

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Verlag

B. G. Teubner GmbH  
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden  
www.teubner.de  
www.gwv-fachverlage.de

*Geschäftsführer:* Dr. Hans-Dieter Haenel  
*Verlagsleitung:* Dr. Heinz Weinheimer  
*Gesamtleitung Anzeigen:* Thomas Werner  
*Gesamtleitung Produktion:* Reinhard van den Hövel

## Leserservice

Tatjana Hellwig  
Telefon: (06 11) 78 78-1 51  
Fax: (06 11) 78 78-4 23  
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

## Produktmanagement

Stefanie Hoffmann  
Telefon: (06 11) 78 78-3 79  
Fax: (06 11) 78 78-4 39  
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

## Abonnenenverwaltung

Ursula Müller  
Telefon: (0 52 41) 80-19 65  
Fax: (0 52 41) 80-96 20  
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

## Anzeigenleitung

Christian Kannenberg  
Telefon: (06 11) 78 78-3 69  
Fax: (06 11) 78 78-4 30  
E-Mail: christian.kannenberg@bertelsmann.de  
www.gwv-anzeigen.de

## Erscheinungsweise und Bezugspreise

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von € 95,- (158,- sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

© B. G. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002

Der Teubner Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim

Druck und buchbinderische Verarbeitung: pagina media gmbh, Hemsbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISSN 0012-0456

**Vorwort** . . . . . 49

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**Two Problems in Economics**

I. Ekeland . . . . . 51

**Von den Linienkoordinaten zu Regelvarietäten**

G. Fischer . . . . . 59

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**Leopold Vietoris zum Gedächtnis**

H. Reitberger . . . . . 75

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**M. Hazewinkel (Ed.): Handbook of Algebra, Volume 2**

H.-J. Nastold . . . . . 21

**B. Bolzano: Functionenlehre**

D. D. Spalt . . . . . 22

**T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie**

Th. Bröcker . . . . . 25

**A. Juhl: Cohomological Theory of Dynamical Zeta Functions**

J. Hilgert . . . . . 27

**K.-H. Neeb: Holomorphy and Convexity in Lie Theory**

G. Ólafsson . . . . . 30

**A. Uchiyama: Hardy spaces on the Euclidean space**

H. Triebel . . . . . 33

**J.-P. Aubin: Mutational and Morphological Analysis**

K.-P. Hadeler . . . . . 34

**L. Ambrosio, N. Dancer: Calculus of Variations and Partial Differential Equations**

M. Grüter . . . . . 36

**M. Chipot: Elements of Nonlinear Analysis**

H. Kielhöfer . . . . . 37

**A. M. Etheridge: An Introduction to Superprocesses**

A. Klenke . . . . . 39

**M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler: Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry**

E. Behrends . . . . . 41

**F. Dillen, L. Verstraelen (Eds.): Handbook of Differential Geometry, Vol. 1**

J. Heber . . . . . 42

**In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten**

**P. Ullrich:** Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“:  
Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorboten der komplexen Räume

---

**Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen  
E-Mail: [krieg@mathA.rwth-aachen.de](mailto:krieg@mathA.rwth-aachen.de)

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle  
Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund  
E-Mail: [gather@statistik.uni-dortmund.de](mailto:gather@statistik.uni-dortmund.de)

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg  
E-Mail: [heintze@math.uni-augsburg.de](mailto:heintze@math.uni-augsburg.de)

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln  
E-Mail: [kawohl@mi.uni-koeln.de](mailto:kawohl@mi.uni-koeln.de)

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität  
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1<sup>1/2</sup>, 91054 Erlangen  
E-Mail: [lange@mi.uni-erlangen.de](mailto:lange@mi.uni-erlangen.de)

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität,  
Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena  
E-Mail: [triebel@minet.uni-jena.de](mailto:triebel@minet.uni-jena.de)

**Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-  
Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810,  
NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Vorwort

Im Namen des Verlages und des Herausbergremiums des Jahresberichts möchte ich mich für die rege Teilnahme an der Fragebogenaktion bedanken. Ein Teil der Anregungen war bereits in die Wege geleitet worden und um einen weiteren Teil werden wir uns in nächster Zeit kümmern. Auffällig war der Wunsch nach mehr Beiträgen zu Anwendungen der Mathematik, dem wir sicherlich nachkommen werden. Eine genauere Auswertung wird im nächsten Heft des Jahresberichts folgen.

Ihre Anregungen und Wünsche sind uns auch weiterhin willkommen. Bitte nehmen Sie dazu einfach Kontakt mit einem Herausgeber auf.

Neben den Buchbesprechungen beinhaltet dieses Heft die Ausarbeitungen von I. Ekelands Hauptvortrag auf der ÖMG-Tagung in Wien sowie von G. Fischers Vortrag auf dem Plücker-Kolloquium in Bonn. Im April dieses Jahres ist das DMV-Ehrenmitglied Leopold Vietoris im Alter von 110 Jahren verstorben. Dazu finden Sie einen Nachruf von H. Reitberger.

A. Krieg





## Two Problems in Economics

by Ivar Ekeland

### Abstract

- Keywords and Phrases: variational problems, convexity constraints, exterior differential systems, Cartan-Kähler theorem
- Mathematics Subject Classification: 3502, 9102

I will show how investigating the basic principles of economic theory quickly leads us to interesting systems of nonlinear partial differential equations.

Eingegangen: 19. 10. 2001, in revidierter Form 10. 05. 2002

Ivar Ekeland, Ceremade and Institut de Finance, Université Paris-Dauphine  
E-Mail: [ekeland@dauphine.fr](mailto:ekeland@dauphine.fr)

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002

## 1 A problem in informational asymmetry

This is one of the most fundamental problems of economic theory (see Laffont and Tirole (1993) for an account). When dealing with an individual of characteristics  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in R^k$ , known to him, but not to me, I may want to know  $\theta$ , and he may want to hide it from me. Examples of this kind of situation are ubiquitous. Suppose for instance I sell car insurance; clearly I would want to charge more for insuring bad risks (poor drivers) than good ones. How am I to do it? If I plainly ask every customer whether he is a good driver, in which case I will charge him less, or a good driver, in which case he will be hit with a hefty premium, I will find that everyone claims to be a good driver. Of course, if there are records of previous driving which I can access, the problem is solved, but what if there are none? Insurance companies have solved the problem long ago. They typically have two contracts, one with a small deductible and a large premium, and another with a large deductible and a small premium, and they just ask the prospective customer which one he/she wants. Note that it is the same question as before, but framed in such a way that the buyer will reveal the truth about himself out of sheer self-interest. Similarly, when establishing public transportation, such as railroads, a benevolent state would typically want to charge the poor less than the actual cost, and make up the difference by charging the rich more. Since one cannot very well ask citizens for their tax return when they buy their ticket, one simply asks them whether they want to travel first class or second class.

I will now describe a very simple model of this kind of situation, which is due to Rochet and Choné (1998)

### 1.1 The Rochet-Choné problem

Suppose I enjoy a monopoly on a certain type of product. It comes in different qualities, and I want to price the different qualities so as to extract the maximum possible amount from consumers. Since I am a monopolist, their only recourse is not to buy. If they buy at all, they have to buy from me.

#### 1.1.1 The economic model

- a monopolist sells a product with two characteristics  $(y^1, y^2)$ . Each consumer buys zero or one unit, and one unit of quality  $y$  costs  $p(y)$  (think of cars, for instance)
- there is a continuum of consumers whose tastes are subsumed by two parameters  $(x_1, x_2)$ : the utility customer  $x$  gets from buying  $y$  at price  $p(y)$  is

$$x_1 y^1 + x_2 y^2 + u(y_1, y_2) - p(y)$$

where  $u: R^2 \rightarrow R$  is concave; note that different types of consumers have different tastes, and will react differently to the same price menu  $p(y)$

- the seller knows the distribution of  $(x_1, x_2)$ , say  $f(x)dx$ , but cannot price his product in terms of  $x$  - he has to price it in terms of  $(y_1, y_2)$

The seller fixes a price schedule  $p(y)$ . Each buyer of type  $x$  maximizes  $x'y + u(y) - p(y)$  with respect to  $y$ . If the resulting utility is positive, he buys the result-



ing product  $y(x)$ ; if it is negative, he doesn't buy at all. The seller's problem is to find the price schedule which will maximize total profit:

$$\int_X p(y(x))f(x)dx$$

taking into account the expected behaviour of the buyers.

### 1.1.2 The mathematical problem

Introduce the function:

$$V(x) = \max \left\{ 0, \max_y \{x'y + u(y) - p(y)\} \right\}$$

Note that it is convex, as a supremum of affine functions. Economically speaking, it is the utility which consumers of type  $x$  derive from a price menu  $p(y)$ . We have  $\nabla V(x) = y$  by the envelope theorem. Substituting for  $p(y)$ , we get an almost (but not quite) classical problem in the calculus of variations:

$$(1.1) \quad \text{Max} \int_X [x'\nabla V(x) + u(\nabla V(x)) - V(x)]f(x)dx$$

$$(1.2) \quad V : X \rightarrow \mathbf{R} \text{ convex, } V(x) \geq 0 \quad \forall x$$

The fundamental difference with a classical obstacle problem is the fact that we are maximizing, not over all functions, but over convex ones. This is new type of constraint, which has apparently never been investigated before, and which leads to extremely interesting problems.

Particularizing to  $u(y) = -\frac{c}{2} \|y\|^2$  and  $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  with  $f(x) = 1$  gives:

$$\text{Max} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[ x'\nabla V(x) - \frac{c}{2} \|\nabla V(x)\|^2 - V(x) \right] dx_1 dx_2$$

$$V \text{ convex, } V(x) \geq 0 \quad \forall x \quad (7)$$

which is the problem Rochet and Choné solved. We refer to their paper for the complete solution. They show that the square  $X$  is divided into three regions. In the lower left region, we have  $V = 0$ . In the upper right region, the convexity constraint is not binding, the solution satisfies the Euler-Lagrange equation for the free problem,  $\Delta V = 3/c$ , with the corresponding Neumann conditions on the boundary of the square. There is a middle region, where the function  $V$  is ruled (its level sets are parallel straight lines), so that its Hessian has exactly one positive eigenvalue. It is the presence of this region which makes the problem difficult. These three regions are separated by free boundaries.

### 1.1.3 The state of the art

I will now review the known results concerning the problem (1.1),(1.2).

The existence of a solution holds under standard assumptions. Indeed, the set of convex functions is a closed convex cone in any reasonable function space you care to work in, and since the integrand  $x'y + u(y)$  is a concave function of  $y$ , the integral will

be a concave upper semi-continuous function of  $V$ , and it will attain its maximum provided a suitable growth assumption is satisfied by  $u$ . If  $u$  is strictly concave, we will have uniqueness as well.

Regularity of the solution, on the other hand, is an issue. It has recently been proved by Carlier and Lachand-Robert (2001) that the solution is  $C^1$  in the interior, and they tell me that their proof will also show that it is  $C^1$  up to and including the boundary. Caffarelli and P.L. Lions have told me that they can improve this result and show that the solution is  $C^{1,1}$ . Regularity of the free boundaries is unknown.

