendungen zentrale Frage, inwieweit diese Schranken in konkreten Fällen – wenigstens annähernd – erreicht werden können. Dies wird in den Kapiteln 4 und 5 ausführlich erörtert. In Kap. 4 werden insbesondere abelsche Erweiterungen für explizite Konstruktionen globaler Funktionenkörper mit vielen rationalen Stellen herangezogen: Hilbert'sche Klassenkörper, Strahlklassenkörper, zyklotomische Funktionenkörper und ihre Teilkörper, spezielle Kummer- und Artin-Schreier-Erweiterungen. Wie das ausgiebige Tabellenmaterial in Kap. 4 belegt, geben diese Konstruktionen in sehr vielen Fällen die besten bisher bekannten Beispiele für Funktionenkörper mit besonders vielen rationalen Stellen. Kap. 5 ist dem asymptotischen Verhalten des Quotienten $N_q(g)/g$ gewidmet ($g \to \infty$), wobei

$N_q(g)$ die maximale Anzahl rationaler Stellen von Funktionenkörpern vom Geschlecht g über dem Körper $\mathbb{F}_q$ bezeichnet. Es geht also darum, Schranken für die Zahl $A(q) := \limsup_{g\to\infty} N_q(g)/g$ zu finden. Nach Drinfeld-Vladut ist stets $A(q) \leq \sqrt{q} - 1$, das (auch für Anwendungen wichtige) Problem sind untere Schranken für $A(q)$. Einige solcher Schranken, die auf gewissen unendlichen Klassenkörpertürmen beruhen, werden in Kap. 5 dargestellt.

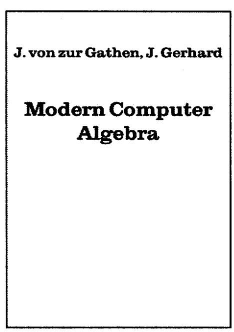
In den nachfolgenden Kapiteln werden diverse Anwendungen globaler Funktionenkörper beschrieben. Kap. 6 ist Goppa's Konstruktion „algebraisch-geometrischer" Codes gewidmet, welche – zusammen mit den asymptotischen Aussagen aus Kap. 5 – zu Verbesserungen der in der Codierungstheorie grundlegenden Gilbert-Varshamov-Schranke geführt hat (Satz von Tsfasman-Vladut-Zink und verwandte Resultate). Darüberhinaus enthält Kap. 6 ein paar weitere – Goppa's Konstruktion verwandte – Code-Konstruktionen.

Eine ganz andere Anwendung finden globale Funktionenkörper in der Kryptographie bei der Konstruktion fast-perfekter Folgen, Hash-Funktionen und Authentikationsschemata (Kap. 7). Schließlich werden Funktionenkörper in Kap. 8 zur Konstruktion von Folgen mit kleiner Diskrepanz verwendet, mit bedeutsamen Anwendungen für quasi-Monte Carlo Methoden. Es ist bemerkenswert, dass in allen diesen – scheinbar weit abliegenden – Gebieten die Theorie der Funktionenkörper erhebliche Verbesserungen der vorher bekannten Resultate gebracht hat.

Das Buch von Niederreiter und Xing gibt einen guten Überblick über den gegenwärtigen Stand in einem besonders aktuellen Forschungsgebiet. Es ist sehr sorgfältig und gut lesbar geschrieben. Naturgemäß können viele Beweise nicht im einzelnen ausgeführt werden, in diesen Fällen werden aber präzise Literaturhinweise gegeben. Das Buch wird daher zu einer unverzichtbaren Referenz für weitere Arbeiten auf diesem Gebiet.

Zum Schluss ein paar kritische Anmerkungen: Nach meinem Eindruck ist die Stoffauswahl zu stark auf die Forschungsbeiträge der beiden Autoren zugeschnitten. So hätten etwa in Kap. 4 auch Konstruktionen von v. d. Geer und v. d. Vlugt dargestellt werden sollen, und auch die Untersuchungen vieler Autoren über maximale Funktionenkörper (das sind solche, bei denen die obere Hasse-Weil-Schranke erreicht wird) hätten etwas mehr Beachtung verdient. Im Gegenzug könnte man auf die speziellen Code-Konstruktionen in Kap. 6.3, 6.4 und 6.5 verzichten. Auch die Tatsache, dass Modulkurven eine bedeutsame Quelle für Funktionenkörper mit vielen rationalen Stellen darstellen (Tsfasman-Vladut-Zink, Ihara, Elkies), hätte zumindest nachdrücklicher erwähnt werden sollen, auch wenn eine ausführliche Behandlung der zugehörigen Theorie im Rahmen dieses Buches nicht möglich war. Trotzdem: dies ist ein sehr empfehlenswertes Buch, das hoffentlich manchen zur weiteren Beschäftigung mit einem schönen und sehr aktuellen Forschungsgebiet anregt.

Essen H. Stichtenoth



J. von zur Gathen
J. Gerhard
Modern Computer Algebra

Cambridge: Cambridge University Press
1999, 754 S., EUR 56,30

Das vorliegende Buch ist ein Lehrbuch, dessen ursprünglicher Ausgangspunkt zahlreiche Vorlesungen des ersten Autors waren. Das Buch ist die zur Zeit (September 2001) aktuellste und umfangreichste Einführung in die mathematischen Aspekte der Computeralgebra. Die Autoren haben drei Ziele:

- Die möglichst vollständige Darstellung der benötigten mathematischen Grundlagen,
- die Analyse der asymptotischen Kosten jedes einzelnen Algorithmus, und
- die Vorstellung asymptotisch schneller Methoden.

Diesem Anspruch werden sie ohne Einschränkung gerecht. Es sind vor allem die letzten beiden Punkte, die das Wort „modern" im Titel des Buches rechtfertigen.

Das Buch enthält 5 Abschnitte, die in insgesamt 24 Kapitel unterteilt sind, und einen Anhang. Jeder Abschnitt trägt den Namen eines berühmten Mathematikers.

Abschnitt I (Euclid) beschäftigt sich zunächst mit der Darstellung und den grundlegenden arithmetischen Operationen von ganzen Zahlen und Polynomen. Insbesondere wird der Euklidische gcd-Algorithmus analysiert. Es folgen Einführungen in die Prinzipien modularer Algorithmen sowie in die Theorie der Resultanten und Subresultanten.

Abschitt II (Newton) befaßt sich mit den Grundlagen schneller Arithmetik: Multiplikation mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation, Division mit Rest und Lösen polynomialer Gleichungssysteme vermöge Newton-Iteration, Auswertung von Polynomen in vielen Punkten und Interpolation, sowie schnelle Methoden für den Euklidischen Algorithmus und die lineare Algebra.

Abschnitt III (Gauss) behandelt vor allem die Faktorisierung univariater Polynome. Zuächst werden Polynome über endlichen Körpern betrachtet. Danach wird erklärt, wie man die Faktorisierung univariater Polynome mit ganzen (rationalen) Koeffizienten auf den Fall endlicher Körper zurückführen kann (Hensel-Liftung, LLL-Algorithmus).

Abschnitt IV (Fermat) befaßt sich mit Primzahltests sowie Algorithmen zur Faktorisierung ganzer Zahlen.

Abschnitt V (Hilbert) behandelt drei verschiedene Gebiete. Er enthält jeweils sehr kurz gehaltene Einführungen in das Konzept der Gröbner-Basen und in die symbolische Integration, sowie eine Einführung in die symbolische Summation.

Im Anhang finden sich grundlegende Definitionen und Notationen aus der Algebra, Wahrscheinlichkeitstheorie und Komplexitätstheorie.

Das in einem klaren Stil geschriebene Buch stellt eine Fundgrube für Studierende und Lehrende da. Jedes einzelne Kapitel enthält zahlreiche Beispiele, Graphiken, Übungsaufgaben und historische Bemerkungen. Die behandelten Algorithmen werden in Pseudocode dargestellt und ausführlich analysiert, praktische Probleme werden angesprochen. Dazu werden Anwendungen etwa in der Kodierungstheorie oder in der Kryptographie vorgestellt. Der Text wird abgerundet durch eine sehr ausführliche, exzellent zusammengestellte Bibliographie. Lösungen zu ausgewählten Aufgaben und Korrekturen finden sich auf der homepage des Buchs (siehe http://www-math.uni-paderborn.de/mca/).

Computeralgebra ist eine zwar junge aber sich schnell entwickelnde Disziplin. Deswegen kann man selbst von einem so umfangreichen Buch nicht erwarten, daß die angesprochenen Themen vollständig abgehandelt werden, bzw. daß alle wichtigen Zweige der Computeralgebra überhaupt angesprochen werden (die Autoren erwähnen einige dieser „shortcomings" in ihrer Einleitung). Aus diesem Grund wird jeder Leser naturgemäß, je nach persönlichem Geschmack und Interesse, das eine oder andere vermissen. Ich selbst bedaure zum Beispiel, daß die Faktorisierung multivariater Polynome im Wesentlichen vollständig ausgeklammert wird, und somit die aktuelle Entwicklung dieses wichtigen Teils der Computeralgebra nach wie vor in keinem Lehrbuch zu finden ist. Eher als Randbemerkung erwähne ich, daß Syzygien in dem Hilbert gewidmeten Kapitel über Gröbner-Basen überhaupt nicht vorkommen (und damit insbesondere die konzeptionelle Grundlage im Beweis des Buchberger-Kriteriums nicht herausgearbeitet wird).

Ich habe mit viel Vergnügen die historischen Bemerkungen gelesen. Dabei habe ich insbesondere gelernt, daß sich viele „moderne“ Ideen bei der Faktorisierung univariater Polynome bereits bei Gauss finden. Auch hier liegt es in der Natur der Sache, daß der einzelne Leser, je nach persönlichen Interessen, einige Dinge anders bewerten mag, oder weitere Ergänzungen zur Verfügung stellen kann. Ich selbst zum Beispiel bin nicht ganz einverstanden mit einigen Einschätzungen im Kapitel über Gröbner-Basen (etwa mit den Notes 21.3).