Necessary conditions are also hard to come by. The best result to date is due to P.L. Lions (1999), who characterized the polar of the cone of convex functions in  $W^{1,p}(\Omega)$ , where  $\Omega$  is a bounded open set. Denote by the  $K^p \subset W^{1,p}(\Omega)$  this cone and by  $[K^p]^\perp \subset [W^{1,p}(\Omega)]^*$  its polar. Then  $L \in [K^p]^\perp$  iff there exists a symmetric, positive semi-definite matrix  $(\mu_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  of bounded measures such that

$$L = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mu_{ij}$$

in the sense of distributions.

Even numerical algorithms are hard to come by. The obvious idea is to choose a regular triangular grid on the plane, and to approximate a convex function by taking its values at the points on the grid and interpolating linearly. Unfortunately, that won't work. If we choose a grid consisting of squares of length  $h$ , for instance, with two sides horizontal and two sides vertical, cut in two by the SW-NE diagonal, then if a sequence of functions  $f_n$  has the following properties:

- each  $f_n$  is convex,
- each  $f_n$  is affine on each triangle
- $f_n \rightarrow f$ ,

then  $f$  is convex, of course, but satisfies the additional condition that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \geq 0$$

In other words, using piecewise linear convex functions on that grid introduces a new (undesirable) constraint in the problem. If the solution of the original problem does not satisfy this constraint, the solutions to the discretized problem will approximate something else. A (more complicated) algorithm which does not have this defect has been found by Carlier, Lachand-Robert and Maury (2001).

Finally, we would like to have some qualitative properties of the solution. The economist is not really interested in the actual values of such a crude model, but he would certainly like to have some general rules. For instance, he would like to know that there are always three regions, that the region where  $V = 0$  is always in the lower left corner, and that the region where the convexity constraint is not binding is always in the upper right corner.

## 2 Characterization of demand functions.

The microeconomic theory of the consumer states that each individual is characterized by a concave utility function  $U : \mathbb{R}_+^K \rightarrow \mathbb{R}$  and a wealth  $w \in \mathbb{R}_+$ , and that given a set of prices  $p \in \mathbb{R}_+^K$ , he will buy the goods bundle  $x \in \mathbb{R}_+^K$  which maximizes his utility under the budget constraint:

$$\begin{aligned} \max_x & U(x) \\ p'x & \leq w \end{aligned}$$

This is the basic model on which much of modern economic theory rests (see Mas-Colell et al. (1995) for an account), but is it actually true? In other words, can the model be tested by a suitably designed experiment? The answer depends on what kind of data you have.

### 2.1 Individual data

One cannot observe individual utility. But it has been known since the work of Antonelli in (1886), later rediscovered by Slutsky (1915) that, if you can observe individual demand, the model can be tested. Take  $w = 1$  for the sake of commodity, and introduce the *individual demand function*:

$$x(p) = \arg \max\{U(x) \mid p'x = 1\}$$

the indirect utility function:

$$V(p) = \max\{U(x) \mid p'x = 1\}$$

They are related by:

$$(2.1) \quad DV(p) = -\lambda(p)x(p)$$

for some  $\lambda(p) \geq 0$  (the Lagrange multiplier). This implies that the vector field  $x(p)$  in  $\mathbb{R}^K$  is collinear to a gradient. So the Frobenius condition must be satisfied. In addition, the indirect utility function  $V(p)$  must be (quasi)-convex, which leads to one more condition. The results are subsumed in the following.

Introduce the Slutsky matrix  $S(p)$ , with coefficients  $s^{ij}(p)$ , associated with the given demand function  $x(p)$ :

$$s^{ij}(p) = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} - \sum p^k \frac{\partial x^j}{\partial p_k} x^k$$

**Proposition** *A necessary and sufficient condition for  $x = -\frac{1}{\lambda}V$  to hold locally, for some function  $V(p)$  with  $D^2V$  negative definite, and some positive function  $\lambda(p)$ , is that the Slutsky matrix associated with  $x(p)$  be symmetric and negative definite*

$$S(p) = S(p)' > 0$$

Necessity is easy to come by. Set  $\mu = 1/\lambda$  and differentiate  $x = -\mu V$ . One gets:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^j}{\partial p_i} &= -\frac{\partial \mu}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial p_j} - \mu \frac{\partial V^2}{\partial p_i \partial p_j} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p_i} x^j - \mu \frac{\partial V^2}{\partial p_i \partial p_j} \end{aligned}$$

The first term on the right-hand side is a matrix of rank one, and the second term is symmetric and negative definite. With further calculations, one shows that  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p_i} = \sum p^k \frac{\partial x^j}{\partial p_k}$ , yielding the Slutsky conditions. Conversely, by a classical theorem of Frobenius, if the Slutsky matrix is symmetric, then we have  $x = -\mu V$  for some  $\mu$  and  $V$ . A direct argument then gives positivity of  $\mu$  and convexity of  $V$ .

So the model can be tested on individual data: just observe some individual demand function  $x(p)$  and check whether it satisfies the Slutsky conditions. The corresponding experiment has been carried through by Browning and Chiappori (1998), and the model has survived the experiment.

## 2.2 Macroeconomic data

It is of course much easier to gather global sales and expenditure data over regions or countries than to observe the consumption of a given individual. In other words, if an economy consists of  $N$  individuals, whose wealth is normalized to 1, one will have data on the aggregate demand function:

$$X(p) = \sum_{n=1}^N x_n(p)$$

where each (unobserved)  $x_n$  is an individual demand function, so that:

$$\begin{aligned} x_n(p) &= -\frac{1}{\lambda^n(p)} DV_n(p) \\ p'x_n(p) &= 1 \end{aligned}$$

We can express the  $\lambda^n$  in terms of the  $DV_n$  by applying  $p'$  to the first equation. We are then led to the following system of  $K$  nonlinear PDEs for the  $V_n$ :

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{p'DV_n} DV_n = X(p)$$

Clearly  $X(p)$  must satisfy  $p'X(p) = N$ , the so-called Walras law. Chiappori and Ekeland (1999) proved the following:

**Theorem 1** *Assume  $N \geq K$ . Consider some open set  $\mathcal{U}$  in  $\mathbb{R}^K \setminus \{0\}$ , and some analytic map  $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^K$  such that  $p'X(p) = N$ . For all  $\bar{p} \in \mathcal{U}$  and for all  $\bar{\Delta} \in \mathbb{R}^{NK}$  such that*

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sum_k \bar{p}_k \bar{\Delta}_n^k} \bar{\Delta}_n^j = X^j(\bar{p}),$$

*there exists real-analytic functions  $V_n, 1 \leq n \leq N$ , defined on some neighbourhood  $\mathcal{N}$  of  $\bar{p}$ , such that:*

1.  $\forall n, DV_n(\bar{p}) = \bar{\Delta}_n,$
2.  $\forall n, D_{pp}^2 V^n(\bar{p})$  is positive definite
3.  $V^n, 1 \leq n \leq N,$  solves the system (2.2).

So, if  $N \geq K$ , the system can be solved for any right-hand side. In contrast with the case of individual demand, there are no conditions (apart from the Walras law) for a  $X(p)$  to satisfy to be a collective demand. As a consequence, if there are more goods than consumers, the model cannot be tested on macroeconomic data.

The proof goes as follows. Introduce the space:

$$E = R^K \times R^N \times R^{NK} = \left\{ (p_k, \lambda^n, \Delta_n^{k'}) \mid 1 \leq k, k' \leq K, 1 \leq n, n' \leq N \right\}$$

In this space, consider the submanifold  $\mathcal{M}$  defined by the equations:

$$(2.3) \quad \sum_n -\frac{1}{\lambda_n} \Delta_n^k = X^k(p) \quad \forall k,$$

$$(2.4) \quad \sum_k p_k \Delta_n^k = -\lambda_n \quad \forall n.$$

Take  $K = N$ . Then  $\mathcal{M}$  is a submanifold of dimension  $N^2 + 1$ . In  $\mathcal{M}$  (and *not* in  $E$ ) we consider the exterior differential system (EDS) (see Bryant et al. (1991) for an account of the theory, and the Cartan-Kähler theorem):

$$(2.5) \quad \sum d\Delta_n^k \wedge dp_k = 0 \quad \forall n,$$

$$(2.6) \quad dp_1 \wedge \dots \wedge dp_K \neq 0$$

This EDS is equivalent to the system (2.2), in the sense that an integral manifold is the graph of a map  $p \rightarrow (\lambda_n(p), \Delta_n^k(p)), 1 \leq n \leq N$ , such that  $\Delta_n^k = \partial V_n / \partial p_k$  by the Poincaré lemma. We now apply the Cartan-Kähler theorem, with suitable initial conditions, so that  $D_{pp}^2 V^n(\bar{p})$  is positive definite and  $\lambda_n(\bar{p})$  is positive, as announced.

The fact that one has to resort to the Cartan-Kähler theorem, that is, ultimately, to the Cauchy-Kowalewska theorem, raises the suspicion that the problem is ill-posed, which would much detract of the economic significance of such a result. So would a similar result hold when  $X(p)$  is  $C^\infty$  only? Here is a baby version of this problem: given  $C^\infty$  function  $f$  and  $g$ , find functions  $u(x, y, z)$  and  $v(x, y, z)$  such that

$$\frac{u_x}{u_z} + \frac{v_x}{v_z} = (x, y, z)$$

$$\frac{u_y}{u_z} + \frac{v_y}{v_z} = (x, y, z)$$

If  $f$  and  $g$  are real analytic, there are solutions by the Chiappori-Ekeland result (or by applying Cauchy-Kowalewska directly). If  $f$  and  $g$  are  $C^\infty$  only, we do not know if there are solutions.

### 3 Bibliography

- G. Antonelli “Sulla Teoria Matematica della Economia Politica”, Pisa, 1886. English translation in “Preferences, Utility and Demand”, Chipman et al. ed., Harcourt-Brace-Jovanovich, 1971, p. 333–364.
- M. Browning, and P.-A. Chiappori, “Efficient Intra-Household Allocations: a General Characterization and Empirical Tests”, *Econometrica*, 66 (1998), 1241–1278.
- R.L. Bryant., S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt and P.A. Griffiths, “Exterior Differential Systems”, Springer-Verlag, New York, 1991
- G. Carlier and T. Lachand-Robert, “Regularity of solutions for some variationa problems subject to a convexity constraint”, *Comm. P.A.M.* 54 (2001), p. 583–594.
- G. Carlier, T. Lachand-Robert and B.Maury, “A numerical approach to variational problems subject to convexity constraints”, *Numer. Math.* 88 (2001), p. 299–318.
- P.-A.Chiappori and I. Ekeland: “Aggregation and Market Demand: an Exterior Differential Calculus Viewpoint”, *Econometrica* 67 (1999), p.1435–1458
- P.L. Lions, “Identification du cône dual des fonctions fonctions convexes et applications”, CRAS Paris 326 (1998), p. 1385–1390.
- Laffont and Tirole, “A theory of incentives in procurement and regulation”, MIT Press, 1993
- A. Mas-Colell, M. Whinston, J.R. Green, “Microeconomic theory”, Oxford University Press, 1995
- J.R. Rochet and P.Choné, “Ironing, sweeping and multidimensional screening”, *Econometrica* 66 (1998), p. 783–826
- E. Slutsky, “Sulla teoria del bilancio del consummatore”, *Giornale degli Economisti.*, 3, 51 (1915), p. 1–26. English translation in “Readings in price theory”, Stigler et al. ed., Richard Irwin, 1952, p. 27–56.