Da zum Verständnis des Buchs nur Kenntnisse aus der linearen Algebra benötigt werden, kann es als Grundlage für Vorlesungen ab dem dritten Semester dienen. In ihrer Einleitung skizzieren die Autoren mehrere Möglichkeiten zur Stoffauswahl bei ein- oder zweisemestrigen Kursen. Aus den oben bereits genannten Gründen muß man gegebenfalls allerdings auch auf andere Texte oder auf Originalliteratur zurückgreifen. Ich erwähne zwei Beispiele. Während der klassische, wohlbekannte Algorithmus zur distinct degree factorization von Gauss-Arwin ausführlich dargestellt wird, werden moderne blocking-Strategien nur andeutungsweise in den Aufgaben angesprochen. Will man die drei verschiedenen Grundprinzipien modularer Algorithmen etwa am Beispiel der gcd-Berechnung behandeln, so stellt man fest, daß zwar die „big prime“ und „small primes“ Algorithmen, nicht aber die „prime power“ Variante besprochen werden (siehe Tabelle 15.8).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Autoren eine hervorragende Arbeit abgeliefert haben. Das vorliegende Buch ist eine ausgezeichnete Einführung in viele wichtige Grundprinzipien der modernen Computeralgebra, die man jedem Studierenden und Lehrenden ans Herz legen kann. Es ist das einzige Lehrbuch, das den am Anfang genannten Zielen in vollem Umfang gerecht wird. Die angesprochenen „shortcomings“ ergeben sich aus der Unmöglichkeit, den umfangreichen Stoff in einem Lehrbuch darzustellen. Ich wünsche mir, daß die Autoren die Zeit und Kraft finden, um in einem zweiten Band weitere Teilgebiete der Computeralgebra aufzuarbeiten.

Saarbrücken W. Decker

K. Hulek

Elementare Algebraische Geometrie

K. Hulek
Elementare
Algebraische
Geometrie
Vieweg Studium
Aufbaukurs
Mathematik

Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 2000, X + 167 S., EUR 24,–

Wegen ihrer Vielfältigkeit und ihres Abstraktheitsgrades ist der Einstieg in die Algebraische Geometrie im allgemeinen recht mühsam. Insbesondere die allseits bekannten Standardwerke zu diesem Thema sind für einen Anfänger eher demotivierend und ich würde sie keinem Studenten (als Einstieg) empfehlen. So ist es besonders hilfreich, eine Einführung in die Algebraische Geometrie zur Hand zu wissen, die elementar aber nicht oberflächlich ist. Das vorliegende Buch von Klaus Hulek ist ein gutes Beispiel für ein solches einführendes Werk.

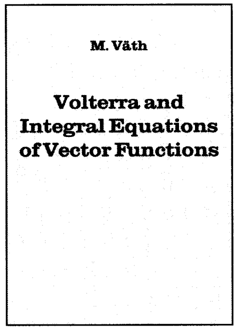
Vorkenntnisse werden kaum erwartet, abgesehen von ein wenig Funktionentheorie und Algebra im einem Umfang, wie man sie von jedem Studenten im Hauptstudium erwarten sollte. Die darüber hinausgehenden Ergebnisse aus der kommutativen Algebra werden größtenteils im Buch selber abgehandelt, in wenigen weiteren Fällen zitiert. Neue Definitionen und Begriffe werden sofort durch die zahlreich vorhandenen Beispiele erhellt. Am Ende jedes Kapitels befinden sich zahlreiche Übungsaufgaben, die zusätzlich dem Verständnis dienen sollen. Die

Klarheit der Darstellung ist sicherlich der Tatsache zu verdanken, daß es sich um die Ausarbeitung einer mehrfach gehaltenen Vorlesung über Algebraische Geometrie an der Universität Hannover handelt. Obwohl auf Garben- und Kohomologietheorie verzichtet wurde, bietet das Buch doch ein für eine Einführung von rund 160 Seiten beachtliches Spektrum an Einblicken in die Algebraische Geometrie:

In den ersten zwei Kapiteln werden in der üblichen Weise affine und projektive Varietäten eingeführt. Kapitel III erklärt Begriffe wie singuläre und glatte Punkte und Dimension. Mit diesem Rüstzeug kann in den folgenden beiden Kapiteln Algebraische Geometrie betrieben werden: Kapitel IV behandelt umfassend ebene Kubiken und Kapitel V diskutiert kubische Flächen, und insbesondere die Konfiguration der 27 Geraden einer glatten kubischen Fläche. Das abschließende sechste Kapitel ist nun wieder allgemeiner gehalten. Es bietet mit Divisoren auf Kurven, dem Satz von Bezout, Linearsystemen und projektiven Einbettungen von Kurven einen Überblick über die Theorie der Kurven.

Zusammenfassend kann ich sagen, dass es sich hier um ein gut lesbares Buch handelt. An manchen Stellen empfinde ich zwar die Beweisführung bzw -anordnung zu verschachtelt, aber das ist Geschmacksache. Ich werde das Buch gerne Studenten als einführende Literatur empfehlen.

Mainz Ch. Birkenhake



M. Väth
Volterra and Integral Equations of Vector Functions
Pure and Applied Mathematics Vol. 224

New York: Marcel Dekker 2000, VI und 349 Seiten, $ 150,–

Zu berichten ist über eine spezielle aber interessante Monographie eines jungen Kollegen. Nachdem Herr Väth uns in einer kurzen Einleitung aufgezeigt hat, welche Probleme sich als Volterra-Integralgleichung für vektorraumwertige Funktionen (unendlich-dimensional!) formulieren lassen, stellt er uns eine umfangreiche Lösungstheorie vor. Es handelt sich um nichtlineare Probleme und natürlich spielen Integrale eine wichtige Rolle. Daher in Kapitel 1 drei Paragraphen Hilfsmittel: Kompaktheit und Fixpunkttheorie (vieles über Nichtkompaktheitsmaße und kondensierende Operatoren), Lesenwertes aus der Maßtheorie, nichts neues, aber doch wie im ganzen Buch stets darauf bedacht, falls möglich auf das Auswahlaxiom zu verzichten, und schließlich ein Paragraph über Idealräume. Dies sind im Prinzip vollständig normierte Räume mit einer Ordnung, die kompatibel mit der Norm ist, d. h. $|x| \leq |y|$ impliziert $||x|| \leq ||y||$. Diese Räume werden später eine wichtige Rolle spielen, sie tragen die „richtige" Struktur.

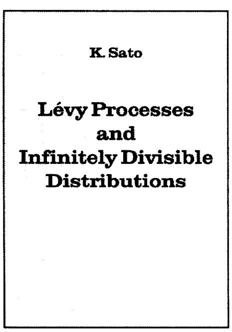
Kapitel 2 liefert eine allgemeine Existenztheorie für Volterra-Operatoren. Wir werden erst mit abstrakten Volterra-Operatoren vertraut gemacht, lernen etwas über lokale Existenztheorie und drei Prinzipien, um lokale Lösungen fortzusetzen. Wichtig: Es folgen viele sehr schöne Anwendungen. Diese allgemeine Theorie handelt mehr oder weniger von abstrakten Volterra-Operatoren in

Ideal-Räumen und stellt manch neues vor, im wesentlichen werden aber die Resultate der Arbeit J. Integr. Equ. Appl. 10 (1998), 319–362, des Autors dargestellt.

Das dritte Kapitel behandelt Integraloperatoren in Banach-Räumen und läßt sich trotz großer Reichhaltigkeit einfach (aber ohne den Inhalt zu schmälern) zusammenfassen: Typische Resultate und Techniken (meist wichtiger) werden auf die Situation unendlich-dimensionaler Räume erweitert, ein einfaches Übertragen geht natürlich nicht – hier muß hart gearbeitet werden. Ein paar Stichpunkte: Carathéodory-Funktionen, Urysohn-Operatoren, Nichtkompaktheitsmaße, Integraloperatoren in Räumen stetiger Funktionen. Das letzte Kapitel behandelt noch die Abhängigkeit von Parametern, das Werk schließt mit einer sorgfältig ausgewählten Bibliographie.

Eine ansprechend geschriebene Monographie liegt vor, und bedenkt man die Fortschritte der unendlich-dimensionalen Analysis in den letzten Jahren, ein Werk, welches vielen Mathematikern recht nützlich sein wird.

Swansea, U.K. N. Jacob



K. Sato
Lévy-Processes and Infinitely Divisible Distributions
Cambridge studies in advanced mathematics Vol. 68

Cambridge University Press,
Cambridge 1999, xii, 486 S., £ 50.00,
ISBN 0-521-55302-4.

Das Studium von Summen unabhängiger Zufallsvariabler ist zentraler Bestandteil jeder Vorlesung über mathematische Stochastik. Ein Höhepunkt ist die Klassifizierung aller möglichen Grenzverteilungen: deren Fouriertransformierte sind von der Form $e^{-\psi(\xi)}$, wobei der Exponent $\psi(\xi)$ durch die Lévy-Khinchine Formel gegeben ist,

$$\psi(\xi) = i\ell \cdot \xi + \xi \cdot Q\xi + \int_{y\neq 0} \left(1 - e^{iy\cdot\xi} + \frac{iy\cdot\xi}{1+|y|^2}\right) \nu(dy), \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

hier sind $\ell \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv semidefinite Matrix und ν das Lévy-Maß mit Träger in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\int_{y\neq 0} \min\{|y|^2, 1\}\,\nu(dy) < \infty$.

Will man sich von der oben beschriebenen diskreten Situation (wir betrachten Partialsummen $S_k, k \in \mathbb{N}$ identisch verteilter und unabhängiger Zufallsvariabler) lösen, dann trifft man auf Zufallsgrößen $X_t, t \geq 0$, die identisch verteilte und unabhängige Zuwächse $X_t - X_s$ haben. Wir sprechen von einem Lévy-Prozeß, wenn zusätzlich $t \mapsto X_t$ stochastisch stetig ist.