## Von den Linienkoordinaten zu Regelvarietäten\*

Gerd Fischer

### Abstract

- Keywords and Phrases: Grassmannians, Rulings
- Mathematics Subject Classification: 01 A 55, 14 M 15, 14 M 99

We start with a short survey on Plücker's construction of coordinates of lines, and the concept of duality in projective geometry. These tools admit a precise study of ruled surfaces, i.e. unions of a one-parameter family of lines. A generalization to higher dimensions using Grassmannian varieties leads to ruled varieties. We consider the special class of developable varieties and report on the state of the art of their construction and classification. This question had already been raised by Plücker in one of his last papers.

\* Erweitertes Manuskript eines Vortrages beim Plücker-Kolloquium der Universität Bonn am 23. 11. 2001.

Eingegangen: 26.06.2002

Gerd Fischer, Mathematisches Institut,  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Universitätsstraße 1,  
D-40225 Düsseldorf. E-Mail: [gerdfischer@cs.uni-duesseldorf.de](mailto:gerdfischer@cs.uni-duesseldorf.de)

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002

Wie Herr Bödigher [B] eindrucksvoll ausgeführt hat, war Julius Plücker in verschiedenen Phasen seiner wissenschaftlichen Arbeit abwechselnd in Mathematik und Physik tätig. Herr Bradshaw hat seinen Vortrag über die physikalischen Beiträge mit dem Titel „Von der Gasentladungsröhre zum Fusionsreaktor“ versehen. In Anlehnung daran will ich über Untersuchungen berichten, die einen Keim in den Arbeiten von Plücker haben, aber erst später systematisch in Angriff genommen wurden.

## 1 Felix Klein und eine Gleichung fünften Grades

Zunächst eine nette historische Kleinigkeit. An dem humanistischen Gymnasium in Düsseldorf, das Plücker besuchte, machte (neben Heinrich Heine) auch Felix Klein Abitur. Die erste von vier Abituraufgaben in Mathematik betraf die Algebra, sie lautete [F]:

*Der Unterschied zweier Zahlen beträgt 2, der Unterschied ihrer fünften Potenzen 2882. Die Zahlen sollen gefunden werden.*

Felix Klein macht aus den Gleichungen

$$x - y = 2 \quad \text{und} \quad x^5 - y^5 = 2882$$

zunächst eine Gleichung vierten Grades und daraus quadratische Gleichungen, woraus er die vier Lösungen

$$(5, 3), (-3, -5), (1 + 3i\sqrt{2}, -1 + 3i\sqrt{2}), (1 - 3i\sqrt{2}, -1 - 3i\sqrt{2})$$

berechnet. Bemerkenswert daran erscheint, dass er schon im Alter von 16 Jahren an Gleichungen fünften Grades trainiert wurde, aber dass ihm der fünfte im Unendlichen gelegene Schnittpunkt der Gerade mit der Quintik noch entging.

## 2 Dualität und Linienkoordinaten

Plücker ist heute jedem algebraischen Geometer bekannt durch die nach ihm benannten Koordinaten linearer Unterräume, im Fall von Geraden heißen sie *Linienkoordinaten*. Ausgangspunkt ist eine Beobachtung, die jeder Schüler machen kann: Ein Punkt in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist gegeben durch ein Zahlenpaar  $(x, y)$ , eine Gerade in der Ebene durch eine Gleichung

$$ax + by = c.$$

Hier herrscht keine Gleichberechtigung zwischen Punkten und Geraden, denn die zwei Zahlen  $x$  und  $y$  sind beliebig, während bei den drei Zahlen  $a, b, c$  die Bedingung  $(a, b) \neq (0, 0)$  erfüllt sein muss, und für jedes  $\lambda \neq 0$  das Tripel  $\lambda a, \lambda b, \lambda c$  dieselbe Gerade ergibt.

Symmetrie zwischen Punkten und Geraden wird erst erreicht durch den Abschluss der affinen Ebene  $\mathbb{R}^2$  zur projektiven Ebene  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Dort ist ein Punkt gegeben durch ein Tripel, das nur bis auf einen Faktor  $\lambda \neq 0$  bestimmt ist, also

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

und für  $x_0 \neq 0$  ist man im affinen Teil mit



$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad \text{und} \quad y = \frac{x_2}{x_0} .$$

Eine Gerade in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  ist gegeben durch eine lineare Gleichung

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 ,$$

also durch einen „Punkt“

$$(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$$

der *dualen projektiven Ebene*. Nun ist die Gleichberechtigung zwischen Punkten und Geraden hergestellt und vom projektiven Standpunkt ist die Asymmetrie im Affinen klar:  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  enthält unendlich viele Punkte mehr als  $\mathbb{R}^2$ , sie liegen auf der unendlich fernen Geraden mit der Gleichung  $x_0 = 0$ . Aber  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$  enthält nur eine einzige Gerade mehr als  $\mathbb{R}^2$ , nämlich die unendlich ferne mit der Koordinate  $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$ .

Viel spannender wird die Dualität im dreidimensionalen Raum, den wir gleich als projektiv und komplex annehmen, da dies der adäquate Rahmen für die algebraische Geometrie ist. Zunächst haben wir Punkte

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) ,$$

und dem „Punkt“

$$(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}_3^*(\mathbb{C})$$

des dualen projektiven Raumes entspricht eine Ebene in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  mit der Gleichung

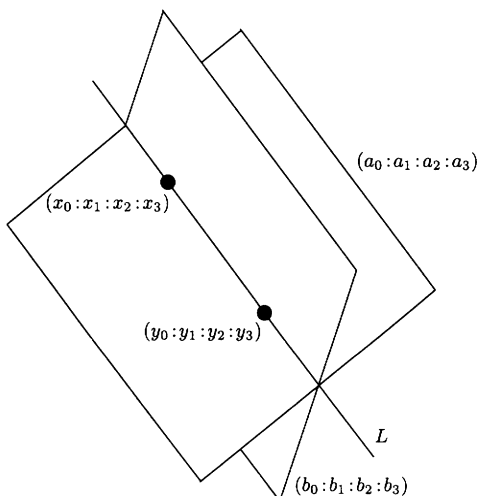
$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 .$$

Eine Gerade  $L \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  kann nun auf zwei Arten beschrieben werden: als Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte

$$x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \quad \text{und} \quad y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) ,$$

oder als Schnittgerade zweier verschiedener Ebenen

$$E_a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \quad \text{und} \quad E_b = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3) .$$



*Verschiedene Beschreibungen einer Geraden*

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechung
-------------------	----------------------	-----------------

Um die Linienkoordinaten von  $L$  zu erhalten, berechnet man von der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

die sechs 2-Minoren, also

$$p_{01} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}, p_{02} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{pmatrix}, \dots, p_{23} = \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Dadurch ist ein nur von  $L$  und nicht von der Auswahl der Punkte  $x$  und  $y$  abhängiger Punkt

$$(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$$

erklärt. Die bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\lambda \neq 0$  bestimmten Zahlen  $p_{ij}$  heißen die *Linienkoordinaten* der Gerade  $L$ .

Eine einfache Rechnung zeigt (vgl. etwa [F-P, p. 24]), dass die *Plücker-Relation*

$$p_{01} p_{23} - p_{02} p_{13} + p_{03} p_{12} = 0$$

gilt. Diese Gleichung beschreibt eine Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$ , sie heißt die *Plücker-Quadrik*. Insgesamt gilt:

*Die Geraden in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  entsprechen in eindeutiger Weise den Punkten der Plücker-Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$ .*

Als Hyperfläche des  $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$  hat die Plücker-Quadrik die Dimensionen 4. Also ist eine Gerade im 3-dimensionalen Raum im Wesentlichen durch 4 Parameter festgelegt. Das wird auch durch die folgende geometrische Überlegung klar: Wählt man zwei feste Ebenen, so schneidet fast jede Gerade die beiden Ebenen in jeweils einem Punkt. Die beiden Schnittpunkte sind durch je 2 Parameter gegeben, die Gerade ist also insgesamt durch 4 Parameter festgelegt.

Nun wird die obige Konstruktion dualisiert, indem man die Beschreibung der Gerade  $L$  als Schnitt der Ebenen  $E_a$  und  $E_b$  benutzt. Die 2-Minoren  $p_{ij}^*$  der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

ergeben einen Punkt

$$(p_{01}^* : p_{02}^* : p_{03}^* : p_{12}^* : p_{13}^* : p_{23}^*) \in \mathbb{P}_5(\mathbb{C}),$$

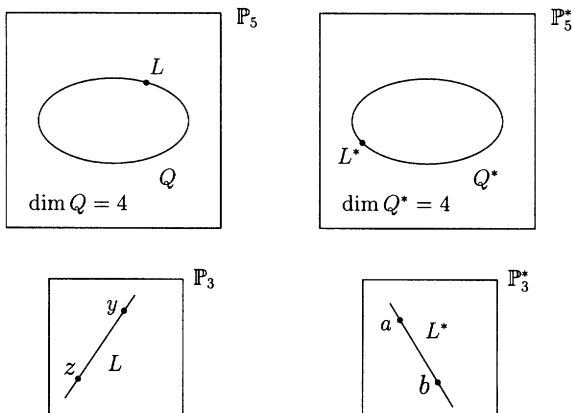
er gehört zur Verbindungsgerade  $L^*$  der Punkte  $E_a$  und  $E_b$  in  $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{C})$ .  $L^*$  ist das Bündel der Ebenen, die die Gerade  $L$  enthalten. Die Plücker-Koordinaten  $p_{ij}^*$  erfüllen die gleiche Plücker-Relation wie die  $p_{ij}$ , und wie oben entsprechen die Geraden  $L^*$  in  $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{C})$  den Punkten einer Plücker-Quadrik  $Q^* \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$ . Die *Dualität*

$$\mathcal{D} : Q \longrightarrow Q^*, \quad L \longmapsto L^*,$$

kann in den Plücker-Koordinaten beschrieben werden durch

$$p_{01}^* = p_{23}, p_{02}^* = -p_{13}, p_{03}^* = p_{12}, p_{12}^* = p_{03}, p_{13}^* = -p_{02}, p_{23}^* = p_{01};$$

die Vorzeichen ergeben sich aus den Rechenregeln für alternierende Formen [F-P, p. 34].