So gesehen sind Lévy-Prozesse die einfachsten stochastischen Prozesse mit kontinuierlicher Indexmenge; dennoch ist die Familie der Lévy-Prozesse überaus reichhaltig – prominente Vertreter sind der Poisson-Prozeß, stabile Prozesse und die Brownsche Bewegung – und bildet den Ausgangspunkt für weitgehende Verallgemeinerungen etwa hin zur Theorie der Semimartingale oder der allgemeinen Markovschen Prozesse. Zum Standardrepertoire der meisten Lehrbücher und Vorlesungen gehören oft nur der Poisson-Prozeß und die Brownsche Bewegung. Viele Situationen werden aber besser durch Lévy-Prozesse mit Sprüngen modelliert – zum Beispiel in der Finanzmathematik, wo empirische Studien eine Modellierung der Kurse durch Lévy-Prozesse mit hyperbolischen Verteilungen nahelegen.

Die meisten Monographien, die Lévy-Prozesse behandeln, stammen aus den sechziger und siebziger Jahren. In erster Linie sind das die Klassiker von Lévy (1948/65 – vergriffen) und Gnedenko/Kolmogorov (1949/60 – vergriffen), die Bücher von Skorohod (1961/65

– vergriffen, 1964, 2. Auflage 1986/91 (Preis!)) und Gihman/Skorohod (1965/69, Nachdruck 1996), (1973/75 – vergriffen), die Vorlesungsausarbeitungen von Itô (1961/84, 1969 – beide vergriffen), sowie die Überblicksartikel von Taylor (1973) und Fristedt (1974). Bei den Lehrbüchern sind Breiman (1969, Nachdruck 1992) und Fristedt/Gray (1997) zu nennen, wobei diese aber kaum über die Definition und einfachste Eigenschaften hinausgehen. Nur eine Nebenrolle im Rahmen der Theorie allgemeiner Semimartingale spielen Lévy-Prozesse bei Ikeda/Watanabe (1981/89 – vergriffen), Jacod/Shiryaev (1987) oder Protter (1990). Die bisher einzige moderne Darstellung über Lévy-Prozesse ist die Monographie von Bertoin (1996, besprochen an gleicher Stelle *Jahresbericht der DMV* **101**.1 (1999), 8–10), wo recht speziell die Potentialtheorie und das Fluktuationsverhalten von Lévy-Prozessen behandelt werden – beides Entwicklungen der letzten 25 Jahre.

Die vorliegende Monographie von Sato ist der Versuch einer umfassenden und trotzdem elementaren Darstellung der Theorie der Lévy-Prozesse. Um es kurz zu machen: das Buch wird dieser Herausforderung durchaus gerecht. Ursprünglich erschien es 1990 unter dem Titel *Kahou katei* in japanischer Sprache. Die vorliegende Version ist eine grundlegend überarbeitete und erweiterte Fassung der Erstauflage.

Ausgangspunkt ist der oben skizzierte Ansatz, der Lévy-Prozesse als natürliches Bindeglied zwischen Summen von unabhängigen Zufallsvariablen sowie allgemeinen Markov-Prozessen und Semimartingalen begreift. Das erlaubt einen gut motivierten, direkten Zugang zur Theorie der Lévy-Prozesse und fordert vom Leser relativ bescheidene Vorkenntnisse, wie sie normalerweise in einer Kursvorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“ vermittelt werden; zugleich bleibt der Text auch für nicht-Spezialisten gut lesbar.

Formal gliedert sich das Buch in 10 Kapitel, wobei die ersten fünf Kapitel die Grundlagen der Theorie der Lévy-Prozesse und unbegrenzt teilbaren Verteilungen entwickeln, während die verbleibenden Kapitel ausgewählte Themen behandeln und zu selektivem Lesen einladen. Jedes Kapitel endet mit Übungsaufgaben, die das vorgestellte Material abrunden, und mit Anmerkungen historischer und weiterführender Natur. Alle 168 Übungsaufgaben sind in einem Anhang vollständig gelöst oder aber mit einschlägigen Literaturhinweisen versehen. Besonders hervorzuheben ist auch, daß kein (wesentlicher) Teil des Stoffs dem Leser „zur Übung“ überlassen wird.

Im ersten Kapitel werden kurz grundlegende Definitionen und Sprechweisen wiederholt und die elementaren Beispiele (Poisson-Prozeß, verallgemeinerte Poisson-Prozesse, Brownsche Bewegung) vorgestellt. Der eigentliche Text beginnt in Kapitel zwei, wo die Existenz von Lévy-Prozessen und additiven Prozessen (diese zeichnen sich durch unabhängige, aber nicht notwendig stationäre Zuwächse aus) mittels der klassischen Kolmogorov-Konstruktion bewiesen wird. Zentrales Resultat ist die Aussage, daß jeder unbegrenzt teilbaren Verteilung ein Lévy-Prozeß zugeordnet werden kann, sowie deren (triviale) Umkehrung. Hier findet sich auch ein analytischer Beweis der Lévy-Khinchine Formel in $\mathbb{R}^n$ und die Behandlung der Übergangshalbgruppen von Lévy-Prozessen. Spezielle Lévy-Prozesse, insbesondere Prozesse mit stabilen oder semi-stabilen Verteilungen, Prozesse mit selbstähnlichen Pfaden und sogenannte *self-decomposable processes,* werden in Kapitel 3 besprochen. Diese Verteilungen sind empirisch wichtig, sie haben gute Skalierungseigenschaften, und ihre theoretische Bedeutung verdanken sie der Tatsache, daß sie genau als Grenzverteilungen von Summen $b_k(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) + c_k$, $k \in \mathbb{N}$, $b_k, c_k \in \mathbb{R}^n$, von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren auftreten – und sich auch als solche realisieren lassen. Später wird immer wieder auf konkrete Beispiele aus diesem Kapitel zurückgegriffen. Kapitel 4 ist der grundlegenden Lévy-Itô-Zerlegung der Trajektorien eines Lévy-Prozesses gewidmet. Diese besagt, daß ein typischer Pfad aus der Superposition einer deterministischen linearen Funktion (Drift), einem Brownschen Pfad (mit Kovarianzmatrix Q), und einem reinen Sprungprozeß entsteht. Der Sprungprozeß ist die (ggf. kompensierte) Summe aller Sprünge, wobei Sprungzeiten und -höhen durch ein Poisson-Zufallsmaß festgelegt sind; als Intensitätsmaß tritt dabei $dt \otimes \nu(dy)$ auf. Die pfadweise Darstellung des Lévy-Prozesses erlaubt es, stochastische Eigenschaften des Prozesses auf die sogenannte Lévy-Charakteristik (ℓ, Q, ν) aus der Darstellung von $\psi(\xi)$, und letzten Endes auf die Fouriertransformation von X_t, zurückzuführen. Dieser Ansatz geht auf Bochner (1955) zurück. In Kapitel 5, *Distributional Properties of Lévy Processes*, wird das an Hand des Trägers, von verallgemeinerten Momenten und Glattheitseigenschaften eines Prozesses illustriert.

Dieser Einführung in die Theorie schließen sich auf etwa 200 Seiten weitere fünf Kapitel an, die jedoch (abgesehen von Teilen von Kapitel 9 über Wiener-Hopf-Methoden) unabhängig voneinander gelesen werden können. Im einzelnen werden die Themen Subordination und Dichtetransformation (Kapitel 6), Rekurrenz- und Transienzverhalten (Kapitel 7), probabilistische Potentialtheorie (Kapitel 8), Wiener-Hopf-Zerlegungen (Kapitel 9) sowie Uni- und Multimodalität von unbegrenzt teilbaren Verteilungen (Kapitel 10) behandelt. Die Auswahl der Themen ist einigermaßen subjektiv – das gesamte Spektrum von Lévy-Prozessen ließe sich in einem einzigen Band nicht behandeln – und viele interessante Themen sind ausgeklammert, etwa Aspekte der stochastischen Analysis. Die Forschungsinteressen des Autors spiegeln sich vor allem in den Abschnitten 6, 7 und 10 wieder, wo viele Originalbeiträge vom Autor selbst stammen. Im Kapitel über Subordination findet sich auch eine (leider sehr) kurze analytische Behandlung von Lévy-Erzeugern und dem mit Subordination zusammenhängenden Funktionalkalkül. Fragen der Transienz und Rekurrenz von Lévy-Prozessen erscheinen nun zum ersten Mal in Buchform, wobei auch hier kein Beweis des Spitzerschen Rekurrenzkriteriums geführt wird. (Dafür dürfte jeder, der die Arbeiten von Port & Stone (1971) kennt, Verständnis aufbringen!). Das Kapitel über Potentialtheorie, das für die englische Ausgabe neu geschrieben wurde, ist stark von Bertoin (1996) beeinflußt; es ist aber keinesfalls deckungsgleich mit dessen Darstellung. Die Methodik ist elementarer und betrachtet oft die Absolutstetigkeit der Halbgruppe oder der Resolventenfamilie. Ähnliches gilt für das Kapitel über Wiener-Hopf-Methoden, wo Sato auf Grenzwertsätze für zufällige Irrfahrten zurückgreift und somit Resultate der Exkursionstheorie vermeidet.

Das Buch ist weder Lehrbuch noch ausgesprochene Forschungsmonographie, vielmehr ein großangelegter Überblick und zugleich eine solide Einführung in einen Teilbereich der Stochastik, der gerade in den Anwendungen an Bedeutung gewinnt. Als Vorlesungstext ist das Buch wohl nicht geeignet, dazu ist die Darstellung zu facettenreich; auch wird dem Leser keinerlei Hilfe bei der Auswahl des Materials geboten. Für ein Selbststudium hingegen scheint mir Satos Buch fast ideal zu sein, und mit ein wenig Muße erhält man auf den ersten 150 Seiten eine grundsolide und mit vielen Beispielen illustrierte Einführung in die Theorie der Lévy- und Markovprozesse. Hervorzuheben ist die gut durchdachte und überaus präzise Aufarbeitung des Stoffes. Die Beweise sind stets vollständig, in allen Schritten gut nachvollziehbar und sämtliche Techniken, die über die eingangs erwähnten Voraussetzungen hinausgehen, werden im Text entwickelt. Des Autors Könnerschaft und Liebe zum Detail äußert sich auf fast jeder Seite des Buchs, in der Reichhaltigkeit der Beispiele, Aufgaben und Bemerkungen. Als große Leistung darf die 536 Einträge umfassende Bibliographie gelten, die Originalarbeiten aus mehr als fünf Jahrzehnten verzeichnet; und weil dort auf die Textstellen hingewiesen wird, wo die jeweilige Quelle zitiert ist, wird sie zum wertvollen Hilfsmittel. Daß der Text selbst äußerst sorgfältig aufbereitet ist und sich auf weit über 400 Seiten nur einige wenige Druckfehler finden, versteht sich nunmehr von selbst.