Dualität

### 3 Regelflächen

In der Einleitung zu einer seiner letzten Arbeiten [Pl] schreibt Plücker:

*Une ligne droite, qui dans l'espace se meut d'une manière continue, décrit une surface, dite réglée. Pour déterminer le mouvement de la ligne droite, il faut que les quatre quantités dont sa position dépend, soient données en fonction d'une quatrième variable, par ex. du temps. Ces quatre quantités, constantes pour une position donnée de la droite, mais variables d'une position à une autre, ont été appelées par moi coordonnées de la ligne droite. En éliminant le temps, on obtient trois équations entre les quatre coordonnées; ces trois équations représentent trois complexes de lignes droites. Les droites dont les coordonnées satisfont aux trois équations, appartenant à la fois aux trois complexes, constituent une surface réglée.*

Übersetzt in die heutige Sprechweise und den komplexen Fall bedeutet das Folgende: In der Plücker-Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$  ist eine Kurve  $B \subset Q$  (d.h. eine eindimensionale irreduzible algebraische Varietät) gegeben, und eine *Regelfläche*  $X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  ist die Vereinigung der in  $B$  gelegenen Geraden  $L \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ , also

$$X = \bigcup_{L \in B} L \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C}).$$

Man nennt  $B$  eine *Basis* von  $X$ . Die von Plücker skizzierte Klassifikation und Konstruktion ist rein geometrisch und schwer in die algebraische Geometrie zu übersetzen. Dort läuft sie hinaus auf eine Klassifikation aller Kurven auf der Plücker-Quadrik  $Q$ .

Zunächst einige einfache Beispiele für Regelflächen:

**1. Quadriken.** Ist  $A \in GL(4, \mathbb{C})$  eine symmetrische Matrix, so hat die *Quadrik*

$$X := \{x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0\}$$

sogar zwei verschiedene Regelungen, d.h.  $X$  lässt sich durch zwei verschiedene Basen

$B, B' \subset Q$  beschreiben. Das sieht man am einfachsten dadurch, dass man  $X$  durch eine Projektivität auf die *Sattelfläche*

$$Y = \{x \in \mathbb{IP}_3(\mathbb{C}) : x_0x_3 = x_1x_2\}$$

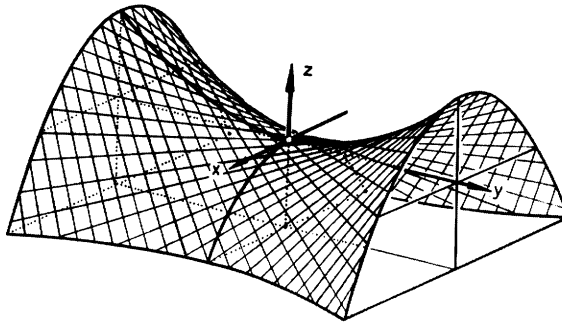
transformiert und bemerkt, dass  $Y$  Bild der Einbettung

$$\mathbb{IP}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{IP}_1(\mathbb{C}) \rightarrow Y \subset \mathbb{IP}_3(\mathbb{C}), (s_0 : s_1 ; t_0 : t_1) \mapsto (s_0t_0 : s_0t_1 : s_1t_0 : s_1t_1),$$

ist. Daraus erhält man die Kurven  $B, B' \subset Q$  als Bilder zweier Abbildungen

$$\mathbb{IP}_1(\mathbb{C}) \rightarrow Q \subset \mathbb{IP}_5(\mathbb{C}).$$

Es sei bemerkt, dass die Quadrik  $X$  glatt ist, d.h. keine Singularitäten hat.



*Affine Sattelfläche  $z = xy$*

**2. Kegel.** Ist  $C \subset \mathbb{IP}_3(\mathbb{C})$  eine Kurve und  $p \in \mathbb{IP}_3(\mathbb{C})$  ein Punkt außerhalb  $C$ , so ist

$$X := \bigcup_{q \in C} \overline{pq} \subset \mathbb{IP}_3(\mathbb{C}),$$

d.h. die Vereinigung der Verbindungsgeraden von  $p$  und  $q$ , ein *Kegel* über  $C$  mit *Spitze*  $p$ . In diesem Fall ist die Basis das Bild einer Abbildung

$$C \rightarrow B \subset Q \subset \mathbb{IP}_5(\mathbb{C}).$$

Wenn  $C$  keine Gerade ist, so ist der Kegel stets singularär in der Spitze  $p$ ; weiterhin längs all der Geraden  $\overline{pq}$ , für die  $C$  in  $q$  singularär ist.

**3. Tangentenflächen.** Ist  $C \subset \mathbb{IP}_3(\mathbb{C})$  eine von einer Geraden verschiedene Kurve,  $C' \subset C$  die Menge der glatten Punkte, und bezeichnet  $\mathbb{T}_p C \subset \mathbb{IP}_3(\mathbb{C})$  die Tangente an  $C$  in  $p \in C'$ , so heißt

$$X := \text{Abschluss von } \bigcup_{p \in C'} \mathbb{T}_p C \subset \mathbb{IP}_3(\mathbb{C})$$

die *Tangentenfläche* von  $C$ . Sie ist eine Regelfläche, die Basis ist Bild einer Abbildung

$$C \dashrightarrow B \subset Q \subset \mathbb{IP}_5(\mathbb{C}),$$

die wegen der Singularitäten von  $C$  nur noch rational ist. Insbesondere hat sie in Punk-

ten von  $C$  mit mehreren Tangenten mehrere Werte in  $Q$ . Die Tangentenfläche ist längs der ganzen Kurve  $C$  singularär, möglicherweise auch noch in anderen Punkten.

Ist etwa  $C$  die *twisted cubic*, d.h. das Bild von

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow C \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C}), \quad (s_0 : s_1) \longmapsto (s_0^3 : s_0^2 s_1 : s_0 s_1^2 : s_1^3),$$

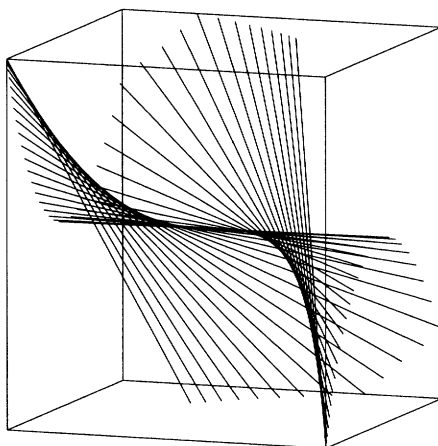
so ist die Tangentenfläche  $X$  Bild der Abbildung

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$$

$$(s_0 : s_1; t_0 : t_1) \longmapsto (3s_0^2 t_0 : 2s_0 s_1 t_0 + s_0^2 t_1 : s_1^2 t_0 + 2s_0 s_1 t_1 : 3s_1^2 t_1),$$

wobei die Kubik  $C$  als Bild der Diagonale  $s = t$  auftritt. Eine Gleichung für  $X$  berechnete Cayley [C] zur Zeit von Plücker mit Hilfe der Diskriminante eines kubischen Polynoms. Das Ergebnis ist (vgl. auch [F-P, p. 60])

$$x_0^2 x_3^2 - 6x_0 x_1 x_2 x_3 + 4x_0 x_2^3 + 4x_1^3 x_3 - 3x_1^2 x_2^2 = 0.$$



*Tangentenfläche der „twisted cubic“*

## 4 Abwickelbarkeit

Im Folgenden wollen wir uns mit einer speziellen Klasse von Regelflächen beschäftigen, nämlich solchen, die *abwickelbar* sind. Im reellen Fall bedeutet das ganz praktisch, dass man auf die Fläche (zumindestens lokal) ein Blatt Papier auflegen kann. Dies kann man übersetzen in eine Bedingung an die Tangentialebenen, die auch im komplex-projektiven Fall greift:

**Definition.** Eine Regelfläche

$$X = \bigcup_{L \in B} L \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$$

heißt *abwickelbar*, wenn die Tangentialebene  $\mathbb{T}_p X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  für alle glatten Punkte von  $X$  längs einer Geraden  $L$  die gleiche ist.

Im Fall einer Fläche  $X \subset \mathbb{R}^3$  weiß man, dass dies gleichbedeutend damit ist, dass die Gauß-Krümmung von  $X$  identisch verschwindet. Insbesondere folgt aus dieser Krümmungs-Bedingung, dass  $X$  lokal Regelfläche ist (vgl. [K, 3.7.5], [F-P, 0.2]). Beispiele für abwickelbare Regelflächen sind neben Ebenen alle Kegel und Tangentenflächen. Dagegen ist die Sattelfläche mit der Gleichung  $x_1 x_2 = x_3$  nicht abwickelbar. Das gleiche gilt in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ : Die Beispiele 2 und 3 aus Abschnitt 3 sind abwickelbar, die Quadriken aus Beispiel 1 nicht.

Die Forderung der Abwickelbarkeit einer Regelfläche ist eine enorme Einschränkung an die Beweglichkeit ihrer Geraden. Das kann man auch direkt an der Basiskurve  $B \subset Q \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$  ablesen: Die Abwickelbarkeit von  $X$  bedeutet, dass für jedes  $L \in B$  die Tangente  $\mathbb{T}_L B \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C})$  an  $B$  im Punkt  $L$  ganz in der Plücker-Quadrik  $Q$  enthalten sein muss [E], [F-P, p. 82].

Es ist ein klassisches Resultat der Differentialgeometrie, dass jede abwickelbare Regelfläche  $X \subset \mathbb{R}^3$  lokal Teil eines Zylinders, eines Kegels oder einer Tangentenfläche ist. Dabei wird eine Ebene als spezieller Zylinder aufgefasst; vom projektiven Standpunkt ist ein Zylinder ein Kegel mit Spitze im Unendlichen. Im differenzierbaren Fall ist ein globales Resultat sehr schwierig (siehe das Zylinder-Theorem in Abschnitt 7), im komplex-projektiven Fall hat man den relativ einfach zu beweisenden [W], [E], [F-P, p. 10].

**Klassifikationssatz.** *Jede abwickelbare Regelfläche  $X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  ist entweder ein Kegel oder eine Tangentenfläche. Insbesondere hat  $X$  singuläre Punkte, es sei denn,  $X$  ist eine Ebene.*

Dieses Ergebnis zeigt schon etwas, das in höheren Dimensionen noch deutlicher wird: Konstruktion und Klassifikation von abwickelbaren Varietäten sind eng verknüpft. Hat man ein interessantes Beispiel gefunden, so ist plausibel zu vermuten, dass es unter den gegebenen Umständen in seiner Art das einzige ist.

## 5 Grassmann-Mannigfaltigkeiten und Plücker-Koordinaten

Statt Geraden im dreidimensionalen Raum kann man allgemeiner  $k$ -dimensionale lineare Unterräume  $E \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  betrachten, diese Menge wird mit  $\mathbf{G}(k, n)$  bezeichnet. Sie ist gleich der Menge der  $(k+1)$ -dimensionalen Untervektorräume  $\widehat{E} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ . Man nennt  $\mathbf{G}(k, n)$  zum Andenken an Plückers Schüler Grassmann (1815–1901) eine *Grassmann-Mannigfaltigkeit*, denn man kann die Struktur einer  $(k+1)(n-k)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit einführen. Überdies hat man die sogenannte *Plücker-Einbettung*

$$\pi : \mathbf{G}(k, n) \longrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) \quad \text{mit } N = \binom{n+1}{k+1} - 1.$$

Daran sei kurz erinnert.