Ein Wermutstropfen mag sein, daß das Buch ein wenig altmodisch ist, indem es sich ganz auf klassische Fragen der Theorie der Lévy-Prozesse beschränkt und auf neuere Entwicklungen der stochastischen Analysis nicht eingeht. Auch nach Satos eindrucksvollem Werk fehlt in der Literatur eine gute, kurzgefaßte Einführung in das Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen und Lévy-Prozesse.

Dennoch: Die vorliegende Monographie wird auf lange Zeit den Standard setzen, der schwer zu übertreffen sein wird. Satos Buch gehört in jede wissenschaftliche Bibliothek und auf den Schreibtisch jedes Wahrscheinlichkeitstheoretikers.

Literatur

Bertoin, J.: *Lévy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge: 1996.

Bochner, S.: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Univ. of California Press, Berkeley: 1955 (Neuauflage 1960).

Breiman, L.: *Probability*, Addison-Wesley, Reading (MA): 1968 (Nachdruck SIAM, Philadelphia: 1992).

Fristedt, B.: Sample function behavior of stochastic processes with stationary, independent increments. In: P. Ney, S. Port (Hg.): *Advances in Probability, vol. 3*, M. Dekker, New York: 1974.

Fristedt, B.; Gray, L.: *A Modern Approach to Probability Theory*, Birkhäuser, Boston (MA): 1997.

Gihman, I .I.; Skorohod, A. V.: *Introduction to the Theory of Random Processes*, Saunders, Philadelphia: 1969 (russ. Original Nauka, Moskau: 1965, engl. Nachdruck Dover, Mineola (NY): 1996).

Gihman, I. I.; Skorohod, A. V.: *The Theory of Stochastic Processes II*, Springer, Berlin 1975 (russ. Original Nauka, Moskau: 1973).

Gnedenko, B.W.; Kolmogorov, A.N.: *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen*, Akademie-Verlag, Berlin: 1960 (russ. Original Gostechizdat, Moskau: 1949).

Ikeda, N.; Watanabe, S.: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Kodansha/North Holland, Tokyo/Amsterdam: 1989 (erste Aufl. 1981).

Itô, K.: *Lectures on Stochastic Processes*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay: 1961 (Neuaufl. Springer, Berlin: 1984).

Itô, K.: *Stochastic Processes*, Univ. Aarhus Lecture Note Series **16**, Aarhus: 1969.

Jacod, J.; Shiryaev, A.N.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, Berlin: 1987.

Lévy, P.: *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris: 1965 (erste Aufl. 1948).

Protter, P.: *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin: 1990.

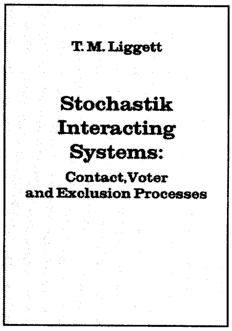
Sato, K.: *Kahou katei*, Kinokuniya, Tokyo: 1990.

Skorohod, A. V.: *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley, Reading (MA): 1965 (russ. Original Universitätsverlag Kiew, Kiew: 1961, Nachdruck Dover, New York: 1982).

Skorohod, A. V.: *Random Processes with Independent Increments*, Kluwer, Dordrecht: 1991 (erste russ. Aufl. Nauka, Moskau: 1964, zweite überarbeitete Aufl. Nauka, Moskau: 1986).

Taylor, S. J.: Sample path properties of processes with stationary independent increments. In: D.G. Kendall, E.F. Harding (Hg.): *Stochastic analysis*, Wiley, New York: 1973.

University of Sussex R. Schilling



T. M. Liggett
Stochastik Interacting Systems:
Contact, Voter and Exclusion Processes

Springer Verlag 1999 (Grundlehren Band 324), xii + 332 S., US $ 99,–

Der *Neue Liggett* muss sich an dem mittlerweile klassischen Buch von Liggett *Interacting Particle Systems*, kurz IPS, das 1985 erschienen ist, messen lassen. Letzteres ist ein, wenn nicht das, Standardwerk für Stochastische Wechselwirkende Teilchensysteme. Es hat gewiss die Verbreitung gefunden, die H.O. Georgii ihm in seiner Besprechung für die Jahresberichte der DMV gewünscht hatte. IPS fasste den Stand der Forschung einiger Wechselwirkender Teilchensysteme im wesentlichen vollständig zusammen.

In den fünfzehn Jahren seit dem Erscheinen von IPS hat sich dieser Bereich der Mathematik rasant entwickelt. Das vorliegende Buch stellt einige wichtige Aspekte dieser Entwicklung für drei ausgewählte Prozesse, diejenigen, die im Titel genannt sind, dar. Das Buch ist in drei Kapitel gegliedert, in denen jeweils einer der angegebenen Prozesse behandelt wird. Jedes Kapitel schließt mit einem Abschnitt, in dem weiterführende Ergebnisse und Literatur angegeben werden. Hier finden sich auch Hinweise auf Themen, auf die im Hauptteil nicht (oder nur am Rande) eingegangen wird, beispielsweise Okkupationszeiten, quantitative Clusteranalyse, Reskalierung von Prozessen zu maßwertigen Diffusionen oder Lösungen stochastischer partieller DGLen. Vor den eigentlichen drei Kapiteln wird der Leser mit einem Schatz an technischen Hilfsmitteln vertraut gemacht.

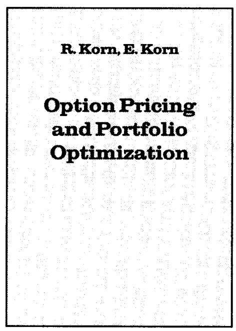
Der Kontaktprozess ist ein Epidemiemodell, bei dem Positionen in einem Ortsraum mit je einem Individuum besetzt sind, welches wiederum entweder krank oder gesund ist. Kranke Individuen gesunden mit Rate 1 und stecken mit Rate λ (dem Infektionsparameter) gesunde Nachbarn an. Wird als Ortsraum das d-dimensionale Gitter gewählt, so existiert bekanntlich für wachsende λ ein Phasenübergang zwischen Aussterben und Überleben der Infektion. Das Ergebnis von Bezuidenhout und Grimmett, dass der Phasenübergang von erster Art ist, also der Kontaktprozess am kritischen Wert ausstirbt, wird ausführlich behandelt. Der Rest des Kapitels ist der Situation gewidmet, wo der Ortsraum ein homogener Baum mit drei oder mehr Nachbarn pro Knoten ist. Es wird gezeigt, dass zwei Phasenübergänge bei $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > \lambda_1$ auftreten: für $\lambda < \lambda_1$ stirbt die Infektion (die mit einem Infizierten startet) aus. Für $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ überlebt die Infektion (mit positiver Wahrscheinlichkeit) global, jedoch nicht lokal. Schließlich für $\lambda > \lambda_2$ überlebt die Infektion auch lokal.

Beim Wählermodell gibt es Individuen, die in einem abzählbaren Ortsraum an festen Stellen sitzen und entweder die Meinung 0 oder 1 haben. Mit Rate 1 vergisst ein Individuum seine Meinung und nimmt eine neue an. Dieser Mechanismus ist symmetrisch in den Meinungen und opportunistisch, insofern als dass mehr Nachbarn einer Meinung die Entscheidung zu eben dieser Meinung hin beeinflussen. Eine Meinung, die unter den Nachbarn nicht vertreten ist, kann nicht angenommen werden (das schließt beispielsweise das stochastische Ising Modell aus). Der klassische Vertreter ist das lineare Wählermodell, bei dem die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Meinung proportional zu der Anzahl der Nachbarn mit dieser Meinung ist. Im allgemeinen Fall ist die bei diesem Modell so nützliche Dualität zu verschmelzenden Irrfahrten nicht vorhanden, sodass die Analyse ungleich schwerer ist und die Ergebnisse unvollständiger. Im *neuen Liggett* wird das sogenannte Schwellenwert Wählermodell im d-dimensionalen Gitter betrachtet: Sind in der Nachbarschaft $x + \mathcal{N}$ des Punktes x wenigstens T (der Schwellenwert) Individuen im Diskonsens mit x, so ändert x seine Meinung mit Rate 1, andernfalls gar nicht. Es werden Kriterien für Fixierung (x behält eine Meinung schließlich bei), und Clusterbildung hergeleitet. Für $T = 1$ wird durch Vergleich mit dem sogenannten Schwellenwert Kontaktprozess gezeigt, dass im Langzeitverhalten lokale Meinungsunterschiede möglich sind, falls $d \neq 1$ oder $\mathcal{N} \neq \{-1, 1\}$.

Im dritten Kapitel wird der asymmetrische Ausschlussprozess auf den ganzen Zahlen betrachtet. Ist x mit einem Teilchen besetzt, so springt es mit Rate $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ nach $x + 1$, mit Rate $1 - p$ nach $x - 1$, jedoch wird der angestrebte Sprung unterdrückt, falls der Zielpunkt bereits besetzt ist. So treten keine Mehrfachbesetzungen auf. Die Teilchen werden grundsätzlich als ununterscheidbar betrachtet. Bereits in IPS wurden die invarianten Maße vollständig beschrieben. Hier wird das Langzeitverhalten untersucht für die asymmetrische Anfangssituation wo (unabhäangig voneinander) Stellen $x \leq 0$ mit Wahrscheinlichkeit $\lambda \in [0, 1]$ und $x \geq 1$ mit Wahrscheinlichkeit $\rho \in [0, 1]$ besetzt sind. Es ergibt sich ein reiches Phasendiagramm, das zunächst erstaunt, aber durch die Schock-Lösungen der Burgers'schen Differentialgleichung verständlich wird. Die Analyse wird verfeinert durch die Betrachtung eines markierten Teilchens an der Schockstelle. Die Gleichgewichtszustände des asymmetrischen Kontaktprozesses auf einer endlichen Menge werden mit Hilfe des sogenannten Matrix Zugangs untersucht. Schließlich wird der Ausschlussprozess auf dem mehrdimensionalen Gitter betrachtet. Ein markiertes Teilchen erfüllt das Gesetz der Großen Zahl sowie den Zentralen Grenzwertsatz mit den üblichen Skalierungen. Dies ist vor allem vor dem Hintergrund interessant, dass die Bewegung eines markierten Teilchens im eindimensionalen symmetrischen Ausschlussprozess (mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung) bekanntlich subdiffusiv ist.

Das Buch ist exzellent geschrieben. Die Beweise sind treffsicher formuliert und bis ins Detail optimiert. Der knappe Stil setzt eine weitläufige Bekanntschaft mit dem Thema voraus. (Leider sind trotzdem einige Beweise beim jetzigen Stand der Forschung noch sehr technisch und umfangreich.) Auch die häufigen Verweise auf IPS lassen die Vertrautheit des Lesers mit Liggetts klassischem Buch wünschenswert erscheinen. Mehr Abbildungen hätten das Verständnis an einigen Stellen erleichtern können. Das Buch ist empfehlenswert für alle, die an neueren Entwicklungen bei Wechselwirkenden Teilchensystemen interessiert sind.

Erlangen A. Klenke



R. Korn, E. Korn
Option Pricing and Portfolio Optimization
Grad. Studies in Math. 31

Providence, American Mathematical Society, 2000, 253 S., \$ 39.–

Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: Moderne Methoden in der Finanzmathematik, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg, 2. Aufl. 2001, 294 S., EUR 26,–

This English translation of an originally German book gives an introduction to financial mathematics in the context of a complete multidimensional Itô process setting. It presupposes a solid first course in probability, including conditional expectations but not necessarily stochastic processes. From that basis, the book develops and proves all the main results in stochastic analysis it requires for theory and applications in financial mathematics. This is possible since the authors deliberately restrict themselves to the setting of Itô processes over a Brownian filtration.

(One caveat on unusual terminology: a stochastic process in this book is by definition adapted.)

An outline of the contents is as follows. After a short introductory chapter on the static Markowitz mean-variance problem, chapters II and III study the general multidimensional Itô process model for d risky assets driven by m Brownian motions and with random coefficients r, b, σ. A number of excursion sections on martingales, stochastic integration, Itô's formula, Itô's martingale representation theorem, Girsanov's theorem and the Feynman-Kac formula form the theoretical basis for a solid treatment of option pricing and hedging in the case of a complete market ($d = m$ and σ nonsingular). This part is very well written with detailed proofs for most results. In addition to the martingale and PDE approaches to the pricing of European options, there are sections on American options, on numeraire invariance and on some aspects of the theory for the general incomplete case. Still in the complete market setting, chapter V explains how to solve the portfolio problem of maximizing expected utility from consumption and terminal wealth by means of the martingale approach. In addition, stochastic control methods are presented and used there to obtain explicit solutions for the same problem with power utility and constant coefficients in a possibly incomplete market. As in the preceding chapters, the required theoretical results are developed in excursion sections that can be read independently. Chapter IV first lists a number of exotic options (digitals, gap options, compound options, options on the minimum or maximum of two assets, barrier options, lookback options) for which explicit valuation formulae are known in the case of constant coefficients, and then discusses in detail some numerical approaches to computing option prices. The emphasis here is on probabilistic methods (Monte Carlo, binomial/trinomial trees, the Rogers/Stapleton modification of the binomial scheme) as opposed to the numerical solution of PDEs; the latter possibility is mentioned, but not treated in any detail. Each chapter ends with a number of exercises.

On the whole, this book provides a solid and detailed basis for a first course in continuous-time financial mathematics with a focus on option pricing and optimization problems. (Perhaps one should add here that interest rate theory and products are never mentioned at all.) The emphasis is more on mathematics than on finance, but the underlying economic concepts are all well explained and the treatment is largely self-contained. The Itô process setting is of course a restriction, but still reasonable in view of the authors' goal to prove all the theoretical results they use. However, there is one point where I personally found the presentation not completely satisfactory. In my opinion, the book lacks some sort of a general high-level overview. Apart from the rather short section III.6, the reader gets hardly any impression of the rich theory beyond the complete market setting, and even the references for further reading are not really up-to-date; this is especially notable in chapter V on optimal portfolios where convex duality methods are never even mentioned. At times, there is also a slight tendency to emphasize details more than the key ideas. But in combination with another more broadly oriented text out of the many recent books on financial mathematics, this book should be very useful for students and teachers alike due to its self-contained structure.

References

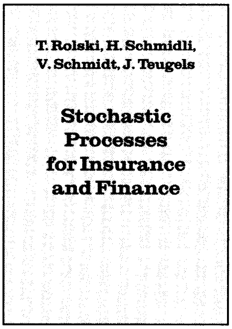
R. J. Elliott and P. E. Kopp (1999), "Mathematics of Financial Markets", Springer

P. J. Hunt and J. E. Kennedy (2000), "Financial Derivatives in Theory and Practice", Wiley

R. Korn and E. Korn (1999), "Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung", Vieweg

A. N. Shiryaev (1999), "Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory", World Scientific

TU Berlin M. Schweizer



T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels
Stochastic Processes for Insurance and Finance

Chichester u. a.: John Wiley and Sons 1999, 654 S., £60,–

Wie die Autoren selbst schreiben, ist dieses Buch als Einführungskurs in die stochastische Modellierung für fortgeschrittene Studenten mit Kenntnissen in Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, Versicherungsmathematik oder Finanzmathematik gedacht. Von seinem Titel her ist klar, daß es um Modellierung für versicherungs- und finanzmathematische Zwecke geht. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Ruintheorie, das heißt auf Aussagen zu Ruinwahrscheinlichkeiten von Versicherungsportfolios. Leitschnur für die Autoren ist, eine Darstellung der Ruintheorie von den Grundlagen bis zum aktuellen Forschungsstand zu entwickeln und, wo es möglich ist, die dazu vorgestellten Techniken auch auf andere versicherungsrelevante Themen anzuwenden.

Das Buch beginnt mit dem Kapitel „Concepts from Insurance and Finance", in dem grundlegende Begriffe und Probleme informell vorgestellt werden, um die Leserschaft „von der Notwendigkeit der mathematisch fundierten Behandlung im Rest des Buchs zu überzeugen". Dieses einführende Kapitel bietet zugleich einen Überblick über die inhaltlichen und methodischen Zusammenhänge der verschiedenen Teile des Buches. Darauf folgt ein Kapitel „Probability Distributions", das wichtige Eigenschaften zu einigen der benötigten Verteilungen bereitstellt. Einen Großteil des Kapitels nehmen die „heavy tails" ein, denen auch der einzige Abschnitt („Detection of Heavy-Tailed Distributions") des Buches mit statistischem Inhalt gewidmet ist. Das knapp gehaltene dritte Kapitel gibt einen Einblick in Prämienkalkulationsprinzipien und elementare Aspekte von Rückversicherungsverträgen, die danach jedoch nur sporadisch wiedererwähnt werden.

Die Kapitel 4 bis 6 stellen den erneuerungstheoretischen Ansatz des Ruinproblems dar. Dabei werden zunächst in Kapitel 4 Methoden zur exakten und approximativen Berechnung von Gesamtschadensverteilungen im individuellen und kollektiven Risikomodell sowie erste Abschätzungen vom Lundberg-Typ für Ruinwahrscheinlichkeiten diskutiert. In Kapitel 5 werden Gesamtschadens- und Risikoprozeß eingeführt und im Rahmen des Poissonmodells analysiert. Exemplarisch werden hier die Probleme betrachtet, die in den folgenden Kapiteln noch mehrmals mit anderen Techniken wiederaufgegriffen werden: Lundberg-Abschätzungen und Cramér-Lundberg-Approximation der Ruinwahrscheinlichkeiten für exponentielle Verteilungsenden der Einzelschadensverteilungen sowie Asymptotik im Falle von subexponentiellen Verteilungsenden. Kapitel 6 greift diese und weitere Fragen für allgemeine Verteilungen der Abstände zwischen den Schadensereignissen wieder auf. Grundlage dafür ist eine umfassende Darstellung der benötigten Erneuerungstheorie und einiger Fakten über Irrfahrten.

Als nächste Technik führen die Autoren in den Kapiteln 7 und 8 Markov-Ketten mit abzählbarem Zustandraum ein. Der zeitdiskrete Fall im Kapitel 7 ist vor allem Grundlage und Motivation des zeitstetigen Falls im nachfolgenden Kapitel, wird aber auch auf die Analyse von Bonus-Malus-Systemen bei Prämien angewendet. Der zeitstetige Fall dient der Einführung von Phasen-Typ-Verteilungen für die Zeiten zwischen den Schadensereignissen, einer ersten Einbeziehung von Verzinsung in den Gesamtschadensprozeß mittels inhomogenen Markov-Ketten und der Diskussion von gemischten Poisson-Prozessen als Schadensanzahlprozessen.

Kapitel 9 und 10 liefern Grundlagen der zeitdiskreten beziehungsweise zeitstetigen Martingaltheorie. Ein Schwerpunkt liegt auf der Beschreibung von Maßwechseln. Mittels Optional-Sampling und Doobscher Ungleichung werden direkt Abschätzungen für Ruinwahrscheinlichkeiten angegeben. Wesentliche Anwendungen finden die Martingalmethoden in Kapitel 11 über stückweise deterministische Markov-Prozesse mit stetigem Zustandsraum. Sie werden hier zunächst zur Definition des erweiterten Generators gebraucht, aber auch in Form exponentieller Martingale für Maßwechsel. Der Bezug zur Ruintheorie entsteht durch das Wiederaufgreifen und Erweitern verschiedener, in den vorhergehenden Kapiteln bereits behandelter Risikomodelle.