Zu  $\widehat{E} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  wählt man eine Basis  $(v_0, \dots, v_k)$ , die Komponenten trägt man in eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} v_{00} & \cdots & v_{0k} & v_{0k+1} & \cdots & v_{0n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k0} & \cdots & v_{kk} & v_{kk+1} & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix} = (A_1, A_2)$$

ein, wobei  $A_1$  die vordere quadratische Matrix bezeichnet. Da  $\text{rang } A = k + 1$  gibt es einen nicht verschwindenden  $(k + 1)$ -Minor. Wenn  $\det A_1 \neq 0$ , so kann man  $A_1$  durch Zeilenumformungen von  $A$  zur Einheitsmatrix  $E_{k+1}$  machen. Dann sind die  $(k + 1)(n - k)$  Einträge von  $A_2$  durch  $\hat{E}$  eindeutig bestimmt, sie ergeben Koordinaten in einer großen offenen Teilmenge von  $\mathbf{G}(k, n)$ . Allgemein gibt es für jedes

$$I = \{i_0, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, n\} \quad \text{mit } 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$$

einen Minor  $p_I := \det A_I$ . Die  $\binom{n+1}{k+1}$  Zahlen  $p_I$  heißen die *Plücker-Koordinaten* von  $\hat{E} \subset \mathbf{C}^{n+1}$  oder von  $E = \mathbf{IP}(\hat{E}) \subset \mathbf{IP}_n(\mathbf{C})$ . Sie sind durch  $E$  bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\lambda \neq 0$  eindeutig bestimmt, das ergibt die Abbildung

$$\pi : \mathbf{G}(k, n) \longrightarrow \mathbf{IP}_N(\mathbf{C}), \quad E \longmapsto (p_I(E)).$$

Ist  $A_1 = E_{k+1}$ , so entsprechen die  $(k + 1)$ -Minoren von  $A$  bis auf das Vorzeichen den Minoren jeder Größe von  $A_2$ . Aus dieser etwas anderen Beschreibung der Plücker-Koordinaten folgt sofort, dass  $\pi$  eine Einbettung ist, denn alle Einträge von  $A_2$  treten (bis auf Vorzeichen) als Plücker-Koordinaten auf.

Im Fall  $k = 1$  und  $n = 3$  gibt es zwischen den  $p_I$  eine wesentliche quadratische Relation, im allgemeinen sind es mehrere, sie bleiben aber quadratisch [F-P, 1.2.5]. Diese Relationen heißen auch im allgemeinen Fall *Plücker-Relationen*.

Auch hier hat man eine Dualität:

Zu  $\hat{E} \subset \mathbf{C}^{n+1}$  sei  $\hat{E}^0 \subset (\mathbf{C}^{n+1})^*$  der Annulator. Ist  $\dim \hat{E} = k + 1$ , so ist  $\dim \hat{E}^0 = n - k$ , also gilt  $\dim \mathbf{IP}(\hat{E}^0) = n - k - 1$  für  $\mathbf{IP}(\hat{E}^0) \subset \mathbf{IP}_n^*(\mathbf{C})$ . Auf diese Weise erhält man eine bireguläre *Dualitäts-Abbildung*

$$\mathcal{D} : \mathbf{G}(k, n) \longrightarrow \mathbf{G}^*(n - k - 1, n)$$

zwischen Grassmann-Mannigfaltigkeiten, die ein nützliches technisches Hilfsmittel bei geometrischen Untersuchungen ist.

## 6 Regel-Varietäten und Abwickelbarkeit

Es ist klar, wie man mit Hilfe der Grassmann-Mannigfaltigkeiten die Regelflächen in  $\mathbf{IP}_3(\mathbf{C})$  zu Regel-Varietäten in  $\mathbf{IP}_n(\mathbf{C})$  verallgemeinert: Man startet mit einer *Basis*, d.h. einer irreduziblen Varietät  $B \subset \mathbf{G}(k, n)$  und betrachtet die Varietät

$$X := \bigcup_{E \in B} E \subset \mathbf{IP}_n(\mathbf{C}).$$

Im Allgemeinen können die linearen Räume  $E$  in  $X$  ziemlich durcheinander liegen: man kann etwa eine Ebene  $X$  als Vereinigung all der in ihr enthaltenen Geraden darstellen. Um zu erreichen, dass wenigstens fast alle Punkte von  $X$  in höchstens endlich vielen linearen Räumen  $E$  enthalten sind, kann man die Bedingung

$$\dim X = \dim B + k$$

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechung
-------------------	----------------------	-----------------

stellen. In diesem Fall spricht man von einer *Regelung* von  $X$  durch  $k$ -dimensionale lineare Räume.

Eine derartige Regelung von  $X$  heißt *abwickelbar*, wenn längs eines linearen Raumes  $E$  der Tangentialraum  $\mathbb{T}_p X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  in allen glatten Punkten  $p$  von  $X$  gleich ist.

Während allgemeine Regelungen einer Varietät  $X$  nicht leicht zu entdecken sind, kann man eine „maximale“ abwickelbare Regelung durch die *Gauß-Abbildung* erhalten. Diese Methode wurde in der algebraischen Geometrie erstmals systematisch von Griffiths-Harris in [G–H] angewandt. In Analogie zur klassischen Differentialgeometrie versteht man darunter für eine  $m$ -dimensionale Varietät  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  die Abbildung

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbf{G}(m, n), p \mapsto \mathbb{T}_p X,$$

die jedem glatten Punkt  $p \in X$  seinen  $m$ -dimensionalen Tangentialraum  $\mathbb{T}_p X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  zuordnet. Da  $X$  Singularitäten haben darf, ist die Gauß-Abbildung  $\gamma$  nur eine rationale Abbildung, die in singulären Punkten mehrere Werte annehmen kann.

Entscheidend ist der folgende

**Linearitäts-Satz.** *Für jede algebraische Varietät  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  der Dimension  $m$  ist die allgemeine Faser der Gauß-Abbildung*

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbf{G}(m, n)$$

*ein linearer Raum.*

Für die Dimension  $k(X)$  der allgemeinen Faser gilt

$$k(X) = \dim X - \dim \gamma(X).$$

Diese Zahl  $k(X)$  heißt der *Grad der Abwickelbarkeit* von  $X$ ,  $r(X) := \dim \gamma(X)$  heißt der *Gauß-Rang* von  $X$ .

Für den Linearitätssatz gibt es viele Varianten, etwa in [G–H], [F–W], [F–P]. Er ist eine Verallgemeinerung eines Satzes der klassischen Differentialgeometrie, wonach auf Flächen die Integralkurven von Richtungen verschwindender Hauptkrümmung Geraden sind [K, 3.7], [F–P, p. 3].

Aus dem Linearitätssatz erhält man die *Gauß-Regelung* von  $X$  mit einer Basis

$$B \subset \mathbf{G}(k(X), n),$$

die alle Tangentialräume an glatte Punkte von  $X$  enthält. Im Allgemeinen ist jedoch  $k(X) = 0$ , d.h.  $r(X) = \dim X$ , was bedeutet, dass die Gauß-Abbildung generisch endlich ist, d.h. fast alle Fasern sind endlich. Wegen der Linearität der Fasern ist die Gauß-Abbildung dann sogar birational. Das ist nicht ganz überraschend: Man weiß, dass nicht-lineare algebraische Varietäten selten lineare Unterräume positiver Dimension enthalten. Eine glatte kubische Fläche im  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  enthält genau 27 Geraden, eine Fläche höheren Grades im Allgemeinen gar keine Gerade. Eine Regelung oder gar eine abwickelbare Regelung ist eine noch viel einschneidendere Bedingung. Aus den fundamentalen Ergebnissen, die F. L. Zak um 1980 erzielte, folgt sofort der

**Satz.** *Eine algebraische Varietät  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ , die abwickelbar ist vom Grad  $k(X) > 0$ , muss Singularitäten haben.*



Dieser Satz ist nur ein erster kleiner Hinweis darauf, dass man bei der Suche nach abwickelbaren Varietäten besonders auf die Singularitäten achten muss. Beweise findet man etwa in [Fu-L], [F-P].

Natürlich gibt es für jedes  $k$  und  $r$  mit  $k + r \leq n$  stets triviale Beispiele für abwickelbare Varietäten  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  mit

$$\dim X = k + r \quad \text{und} \quad \dim \gamma(X) = r,$$

nämlich *Kegel*. Zu einem Kegel gehören eine Varietät  $Y \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  und ein linearer Raum  $E \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  mit  $Y \cap E = \emptyset$ . Dann ist die *Verbindungsvarietät*

$$X := Y \# E$$

der Abschluss der Menge aller Verbindungsgeraden zwischen Punkten von  $Y$  und  $E$ ; es gilt

$$\dim X = \dim Y + \dim E + 1.$$

$X$  heißt *Kegel* mit *Basis*  $Y$  und *Spitze*  $E$ .

Wählt man  $Y$  mit  $\dim \gamma(Y) = \dim Y = r$  und  $E$  mit  $\dim E = k - 1$ , so ist  $X$  abwickelbar vom Grad  $k$  und vom Gauß-Rang  $r$ ; die Fasern der Gauß-Abbildung sind die linearen Räume  $q \# E$ ,  $q \in Y$  (siehe etwa [F-P, p. 70]). Der Kegel  $X$  ist in  $E$  singular.

Ist  $Y$  glatt, und liegt  $E$  im Unendlichen, so ist  $X$  vom affinen Standpunkt ein glatter Zylinder.

## 7 Konstruktion und Klassifikation abwickelbarer Varietäten vom Gauß-Rang 1

Wie wir gesehen haben ist eine algebraische Varietät  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  im Allgemeinen nicht abwickelbar, d.h.  $r(X) = \dim X$ . Der andere Extremfall ist  $r(X) = 0$ , dann ist  $\gamma(X)$  ein Punkt und  $X$  linear. Im Fall  $r(X) = 1$  ist das Gauß-Bild eine Kurve, und  $X$  ist geregelt in lineare Räume der Dimension  $\dim(X) - 1$ . Dafür gibt es altbekannte Beispiele.

Man startet mit einer Kurve  $C \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ , die nicht in einem echten linearen Teilraum des  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  enthalten ist (andernfalls kann man  $n$  verkleinern). Zu jeder natürlichen Zahl  $l$  mit  $0 \leq l \leq n - 1$  gibt es für fast alle Punkte  $p \in C$  eine *oskulierende  $l$ -Ebene*

$$\mathbb{T}_p^l C \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$$

der Dimension  $l$ . Für  $l = 0$  ist das  $p$ , für  $l = 1$  die Tangente, für  $l = 2$  die Schmiegebene, etc. Der Abschluss der Vereinigungen ist die oskulierende Varietät der Ordnung  $l$  von  $C$ ,

$$\mathbb{T}^l C \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \dim \mathbb{T}^l C = l + 1.$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $\mathbb{T}^l C$  den Gauß-Rang 1 hat, die Gauß-Regelung ist durch die oskulierenden Ebenen der Dimension  $l$  gegeben.