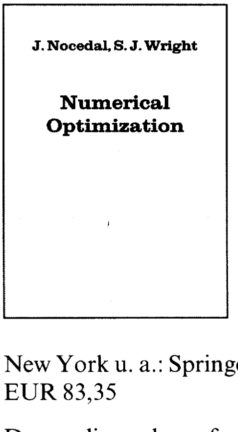
Kapitel 12 gibt eine ausführliche Einführung und Übersicht der Theorie der Punktprozesse. Sie erlaubt es, weitere Aspekte wie Markov-Modulierung, Periodizität und Clusterbildung im Risikoprozeß zu beschreiben. Außerdem finden alle Techniken, die vorher besprochen wurden, hier Verwendung. Das Buch endet mit einem kurzen Kapitel über Diffusionen und ihre Verwendung bei gestörten Risikoprozessen und zur Preisstellung bei Finanzderivaten. Letztere werden in Zusammenhang mit Prämien für Fonds-gebundene Lebensversicherungen angesprochen.

Mit Ausnahme der Kapitel 2, 3 und 13 gibt das Buch eine recht ausführliche Darstellung der behandelten Themen. Die Formulierungen der Ergebnisse sind immer exakt, und für die meisten sind Beweise angegeben. Die ausführlichen Literaturangaben am Ende fast jeden Abschnitts geben im Falle ausgelassener Beweise Quellen an und verweisen auch sonst auf Urheberschaften und weiterführende Arbeiten. Aufgrund der gelungenen Darstellung des Stoffs kann jedoch an den meisten Stellen ohne Folgen für das grundsätzliche Verständnis auf das Nachlesen in der Literatur verzichtet werden. Insbesondere in den Kapiteln 9 bis 12 finden sich einige bisher noch unveröffentlichte Resultate. In den Kapiteln 4 bis 8 werden verschiedene numerische Algorithmen besprochen, die durch Zahlenbeispiele illustriert sind. Eine Einschätzung der Rechengenauigkeit wird in vielen Fällen dadurch möglich, daß auch weniger bekannte explizite Lösungsformeln zu einigen nicht-trivialen Beispielen präsentiert werden.

In Anbetracht des Umfangs des Buches ist es wenig verwunderlich, daß nicht die gesamte Versicherungsmathematik abgedeckt wird. Insbesondere enthält das Buch nichts zur Modellierung von IBNR-Schäden (IBNR = incurred but not reported) oder zu Erfahrungstarifierung (credibility theory). Wie angedeutet erscheint es auch fraglich, ob das Kapitel zur Finanzmathematik für nicht Vorbelastete verständlich ist. Erwähnt werden sollte, daß die Autoren nicht auf betriebswirtschaftliche Fragen eingehen, weshalb mangels Kriterien auch Optimierungsprobleme nicht angeschnitten werden.

Insgesamt dürfte sich das vorliegende Buch als sehr geeignete Grundlage von Lehrveranstaltungen mit Bezug zur Ruintheorie erweisen, kann aber auch zum Selbststudium benutzt werden. Darüber hinaus könnte es als Nachschlagewerk sowohl für die Forschung wie auch für vorgebildete Praktiker Verwendung finden.

München D. Tasche



J. Nocedal, S. J. Wright
Numerical Optimization
Springer Series in Operations Research

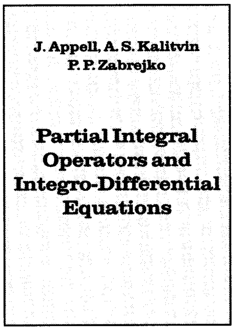
New York u. a.: Springer 1999, 636 S., EUR 83,35

Das vorliegende umfangreiche Buch gibt einen großen Überblick über numerische Verfahren der kontinuierlichen Optimierung. Es werden Methoden zur Lösung linearer, quadratischer und allgemein nichtlinearer Optimierungsprobleme beschrieben. Dieses Buch wendet sich an Studenten und Praktiker, die Optimierungsverfahren einsetzen möchten.

Nach einer Einführung in Fragestellungen der Optimierung und einem Kapitel über Grundlagen der unrestringierten Optimierung werden Methoden der eindimensionalen Minimierung und Trust-Region-Verfahren detailliert beschrieben. In der unrestringierten Optimierung bilden das Verfahren konjugierter Gradienten, Newton-Verfahren und Varianten, Quasi-Newton-Verfahren und Methoden der nichtlinearen Ausgleichsrechnung und zur Lösung nichtlinearer Gleichungen Schwerpunkte der Darstellung. Allerdings wird auch die Frage der Berechnung von Ableitungen und die Bearbeitung großer Probleme näher untersucht. Die beiden Kapitel zur linearen Optimierung sind dem Simplex-Verfahren und den Innere-Punkte-Methoden gewidmet. Die quadratische Optimierung ist Thema eines Kapitels. Die Theorie der restringierten Optimierung wird in einem Kapitel behandelt, und es werden Grundlagen zu den Verfahren der nichtlinearen restringierten Optimierung bereit gestellt. Penalty-, Barriere-, Multiplikatoren- und SQP-Verfahren werden ausführlich beschrieben. Zwei Anhänge mit mathematischen Grundlagen und ein umfangreiches Literaturverzeichnis runden die 18 Kapitel dieses Buches ab.

Die Theorie und die Verfahren sind in diesem Buch sehr ausführlich dargestellt. Die Algorithmen sind im Programmierstil präsentiert und lassen sich damit unmittelbar auf einen Rechner übertragen. Die vielen Abbildungen dienen dem besseren Verständnis der Verfahren. Am Ende fast jedes Kapitels finden sich Übungsaufgaben zur Vertiefung des Stoffs. Neben den klassischen Methoden der kontinuierlichen Optimierung fließen auch durchaus moderne Fragestellungen in dieses Buch ein. Wegen der Breite der Darstellung eignet es sich nicht nur für Mathematiker sondern auch für mathematisch interessierte Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler.

Erlangen J. Jahn



J. Appell, A. S. Kalitvin
P. P. Zabrejko
Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations
Pure and Applied Mathamatics, vol. 230

New York, Marcel Dekker 2000, 560 S., \$ 195,–

Um den Inhalt der vorliegenden Monographie beschreiben zu können, benötigen wir zwei etwas längere Formeln:

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_a^b k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s) \qquad (1)$$

und

$$Px(t,s) := c(t,s)x(t,s) + \int_T \ell(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_T\int_S n(t,s,\tau,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma d\tau \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) wurde zuerst von E.A. Barbaschin studiert, heißt also folgerichtig Barbaschin-Gleichung, ihr sind zwei von 4 Kapiteln des Buches gewidmet. Die Gleichung (2) ist eine partielle Integralgleichung, steht in enger Beziehung zu (1) und ihr ist

Kapitel 3 gewidmet. In Kapitel 4 begegnen wir (nichtlinearen) Verallgemeinerungen der Gleichungen (1) und (2) und vor allem vielen Anwendungen der zuvor entwickelten Theorie: Trotz der viele Anwendungen gibt es bisher keine die Theorie zusammenfassende Monographie. Damit füllen die Autoren eine empfindliche Lücke in der mathematischen Literatur. Beachtet man noch zusätzlich die Tatsache, daß der überwiegende Teil der Forschungsarbeiten von Kollegen aus der ehemaligen Sowjetunion stammt und die meisten Arbeiten in Russisch publiziert und oft nicht übersetzt wurden, schulden wir den Autoren auch Dank, daß sie uns diesen Teil der mathematischen Literatur systematisch erschließen. Wie nicht anders vom Autoren-Team Appell-Zabrejko (-Koautoren) zu erwarten, geschieht dies obendrein in einer sehr sorgfältigen aber immer lesbar bleibenden Art – kurz, es liegt ein wichtiges Werk vor.

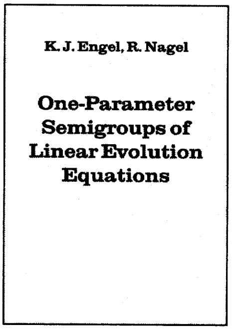
Nun ein wenig mehr noch zum Inhalt: Kapitel 1 studiert die Gleichung (1) in dem sie zuerst als eine Gleichung in einem Banach-Raum formuliert wird, dann werden konkrete Banach-Räume betrachtet: C-Räume, L^p-Räume und Idealräume (dies sind Banach-Räume (reeller) Funktionen, die die Eigenschaften haben, daß $x \in X$ und $|z| \leq |x|$ implizieren, daß $z \in X$ und $||z|| \leq ||x||$ gelten). In diesem Kapitel werden vor allem Existenz- und Eindeutigkeitsfragen diskutiert.

Kapitel 2 behandelt nun die qualitative Theorie: Stabilität von Lösungen, Parameterabhängigkeit, periodische Lösungen und Randwertprobleme.

In Kapitel 3 wird nun die Theorie der Gleichung (2) dargestellt. Es werden Abbildungseigenschaften in verschiedenen (schon erwähnten) Banach-Räumen, aber auch Orlicz-Räumen studiert, Spektralprobleme untersucht und Anmerkungen zu klassischen Integralgleichungen (Fredholm- und Volterra-Gleichungen) gemacht. Schließlich nimmt Kapitel 4 einige Verallgemeinerungen vor, auch zu nicht-linearen Gleichungen hin, und diskutiert die Newton-Kantorovich-Methode, um diese Gleichungen zu lösen. Es folgen über 80 Seiten sehr konkreter Anwendungen, innermathematischer Natur, aber auch aus Biologie, Physik, Astrophysik und Mechanik.

Man muß es wiederholen: Ein wertvolles und gut geschriebenes Buch. Pflichtlektüre für alle Analytiker, die diese Gleichungen lösen wollen, aber auch für alle Anwender, die mittels Gleichungen modellieren möchten.