Nun kann man dieses Beispiel noch trivial erweitern, indem man  $\mathbb{T}^l C$  als Basis eines Kegels

$$X := \mathbb{T}^l C \# E \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$$

mit einem linearen Raum  $E$  als Spitze wählt. Dann gilt für die Gauß-Ränge

$$r(X) = r(\mathbb{T}^l C) = r(C) = 1.$$

Dass es keine weiteren Beispiele gibt, zeigt der erstmals 1979 von Griffiths-Harris [G-H] bewiesene

**Klassifikationssatz.** *Jede algebraische Varietät  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  vom Gauß-Rang 1 ist Kegel über der oskulierenden Varietät einer Kurve, d.h. es gibt  $C, l$  und  $E$  so, dass*

$$X = \mathbb{T}^l C \# E.$$

Andere Beweise findet man in [P-1] und [F-P].

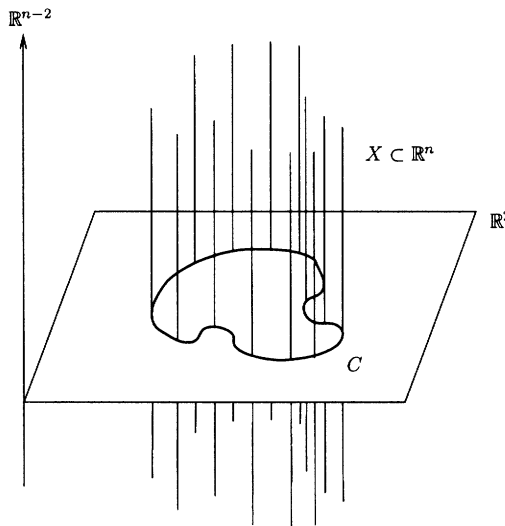
Wie schon in Abschnitt 4 erwähnt wurde, ist die globale Klassifikation abwickelbarer reeller Regelflächen lange ein offenes Problem gewesen. Man könnte nämlich versuchen, kleine glatte Teile von Zylindern, Kegeln und Tangentenflächen in differenzierbarer Weise zu einer globalen glatten Fläche zusammenzukleben. Um 1960 wurde erstmals bewiesen, dass dies unmöglich ist. Von Hartman-Nirenberg stammt das

**Zylinder-Theorem.** *Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte, abgeschlossene Hyperfläche. Wenn das Differential der Gauß-Abbildung*

$$X \rightarrow S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

*überall den Rang 1 hat, so ist  $X$  ein Zylinder über einer glatten Kurve. Nach einer orthogonalen Koordinatentransformation gibt es also eine Zerlegung  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$  und eine glatte Kurve  $C \subset \mathbb{R}^2$ , so dass*

$$X = C \times \mathbb{R}^{n-2}.$$



Zylinder  $X$  über einer Kurve  $C$

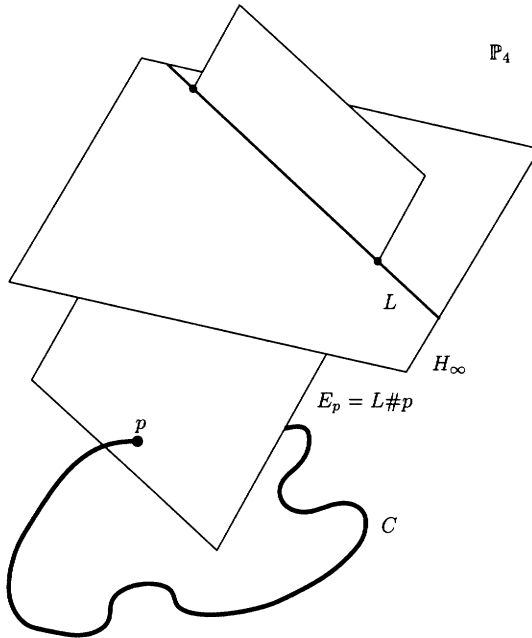
## 8 Abwickelbare Varietäten von höherem Gauß-Rang

Das Zylinder-Theorem von Hartman-Nirenberg gilt nicht mehr, wenn der Gauß-Rang größer als 1 ist. Auf der Grundlage von Konstruktionen von Sackstedter [S], Vitter [V] und Bourgain-Wu [Wu] geben wir die komplex-projektive Beschreibung eines Gegenbeispiels, das von Vitter im affinen Raum als „twisted cylinder“ bezeichnet wurde.

Wir beginnen mit einem gewöhnlichen 3-dimensionalen Zylinder über einer Kurve im  $\mathbb{R}^4$ , mit Ebenen als „Mantellinien“. Vom komplex-projektiven Standpunkt ist es ein Kegel  $X$  in  $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$  über einer Kurve  $C$  mit einer Geraden  $L \subset H_\infty$ , der unendlich fernen Hyperebene, als *Spitze*. Die Mantellinien sind die Ebenen der Verbindungsgeraden

$$E_p = L\#p, \quad p \in C, \quad \text{also} \quad X = \bigcup_{p \in C} (L\#p).$$

Wenn  $C$  eine Gerade ist, so wird  $X$  ein 3-dimensionaler linearer Raum.



*Affiner Zylinder als Kegel im projektiven Raum*

Im Gegensatz zu diesem gewöhnlichen Kegel wird beim „twisted cone“ die Spitze bewegt. Im einfachsten Fall wählen wir als Kurve  $C \subset \mathbb{P}_4(\mathbb{C})$  eine Gerade mit der Parameterisierung

$$\lambda : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow C \subset \mathbb{P}_4(\mathbb{C}), (s_0 : s_1) \mapsto (s_1 : 0 : 0 : 0 : -s_0),$$

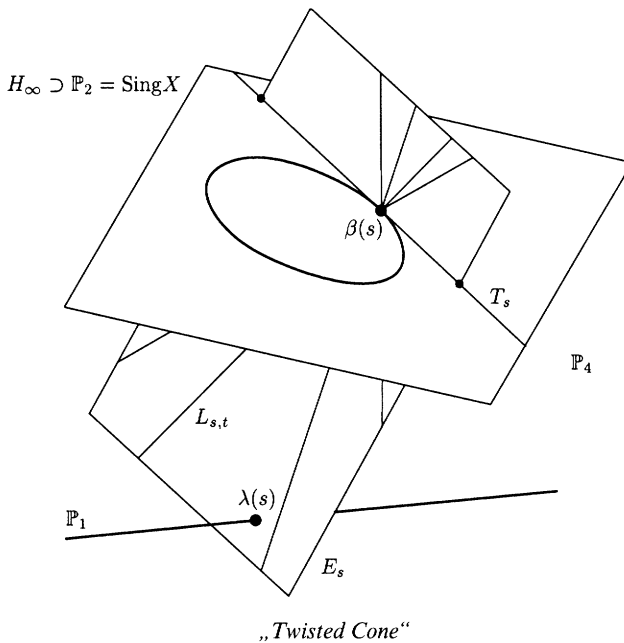
und anstatt der festen Geraden  $L$  betrachten wir den „Kreis“

$$\beta : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow H_\infty \subset \mathbb{P}_4(\mathbb{C}), (s_0 : s_1) \mapsto (0 : s_0^2 : s_0 s_1 : s_1^2 : 0)$$

und seine Tangente  $T_s$  im Punkt  $\beta(s)$ . Dann ist der „twisted cone“  $X$  erklärt als Vereinigung der Verbindungsebenen

$$E_s := T_s \# \lambda(s), \quad \text{also } X := \bigcup_{s \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})} (T_s \# \lambda(s)).$$

$X$  ist geregelt in die Ebenen  $E_s$ , aber diese Regelung ist nicht abwickelbar.



Jede Ebene  $E_s$  ist Vereinigung der in ihr enthaltenen Geraden  $L_{s,t}$  durch  $\beta(s)$ , also

$$E_s = \bigcup_{t \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})} L_{s,t}.$$

$X$  ist eine Kubik mit der Gleichung

$$x_0^2 x_1 + x_0 x_4 x_2 + x_4^2 x_3 = 0$$

und singulär in der unendlich fernen Ebene

$$x_0 = x_4 = 0.$$

Die Fasern der Gauß-Abbildung von  $X$  sind die Geraden  $L_{s,t}$ ; also ist die Basis der Gauß-Regelung birational äquivalent zu einem  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $\mathbb{P}_1$  und damit zur projektiven Ebene  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  (vgl. [Hi]); für den Gauß-Rang gilt  $r(X) = 2$ .

Wäre der endliche Teil von  $X$  ein Zylinder, so wäre  $X$  ein Kegel mit einem Punkt als Spitze. Die Geraden  $L_{s,t}$  gehen aber nicht durch denselben Punkt im Unendlichen, weil  $\beta(s)$  im Kreis läuft; das verursacht den „twist“. Wir fassen noch einmal zusammen:

Der oben konstruierte „twisted cone“  $X \subset \mathbb{P}_4(\mathbb{C})$  ist eine kubische Hyperfläche mit einer singulären Ebene. Der Gauß-Rang von  $X$  ist 2,  $X$  ist kein Kegel.

Nun ist es klar, wie ein „twisted cone“ allgemeiner erklärt werden kann: Man startet mit einer kompakten Riemannschen Fläche  $S$  als Parameterraum und zwei Kurven

$$\lambda : S \rightarrow C \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad \beta : S \rightarrow C_\infty \subset H \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C}),$$

wobei  $C_\infty$  in einer Hyperebene  $H$  liegt (die man als unendlich ferne Hyperebene ansehen kann) und  $C \not\subset H$ . Die Zahl  $l_0 \leq n - 1$  sei die minimale Dimension eines linearen Raumes, der  $C_\infty$  enthält. Dann gibt es eine offene Teilmenge  $S' \subset S$  derart, dass für alle  $l$  mit  $1 \leq l \leq l_0 - 1$  und alle  $s \in S'$  die oskulierenden  $l$ -Ebenen  $\mathbb{T}_{\beta(s)}^l C_\infty$  erklärt sind, und

$$X := \text{Abschluss von } \bigcup_{s \in S'} \left( \mathbb{T}_{\beta(s)}^l C_\infty \# \lambda(s) \right)$$

heißt ein *twisted cone*. Es gilt

$$\dim X = l + 2, \quad r(X) = 2 \quad \text{und} \quad \text{Sing}(X) \subset H.$$

Die Bedeutung dieses Beispiels zeigt der

**Satz.** *Jede algebraische Varietät  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  vom Gauß-Rang 2, deren Singularitäten in einer Hyperebene enthalten sind, ist ein Kegel oder ein „twisted cone“.*

Dieses Ergebnis stammt von Piontkowski [P-2], eine affine Version für Hyperflächen wurde von Wu-Zheng [Wu-Z] bewiesen.

Wenn man nicht verlangt, dass die Singularitäten in einer Hyperebene enthalten sind, so gibt es weitere Typen von Varietäten vom Gauß-Rang 2. In der Dimension 3 hat man etwa die Verbindungsvarietäten (oder „joins“) zweier Kurven mit dem Grenzfall der Sekantenvarietät einer Kurve. Weitere Beispiele findet man in [A-G-L], [M-T], [P-3]. Die Klassifikation der Hyperflächen vom Gauß-Rang 2 kann man mittels Dualität auf die Klassifikation nicht abwickelbarer Flächen zurückführen [F-P].