Swansea N. Jacob



K. J. Engel, R. Nagel
One-Parameter Semigroups of Linear Evolution Equations
Graduate Texts in Mathematics, Vol. 194

Springer Verlag 98463-2000, xxi + 586 Seiten, Preis EUR 59,52

This book is a continuation of a series of monographs on one-parameter semigroups such as these of Hille-Yosida, Hille-Philips, Davies, Goldstein, Pazy, van Casteren, McBride, Clement et. al., Vesentin and others. It is devoted to strongly continuous semigroups of bounded linear operators with the final objective to treat many different evolution equations.

It is not a research book although it contains a series of recent results in this field. It is an introduction to the theory of semigroups in a direction of emphasizing the spectral theoretical point of view, which implies several qualitative properties of the semigroups and their generators and allow a large variety of applications.

The book is devoted to students on a higher level, to graduate students and to mathematicians or physicists who are interested in semigroup theory, in spectral theory, or in the theory of evolution equations.

The book is well written. Its quality was also increased during the TULKA-Internet seminars (1997–1999), where several students have checked some of the chapters. It contains a sufficient number of instructive examples in every chapter. One can follow the red line of the book because some of the examples are treated also in further chapters. Moreover, a lot of exercises are given which may help to understand the abstract theory. Altogether the book can also be used as a good basis for a series of lectures on that topic.

Chapter 1 is a warming up. They start with finite dimensional systems and matrix semigroups. For infinite-dimensional spaces they study uniformly continuous semigroups (linear dynamical systems) and turn over to further topologies, in particular to strongly continuous semigroups.

Chapter 2 contains the standard relations between strongly continuous semigroups, their generators and the corresponding resolvents. The Hille-Yosida generation theorem is given together with its variants. Dissipative operators and contraction semigroups are considered (Theorem of Lumer-Phillips). Many examples are given, because it is the first central chapter in the book. Special classes of semigroups, i.e. analytic, norm-continuous, and compact semigroups, are discussed separately. A comprehensive treatment of "Sobolev towers" is given. The problem of well-posedness for evolution equations is discussed.

Chapter 3 contains the perturbation theory and several approximation formulas. It begins with the simplest case of bounded perturbation. Then the perturbation of contractive and analytic semigroups is studied. For advanced readers the authors explain the theorems of Desch-Schappacher and Myadera-Voigt. Another main part in this chapter is the Trotter-Kato approximation theorem with its variants. These imply different approximation formulas. Also some inversion formulas are mentioned.

Chapter 4 is devoted to the qualitative behaviour. The spectral theory for the semigroups and their generators is developed. After explaining the basic notions in spectral theory of closed operators they discuss the spectral parts of the generators associated to the semigroups. A major role plays the spectral mapping theorem.

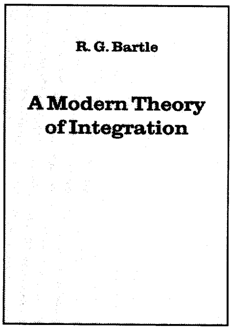
Chapter 5 contains one of the most interesting aspects, the asymptotic behaviour of the semigroup for large time-parameters. This behaviour is tightly connected with the spectral theory explained in the previous chapter. In this context they study the stability, the hyperbolicity, and the mean ergodicity. Moreover, compact semigroups are treated in some detail.

Chapter 6 is the ultimative goal of the book. It contains many applications of the semigroup theory to different kinds of evolution equations such as: population equations, cell equations, transport equations, reactor problems.

Further sections in this chapter complete the list of application. They are written together with several other authors. They analyse semigroups e.g. for ordinary differential operators, partial differential operators, delay differential equations, nonautonomous Cauchy problems, or for control theory.

The rest of the book consists of some supplementary appendices. In Chapter 7 a brief history of the exponential function is given. In the appendices some fundamentals concerning functional analysis, operator theory, and vector-valued integration are summarized. Philosophical questions concerning the relationship between semigroups and evolution equations and the philosophical concept of determinism are discussed in the epilog.

Clausthal-Zellerfeld M. Demuth



R. G. Bartle
A Modern Theory of Integration
Graduate Studies in Mathematics 32

Providence, R.I.: American Mathematical Society 2001, 458 S., $ 59.–

Anwendungen der Integrationstheorie (z. B. in Fourier-Analysis, Funktionalanalysis und Stochastik) setzen in der Regel einen Integralbegriff voraus, der zumindestens das Lebesguesche Integral beinhaltet. Trotzdem wird in den meisten Grundvorlesungen zur Analysis nur das Riemannsche Integral behandelt. Letzteres verdankt diese Bevorzugung wohl vor allem seiner konzeptionellen Einfachheit. Es dürfte vielen Mathematikern dabei nicht bewußt sein, daß mit dem verallgemeinerten Riemannschen Integral, das nach seinen Entdeckern auch Henstock-Kurzweil-Integral genannt wird, ein Integralbegriff zur Verfügung steht, der die konzeptionelle Einfachheit des Riemannschen Integrals mit sehr großer Allgemeinheit verbindet: Das verallgemeinerte Riemannsche Integral erlaubt es, alle Riemann – und alle Lebesgue – integrierbaren Funktionen zu integrieren. Außerdem sind in diesem Kontext die Ableitungen aller überall differenzierbaren Funktionen integrierbar, wobei das Integral mit der üblichen Stammfunktionsformel berechnet werden kann. Es gelten zudem verallgemeinerte Versionen der vom Lebesgue Integral bekannten Konvergenzsätze.

Ein Grund dafür, dass das verallgemeinerte Riemann Integral kaum Eingang in die Analysis-Vorlesungen gefunden hat, könnte darin bestehen, dass es bisher keine Lehrbücher gab, die dieses Integral auf elementarem Niveau behandelten. Zwar gibt es zahlreiche Monographien zu diesem Thema (z. B. die Bücher „The Riemann Approach to Integration“ von W. Pfeffer, Cambridge University Press 1993 und „The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock“ von R.A. Gordon, Americal Mathematical Society 1994), aber keine bereitet den Stoff für Anfänger auf.

Diese Lücke schließt der Autor mit dem vorliegenden Buch, das eine vollständige Beschreibung der Henstock-Kurzweil-Integrationstheorie auf $\mathbb{R}$ enthält und dabei (bis auf wenige Ausnahmefälle) nur elementare Vorkenntnisse voraussetzt. (Etwa zeitgleich mit dem vorliegenden Lehrbuch erschien das Buch „Introduction to Gauge Integrals“ von C. Swartz, World Scientific, Singapore et al., 2001, das ebenfalls einen elementaren Zugang zum verallgemeinerten Riemann-Integral bietet). Im folgenden soll der Inhalt der einzelnen Abschnitte kurz beschrieben werden:

Im Abschnitt 2 werden auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ zunächst in der üblichen Weise Partititionen $\dot{\mathcal{P}}$ mit Zwischenpunkten (engl. tagged partitions) eingeführt. Eine Partition ist dabei eine endliche Familie $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ von paarweise nicht überlappenden Intervallen mit $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist außerdem ein Zwischenpunkt (engl. tag) $t_i \in I_i$ gegeben. Für so eine Partition $\dot{\mathcal{P}} = (I_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$ und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ wird dann die zugehörige Riemann Summe

$$S(\dot{\mathcal{P}}, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) l(I_i)$$

definiert, wobei $l(I_i)$ die Länge von I_i bezeichnet. Das entscheidende neue Konzept ist dann das der Feinheitsfunktion (engl. gauge), worunter eine Funktion $\delta: I \to]0, +\infty[$ zu verstehen ist. Die Partition $\dot{\mathcal{P}}$ heißt δ–fein, falls für $i = 1, \ldots, n$ gilt: $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt verallgemeinert Riemann integrierbar (kurz R^*-integrierbar), wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Feinheitsfunktion $\delta_\varepsilon: I \to]0, +\infty[$ gibt mit

$|S(\dot{\mathcal{P}},f) - A| \leq \varepsilon$ für alle δ_ε-feinen Partitionen $\dot{\mathcal{P}}$. A heißt dann das (R^*-) Integral von f, i. Z. $A = \int_I f = \int_a^b f$. Da man das klassische Riemann Integral erhält, indem man nur konstante Feinheitsfunktionen zulässt, handelt es sich beim R^*-Integral tatsächlich um eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals. Dass das R^*-Integral auch eine Verallgemeinerung des Lebesgue–Integrals ist, wird erst später bewiesen (Abschnitt 14).

In Abschnitt 2 zeigt der Autor an Beispielen, dass es R^*-integrierbare Funktionen gibt, die nicht Riemann-integrierbar sind. Außerdem werden (Lebesguesche) Nullmengen und Nullfunktionen definiert und die R^*-Integrierbarkeit der letzteren nachgewiesen.

In Abschnitt 3 werden die üblichen elementaren Eigenschaften (Linearität, Monotonie, Translationsinvarianz) für das R^*-Integral hergeleitet.

Abschnitt 4 befaßt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen. Es wird gezeigt, dass eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, für die eine c–Stammfunktion $F: I \to \mathbb{R}$ existiert (d. h. $F'(x) = f(x)$ für alle bis auf höchstens abzählbar viele $x \in I$), R^*–integrierbar ist mit $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Umgekehrt ist für jedes R^*–integrierbare $f: I \to \mathbb{R}$ und jedes $u \in I$ das unbestimmte Integral $F_u: x \to \int_u^x f$ stetig und fast–überall (d. h. außerhalb einer Nullmenge) differenzierbar mit Ableitung $F'_u(x) = f(x)$. Mit Beispielen wird belegt, dass die erste dieser beiden Aussagen unter der schwächeren Voraussetzung „$F' = f$ fast überall" i. a. falsch ist, während in der zweiten Aussage die Ausnahmemenge i. a. nicht abzählbar ist.

In Abschnitt 5 wird der Beweis für die Stetigkeit des unbestimmten Integrals geliefert und die unbestimmten Integrale von R^*–integrierbaren Funktionen werden charakterisiert.

In Abschnitt 6 werden messbare Funktionen als punktweise Limiten von Treppenfunktionen (über Intervallen) eingeführt. Ihre elementaren Eigenschaften werden erläutert und ihr Zusammenhang mit R^*-integrierbaren Funktionen diskutiert. In der üblichen Art und Weise werden dann messbare und integrierbare Mengen definiert.