Insgesamt scheint die Klassifikation aller abwickelbaren Varietäten weit komplizierter zu sein, als in [G-H] angedeutet. Inwieweit es sich lohnt, weiter Schubladen zu basteln, wollen wir hier offen lassen.

## References

- [A] Abe, K.: *A Complex Analogue of Hartman-Nirenberg Cylinder Theorem*. J. Diff. Geom. **7**, 453–460 (1972).
- [A-G-L] Akivis, M., Golberg, V. and Landsberg, J.: *On the structure of varieties with degenerate Gauss mappings*. arXiv:math.AG/0111039.
- [B] Bödighheimer, C.F.: *Julius Plücker – ein Lebensabriss*. Erscheint im Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.
- [C] Cayley, A.: *On Certain Developable Surfaces*. Quart. Jour. of Pure and Appl. Math. **VI**, 108–126 (1864).
- [E] Ehrhard, D.: *Abwickelbare Regelflächen in der reellen und komplexen Differentialgeometrie*. Diplomarbeit, Düsseldorf 1989.

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechung
-------------------	----------------------	-----------------

- [F] Fischer, G.: *Abitur 1865: Reifeprüfungsarbeit in Mathematik von Felix Klein*. Der Math. Nat. Unterricht **38**, 459–465 (1985).
- [F-P] Fischer, G. and Piontkowski, J.: *Ruled Varieties, An Introduction to Algebraic Differential Geometry*. Vieweg 2001.
- [F-W] Fischer, G. and Wu, H.H.: *Developable Complex Analytic Submanifolds*. Int. J. Math. **6**, 229–272 (1995).
- [Fu-L] Fulton, W. and Lazarsfeld, R.: *Connectivity and its Applications in Algebraic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics **862**, 26–92, Springer 1981.
- [G-H] Griffiths, P. and J. Harris: *Algebraic Geometry and Local Differential Geometry*. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **12**, 355–432 (1979).
- [Ha] Harris, J.: *Algebraic Geometry*. Springer 1992.
- [H-N] Hartman, P. and Nirenberg, L.: *On spherical image maps whose Jacobian do not change signs*. Amer. Jour. Math. **81**, 901–920 (1959).
- [Hi] Hirzebruch, F.: *Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. **124**, 77–86 (1957).
- [K] Klingenberg, W.: *A Course in Differential Geometry*. Springer 1978.
- [M-T] Mezzetti, E. and Tommasi, O.: *On projective varieties of dimension  $n + k$  covered by  $k$ -spaces*. arXiv:math.AG/0111319.
- [P-1] Piontkowski, J.: *A normal form for curves in Grassmannians*. manuscripta math. **89**, 79–85 (1996).
- [P-2] Piontkowski, J.: *Developable varieties with all singularities at infinity*. manuscripta math. **106**, 75–99 (2001).
- [P-3] Piontkowski, J.: *Developable varieties of Gauss rank 2*. Int. J. Math. **13**, 93–110 (2002).
- [Pl] Plücker, I.: *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction*. Annali di matematica **1**, 160–169 (1867).
- [S] Sacksteder, R.: *On hypersurfaces with no negative sectional curvature*. Amer. J. Math. **82**, No. 3, 609–630 (1960).
- [V] Vitter, A.: *Twisted-Cylinder Theorem for Complex Submanifolds*. Preprint, 1979.
- [W] Wilczynski, E.: *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*. Teubner 1906.
- [Wu] Wu, H. H.: *Complete Developable Submanifolds in Real and Complex Euclidean Space*. Int. J. Math. **6**, 461–489 (1995).
- [Wu-Z] Wu, H. and F. Zheng: *Developable Submanifolds in Euclidian Space*. To appear in Commun. Anal. Geom.



## Leopold Vietoris zum Gedenken

4. 6. 1891 – 9. 4. 2002

Heinrich Reitberger

### Überblick

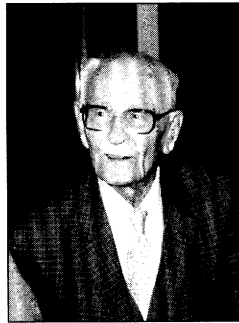
- Keywords and Phrases: Leopold Vietoris, obituary, biography, bibliography.
- Mathematics Subject Classification: 01 A 470, 26 D 05, 54-03, 54 A 20, 54 B 20, 55-05, 55 N 35

After a short biography of L. Vietoris we review his contributions to the foundations of general and algebraic topology, as well as his other work.

Eingegangen: 20. 6. 2002

Heinrich Reitberger, Institut für Mathematik, Universität Innsbruck,  
Technikerstr. 25, A-6020 Innsbruck, heinrich.reitberger@uibk.ac.at

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002



*Leopold Vietoris im Jahre 1999*

Am 9. April 2002, also kurz vor seinem 111. Geburtstag, verschied Prof. Leopold Vietoris nach kurzer Krankheit in einem Innsbrucker Sanatorium. Mit seinem Tod verliert die Universität Innsbruck einen weltbekannten Forscher, die Deutsche Mathematikervereinigung ein Ehrenmitglied. Vietoris war Träger des Goldenen Ehrenzeichens für Wissenschaft und Kunst, des Großen Goldenen Ehrenzeichens mit Stern für Verdienste um die Republik Österreich und verschiedener weiterer hoher Auszeichnungen.

## 1 Biographische Notizen

L. Vietoris wurde am 4. Juni 1891 in Radkersburg geboren. Nach seiner Reifeprüfung am Benediktinergymnasium in Melk studierte er bis 1914 an der Wiener Technischen Hochschule Mathematik und Darstellende Geometrie. Als Einjährig-Freiwilliger zog er in den Krieg – im September 1914 wurde er bereits verwundet und nach seiner Genesung als Bergführer an die Südfront geschickt, wo er schließlich in italienische Gefangenschaft geriet. Infolge der zuvorkommenden Behandlung war es ihm möglich, seine Dissertation, die er bereits bei einem Urlaub in Wien begonnen hatte, rasch fertigzustellen und sie nach seiner Entlassung bei G. v. Escherich und W. Wirtinger einzureichen. Im Juli 1920 promovierte Vietoris an der Wiener Universität – zuvor hatte er noch die Lehramtsprüfung abgelegt. Während der nun folgenden Unterrichtstätigkeit erhielt er eine Postkarte von Escherich mit dem Angebot einer Assistentenstelle an der Technischen Hochschule Graz. Zwei Jahre später ging er nach Wien und habilitierte sich dort mit seiner dritten Publikation! Im Sommersemester 1925 trat Vietoris ein dreisemestriges Rockefeller-Stipendium in Amsterdam bei L.E.J. Brouwer an, nach dessen Ablauf er einem Ruf als a.o. Professor aus Innsbruck folgte. 1928 kehrte er als ordentlicher Professor an die TH nach Wien zurück und 1930 ließ er sich endgültig als Ordinarius und Nachfolger von K. Zindler in Innsbruck nieder. Im zweiten Weltkrieg wird er neuerlich verwundet, nach Kriegsende übernimmt er zum zweiten Mal das Amt des Dekans, da er politisch unbelastet war, wie auch die französische Militärbehörde bestätigt, als er die lokale Mathematisch-Physikalische Gesellschaft neu gründet. 1961 emeritiert er – sein Nachfolger wurde G. Lochs –, bleibt aber weitere 40 Jahre dem Institut für Mathematik eng verbunden.



Im Herbst 1928 heiratete Leopold Vietoris Klara v. Riccabona, die bei der Geburt der sechsten Tochter einem Kindbettfieber erlag. 1936 ehelichte er Maria Riccabona, seine Schwägerin, die die Mutterrolle für seine Töchter übernahm und ihm seither eine fürsorgliche Gattin war. Sie verstarb kurz vor dem Ableben ihres Gatten.

## 2 Grundlagen der allgemeinen Topologie<sup>1</sup>

Leopold Vietoris führte in seiner Dissertation: *Stetige Mengen* [2] erstmalig *gerichtete Mengen, verallgemeinerte Folgen und die dazu äquivalenten Filterbasen* ein:

Er definiert eine *orientierte Menge* als partiell geordnete Menge  $A$ , die der *Richtungsbedingung*

(D3) Für  $\alpha \in A, \beta \in A$  gibt es ein  $\gamma \in A$  so dass  $\gamma > \alpha$  und  $\gamma > \beta$ ;

genügt und betrachtet *Mengen zweiter Ordnung*, d.h. Systeme von Mengen, die *durch eine gerichtete Menge indiziert sind*, also verallgemeinerte Folgen – nicht nur mit Werten in  $\mathbf{R}$ .

1937 schreibt G. Birkhoff in „Moore-Smith convergence in general topology“ [Bir37]: „It is primarily condition (D3) which was due to Moore and Smith, and which distinguishes directed sets from other partially ordered sets.“ (D3) scheint zwar als „composition property“ in E.H. Moore – H.L. Smith [MS22] auf, aber eben erst 1922 und nur für  $\mathbf{R}^2$ . Bemerkenswert ist übrigens, dass Birkhoff die Vietorissche Arbeit bezüglich der *Trennungssaxiome*, auf die wir noch eingehen, zitiert, sie aber nicht zu Ende gelesen zu haben scheint!

Vietoris erfand aber auch noch gleich ein zu den Netzen, wie J. Kelley die verallgemeinerten Folgen kurz nennt, äquivalentes Konzept, die *Filterbasis*:

Er abstrahiert den für zwei Umgebungen eines Punktes einsichtigen Tatbestand, dass der Durchschnitt der beiden wiederum eine Umgebung bildet, zum fundamentalen Begriff des *Kranzes* (heute *Filterbasis* oder auch *Raster* genannt):

**Definition.** Eine Menge zweiter Ordnung (= System von Mengen) heißt *Kranz*, falls der Durchschnitt je zweier Elemente (= Mengen) wiederum ein Element  $\neq \emptyset$  dieser Menge zweiter Ordnung enthält.

Eine Filterbasis  $\mathbf{F}$  auf einem topologischen Raum  $X$  konvergiert gegen  $x \in X$ , falls jede Umgebung von  $x$  eine Menge aus  $\mathbf{F}$  enthält.

Vietoris formuliert auch gleich die Äquivalenz der beiden „verallgemeinerten Konvergenzbegriffe“: Bezüglich der Inklusion bildet ein Kranz ein gerichtetes System von Mengen und umgekehrt bilden die *Reste*  $R(B) := \{x \in M; b < x \forall b \in B\} \neq \emptyset$  einer gerichteten Menge  $M$  einen Kranz. Vietoris entwickelt also von Beginn an parallel die heutige Konvergenztheorie für verallgemeinerte Mengenfolgen und Filterbasen durch Vergleich mit der gerichteten Menge der Umgebungen.