Abschnitt 7 ist den absolut R^*-integrierbaren Funktionen gewidmet, die gerade die Lebesgue integrierbaren Funktionen sind. Es werden mehrere Charakterisierungen der absoluten R^*-Integrierbarkeit gegeben.

Abschnitt 8 behandelt Konvergenzsätze für das R^*-Integral (Monotone Konvergenz, Fatous Lemma, Dominierte Konvergenz, Konvergenz im Mittel), die sich inhaltlich kaum von den bekannten Sätzen für das Lebesgue-Integral unterscheiden.

Abschnitt 9 befaßt sich mit weiteren Limesaussagen für Folgen messbarer Funktionen. Insbesondere wird der Satz von Beppo Levi bewiesen sowie die Konvergenz im Mittel und der Raum der Lebesgue–integrierbaren Funktionen studiert.

In Abschnitt 10 werden die üblichen Abgeschlossenheitseigenschaften für das System der messbaren Mengen abgeleitet und die messbaren Funktionen in bekannter Weise charakterisiert. Interessant sind die folgenden sogenannten „Multiplier"-Aussagen:

i) Eine R^*-integrierbare Funktion ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn ihr Produkt mit jeder beschränkten messbaren Funktion R^*-integrierbar ist.
ii) Das Produkt einer R^*–integrierbaren Funktion mit einer Funktion von beschränkter Variation ist wieder R^*-integrierbar und es gilt die übliche Formel für die partielle Integration.

Abschnitt 11 widmet sich zunächst Egoroffs Satz über die fast gleichmäßige Konvergenz und leitet daraus den Satz von Lusin über die Stetigkeitseigenschaft messbarer Funktionen ab. Dann werden die Konvergenz im Maß und die Vitalischen Charakterisierungen der Konvergenz im Mittel behandelt.

In Abschnitt 12 werden Anwendungen der bisher entwickelten Theorie in der Analysis diskutiert, insbesondere partielle Integration, Mittelwertsätze und die Differentation unter dem Integralzeichen. Es wird Hakes Satz bewiesen, in dem uneigentliche Riemann-Integrale als R^*-Integrale erkannt werden.

Abschnitt 13 befasst sich mit verschiedenen Versionen der Substitutionsregel.

Abschnitt 14 beschäftigt sich mit der absoluten Stetigkeit von Funktionen. Absolut stetige Funktionen werden als unbestimmte Integrale von Lebesgue integrierbaren Funktionen charakterisiert und der Satz von Banach-Zarecki wird bewiesen, der absolut stetige Funktionen als diejenigen stetigen Funktionen von beschränkter Variation kennzeichnet, die Nullmengen auf Nullmengen abbilden.

In Abschnitt 16 wird die R^*-Integration auf nicht notwendig beschränkte Intervalle ausgedehnt. Wieder erweisen sich uneigentliche Riemann-Integrale als R^*-Integrale (Satz von Hake). Außerdem werden verschiedene Tests (von Abel, Chartier-Dirichlet, Dubois-Reymond) für die R^*-Integrierbarkeit einer Funktion vorgestellt.

In Abschnitt 17 wird untersucht, welche der Resultate der R^*-Integrationstheorie sich von kompakten Intervallen auf unbeschränkte Intervalle übertragen lassen und welche Adaptionen eventuell vorgenommen werden müssen.

Abschnitt 18 befaßt sich mit dem Lebesgue-Maß und den zugehörigen messbaren Mengen sowie ihren elementaren Eigenschaften.

In Abschnitt 19 wird die Brücke zur abstrakten Maß- und Integrationtheorie geschlagen, insbesondere wird der Satz von Radon-Nikodym formuliert. Außerdem wird der Satz von Lusin für messbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ bewiesen.

In Abschnitt 20 werden Möglichkeiten diskutiert, den Satz von Egoroff auf unbeschränkte Intervalle auszudehnen. Außerdem werden auf $\mathbb{R}$ bestehende Zusammenhänge zwischen Konvergenz im Maß und im Mittel erläutert.

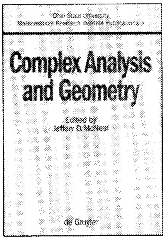
In neun kurzen Anhängen werden im Buch verwendete Hilfsmittel, die nicht unbedingt zur elementaren reellen Analysis gehören, zusammengestellt. Außerdem wird jeder Abschnitt mit einer großen Anzahl von Übungen verschiedener Schwierigkeitsgrade abgeschlossen und für ca. ein Drittel der gestellten Aufgaben werden am Schluss des Buches die Lösungen skizziert.

Das Buch präsentiert seinen Gegengstand in ansprechender, didaktisch überzeugender und gut lesbarer Darstellung. Die Beweise sind in aller Regel leicht verständlich und die Bedeutung der erarbeiteten Sätze wird durch zahlreiche Beispiele veranschaulicht. Es kann daher jedem Studenten mit Grundkenntnissen in Analysis zum Selbststudium empfohlen werden. Auch als Begleittext zu einer Vorlesung über Integration auf $\mathbb{R}$ ist es sehr gut geeignet. Allerdings läßt sich der Inhalt wegen des großen Stoffumfangs kaum eins zu eins in eine klassische Analysisvorlesung übernehmen. Soll das verallgemeinerte Riemann Integral in eine Grundvorlesung über Analysis eingebaut werden, so bleibt dem jeweiligen Dozenten das Problem der geeigneten Stoffauswahl. Wünschenswert wäre auch eine elementare Präsentation der mehrdimensionalen Integrationstheorie, die nahtlos an die verallgemeinerte Riemann-Integration auf $\mathbb{R}$ anschließt (vgl. das oben zitierte Buch von Pfeffer für eine wissenschaftliche Darstellung).

Ich möchte das Lehrbuch allen Mathematikern (Studenten und Dozenten), die sich für Integration interessieren, sehr zur Lektüre empfehlen.

Passau S. Graf

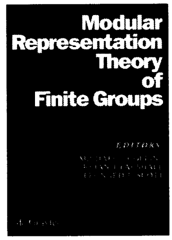
de Gruyter Mathematics



Complex Analysis and Geometry
Edited by
Jeffery D. McNeal

Proceedings of a Conference at the Ohio State University June 3–6, 1999

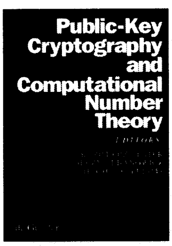
2001. 24 x 17 cm. 191 pages. Hardcover.
€ 98,– [D] /sFr 157,– /US$ 99.95
• ISBN 3-11-016809-X
(Ohio State University Mathematical Research Institute Publications 9)



Modular Representation Theory of Finite Groups

Proceedings of a Symposium held at the University of Virginia, Charlottesville May 8–15, 1998
Edited by Michael J. Collins,
Brian J. Parshall and Leonard L. Scott

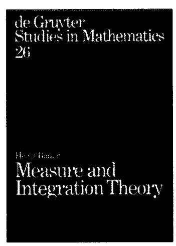
2001. 24 x 17 cm. XII, 262 pages.
Hardcover. € 108,– [D] / sFr 173,– /
US$ 99.95 • ISBN 3-11-016367-5
(de Gruyter Proceedings)



Public-Key Cryptography and Computational Number Theory

Proceedings of the International Conference organized by the Stefan Banach International Mathematical Center, Warsaw, Poland, September 11–15, 2000
Edited by K. Alster / J. Urbanowicz /
H. C. Williams

2002. 24 x 17 cm. XII, 332 pages. Cloth.
€ 128,– [D] /sFr 205,– /US $ 118.95
• ISBN 3-11-017046-9



Heinz Bauer
Measure- and Integration Theory

Translated from the German by
Robert B. Burckel

2001. 24 x 17 cm. XVI, 230 pages. Cloth.
€ 39,95 [D] /sFr 64,– /US$ 42.95
• ISBN 3-11-016719-0
(de Gruyter Studies in Mathematics 26)

Prices are subject to change

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0
Fax +49-(0)30-2 60 05-251
www.deGruyter.de

de Gruyter
Berlin · New York

Volume 4

Aspects of Complexity

Minicourses in Algorithmics, Complexity, and Computational Algebra, Kaikoura, New Zealand, January 7–15, 2000

Edited by Rod Downey / Denis Hirschfeldt

2001. 24 x 17 cm. VI, 172 pages. Hardcover.
€ 98,– [D] / sFr 157,– / US$ 89.95
• ISBN 3-11-016810-3

The book contains 8 detailed expositions of the lectures given at the Kaikoura 2000 Workshop on Computability, Complexity, and Computational Algebra.
Topics covered include basic models and questions of complexity theory, the Blum-Shub-Smale model of computation, probability theory applied to algorithmics (randomized alogrithms), parametric complexity, Kolmogorov complexity of finite strings, computational group theory, counting problems, and canonical models of ZFC providing a solution to continuum hypothesis.

The text addresses students in computer science or mathematics, and professionals in these areas who seek a complete, but gentle introduction to a wide range of techniques, concepts, and research horizons in the area of computational complexity in a broad sense.

Volume 5

Martin Zeman

Inner Models and Large Cardinals

NEW

2002. 24 x 17 cm. XII, 369 pages. Cloth.
€ 138,– [D] /sFr 221,– /US$ 128.95
• ISBN 3-11-016368-3

This volume is an introduction to inner model theory, an area of set theory that is concerned with fine structural inner models reflecting large cardinal properties of the set theoretic universe.

The monograph is informally divided into three parts. The first part contains a detailed presentation of general fine structure theory for acceptable J-structures. The second part presents a modern approach to the construction of small core models, namely those containing at most one strong cardinal, together with some of their applications. The third part of the book is devoted to a new approach encompassing large inner models which admit overlapping extenders.

The exposition is self-contained and does not assume any special prerequisites, which should make the text comprehensible not only to specialists, but also to advanced students in mathematical logic and set theory.

Prices are subject to change

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0
Fax +49-(0)30-2 60 05-251
www.deGruyter.de

de Gruyter
Berlin · New York