1935 hat Birkhoff [Bir35] die Filterbasen wiederentdeckt. Als eigentlicher „Erfinder“ gilt aber H. Cartan [Car37a], [Car37b]: Er nimmt zu jeder Menge einer Filterbasis alle ihre Obermengen zum System hinzu und nennt dies dann *Filter*. In seinem Buch über uniforme Strukturen und allgemeine Topologie schreibt A. Weil [Wei38] 1937: „Seit der

Zusammenstellung dieses Werks hat H. Cartan den Filterbegriff entdeckt, der endgültig die Abzählbarkeit aus der Topologie eliminiert, indem er den Folgenbegriff ersetzt und bedeutende Vereinfachungen der Theorie der uniformen und kompakten Räume ermöglicht.“

J. Schmidt, der 1953 seine Arbeit „Beiträge zur Filtertheorie II“ [Sch53] Vietoris widmet, bemerkt darin – ohne allerdings zu erwähnen, dass sich auch gerichtete Mengen und Netze bereits bei Vietoris finden:

„Die Geschichte des Filters trägt offenbar ähnliche Züge wie die anderer menschlicher Erfindungen. Da ist der Vorläufer, dessen Entdeckung unbeachtet bleibt, bis plötzlich, zu herangereifter Zeit, gewissermaßen die Luft mit dieser Idee trüchtigt, die Entdeckung gleich von mehreren Geistern, unabhängig voneinander und in Unkenntnis des Vorläufers, wiederholt wird. Überzeugender könnte wohl ein Beweis für die innere Notwendigkeit des Neuen nicht gefunden werden.“

N. Bourbaki, der den Filtern eine zentrale Rolle beim Aufbau seiner allgemeinen Topologie zuweist, erwähnt übrigens auch in der Auflage aus dem Jahre 1989 Vietoris nicht, ebensowenig wie dies J.P. Pier [Pie80] 1980 in seinem historischen Überblick getan hat. Eine Erklärung mag vielleicht sein, dass im – sonst ausgezeichneten – Enzyklopädie-Artikel [17], den Tietze und Vietoris 1930 verfassten, die Begriffe *Kranz* und *orientierte Menge* (aus Bescheidenheit?) nicht vorkommen.

L. Vietoris sah sofort, dass man seine verallgemeinerten Folgen benötigte, um die Kraft der Bolzano-Weierstrass-Charakterisierung in topologische Räume hinüber retten zu können.

Er definiert Teilmengen  $K$  eines Hausdorff-Raums  $X$  als *lückenlos*, falls jede verallgemeinerte Folge einen Häufungspunkt in  $K$  hat. Dabei versteht man unter einem Häufungspunkt eines Netzes einen Punkt, für den jede Umgebung zumindest ein Element des Netzes enthält.

Er gibt auch gleich die Charakterisierung durch Filterbasen und weitere äquivalente Formulierungen, nicht jedoch die Charakterisierung durch die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft, die unter der Bezeichnung *bikompakt* ab 1923 von Alexandrov und Urysohn verwendet wurde. Es sei nur eines der Theoreme erwähnt, die Vietoris für kompakte Räume beweist:

**2.1 Theorem.** *Zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen  $A$  und  $B$  besitzen umschließende Umgebungen mit leerem Durchschnitt. (In moderner Terminologie: Ein kompakter Raum ist normal.)*

Bemerkenswert ist, dass diese *Trennungseigenschaft*, die später von H. Tietze eingeführt wurde, hier erstmalig erwähnt wird.

Vietoris startet seine Dissertation mit den Umgebungsaxiomen (unter Einschluss der Hausdorffschen Separationseigenschaft) und fügt hinzu:

(E) Eine Umgebung  $U_x$  eines Punktes  $x$  enthält stets eine Umgebung  $W_x$  von  $x$ , so dass jeder Punkt des Komplements von  $U_x$  samt einer seiner Umgebungen im Komplement von  $W_x$  liegt;

und erläutert dazu in einer Fußnote: Axiom (E) kommt bei Hausdorff<sup>3</sup> nicht vor, dafür aber zwei Abzählbarkeitsaxiome.

Die heutige etwas abweichende Formulierung dieser Trennungseigenschaft der *Regularität* findet sich 1923 bei Tietze, der Name geht auf Alexandrov zurück.

**2.2 Regularität** Ein Hausdorff-Raum  $X$  heißt *regulär*, falls jede abgeschlossene Menge  $A \subset X$  und jeder Punkt  $x \in X \setminus A$  disjunkte Umgebungen besitzen.

Abschließend gehen wir noch auf die Habilitationsschrift [3] von Vietoris ein, den *Hyperraum* – eine Idee, die in der Hitliste der Folgearbeiten wohl den zweiten Rang einnimmt:

Es geht um die Frage, wie man das System aller abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen  $\mathbf{CL}(S)$  eines topologischen Raums  $(S, \mathbf{T})$  wiederum mit einer *räumlichen Struktur* (also einer Topologie) versehen kann – ein in vielen Zweigen der Mathematik wichtiger Prozess!

**Satz.** Für jede endliche Kollektion  $U_1, \dots, U_n \in \mathbf{T}$  bilden die Mengen

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle := \{A \in \mathbf{CL}(S); A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ und } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ für jedes } i = 1, \dots, n\}$$

die Basis einer Topologie auf  $\mathbf{CL}(S)$ .

Im Falle eines kompakten zusammenhängenden metrischen Raumes  $X$  stimmt diese *Vietoris-Topologie* auf  $\mathbf{CL}(X)$  mit der von der sog. *Hausdorff-Metrik* induzierten Topologie überein.

### 3 Algebraische Topologie

In der *algebraischen* Topologie geht es darum, Strategien zu entwickeln, um mit algebraischen Hilfsmitteln zu entscheiden, ob zwei topologische Räume homöomorph sind. Die Anwendungen reichen von der einfach klingenden Frage, ob auch in höheren Dimensionen ein Produkt wie bei den komplexen Zahlen existiert, bis zur Knotentheorie und deren Verwendung in der Elementarteilchenphysik und Biochemie. Dabei werden den Räumen *algebraische Invarianten* zugeordnet, die nur von der Homöomorphieklasse abhängen. Falls diese bei zwei Räumen nicht übereinstimmen, weiß man somit, dass die Räume nicht homöomorph sein können.

Seit Poincaré versuchen die Topologen, geeignete Invarianten zu finden – zunächst für Simplicialkomplexe, dann allgemeiner für metrische Räume, wie uns Vietoris gezeigt hat [10]. Von metrischen Räumen kann man dann mittels *Überdeckungen* auf beliebige topologische Räume verallgemeinern.

Zunächst also zum sog. *Vietoris-Komplex*: Sei  $X$  ein metrischer Raum. Ein (geordnetes)  $n$ -dimensionales  $\epsilon$ -Simplex  $\sigma^n$  von  $X$  ist ein  $(n+1)$ -Tupel von Punkten  $e_0, e_1, \dots, e_n$  in  $X$ , sodass der Abstand von je zweien kleiner als  $\epsilon$  ist. Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Eine formale Linearkombination  $\sum g_i \sigma_i^n$  von  $\epsilon$ -Simplizes mit Koeffizienten  $g_i \in G$  nennt man eine  $\epsilon$ -Kette in  $X$ . Der Rand eines  $\epsilon$ -Simplexes  $\sigma^n = [e_0, \dots, e_n]$  ist definiert durch

$$\partial \sigma^n := \sum_i (-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n].$$

Dies ist wiederum eine  $\epsilon$ -Kette. Durch lineare Fortsetzung ergibt sich der Rand einer beliebigen  $\epsilon$ -Kette.  $\epsilon$ -Ketten mit Rand null nennt man  $\epsilon$ -Zykeln. Eine  $\epsilon$ -Kette  $x^n$  heißt  $\eta$ -homolog null in  $X$ , geschrieben  $x^n \sim_\eta 0$ , falls  $x^n = \partial y^{n+1}$  für eine  $\eta$ -Kette  $y^{n+1}$  in  $X$ . Eine Folge  $z^n = (z_1^n, \dots, z_k^n, \dots)$  von  $\epsilon_k$ -Zykeln  $z_k^n$  in  $X$  nennt nun Vietoris *fundamental*, falls  $\epsilon_k \rightarrow 0$  (für  $k \rightarrow \infty$ ) und für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon)$  existiert, sodass für alle  $l, m > N(\epsilon)$ ,  $z_l^n \sim_\epsilon z_m^n$ , d.h.  $z_l^n - z_m^n \sim_\epsilon 0$  in  $X$ . Die Fundamentalfolgen bilden eine Gruppe  $Z_n(X, G)$ . Eine Fundamentalfolge  $z^n$  heißt genau dann nullhomolog, wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N$  existiert, sodass  $z_k^n \sim_\epsilon 0$  für alle  $k \geq N$ . Die Faktorgruppe (vgl. dazu auch Hirzebruch [Hir99] und MacLane [ML86])

$$H_n(X, G) = Z_n(X, G) / \{\text{Nullfolgen}\}$$

ist nun das zentrale Objekt für die weiteren Untersuchungen von Vietoris – die *n-te Homologiegruppe*.<sup>4</sup>

Zunächst dazu aber eine Episode am Rande: Bis zum 2. Weltkrieg gehörten der Vietoris-Komplex und V(ietoris)-Zykeln zum Standardwissen aller Topologen (vgl. [Lef42]). Vor 20 Jahren wurde er allerdings von E. Rips bei der Untersuchung hyperbolischer metrischer Gruppen wiedererfunden, M. Gromov verwendet ihn bei seinen fundamentalen Arbeiten über diese Gruppen und erst J.-Cl. Hausmann hat 1995 gesehen, dass dieses Konzept auf Vietoris zurückgeht und nennt ihn nun *Vietoris-Rips-Komplex*.

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Bestimmung der Homologiegruppen eines Raumes ist nun ein Verfahren, das es erlaubt, auf einfachere Teilstücke zurückzugreifen. Dies liefert die *Mayer-Vietoris-Sequenz*, das wohl am weitesten bekannte Resultat, das mit dem Namen Vietoris verknüpft ist.

**3.1 Mayer-Vietoris-Sequenz.** *Seien  $K_1, K_2$  Unterkomplexe eines simplizialen Komplexes  $K$ . Dann ist die folgende Sequenz von Homologiegruppen*

$$\dots \rightarrow H_q(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \rightarrow H_q(K_1 \cup K_2) \rightarrow H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \dots$$

exakt, d.h. an jeder Stelle gilt Bild = Kern.

W. Mayer schreibt in [May29]: „In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte. In den vielen Gesprächen über dieses Gebiet hat mir Herr Vietoris eine Fülle Anregungen gegeben, für die ich ihm meinen besten Dank ausdrücke.“

L. Vietoris meint dazu in [15]: „W. Mayer, dem ich das Problem samt vermutungsweisen Angaben über Weg und Antwort mitgeteilt habe, hat das Problem in diesen Monatsheften, soweit es sich auf die Bettischen Zahlen bezieht, auf zum Teil anderem Weg gelöst. Im folgenden will ich den von mir damals ins Auge gefassten Gedankengang wieder aufgreifen und zur allgemeinen Lösung verwenden.“

Vietoris rechnet also mit den Homologiegruppen und nicht nur mit den Bettizahlen, d.h. deren Rangzahlen.

Im Mai 1946 führte J. Leray die heute zentralen Begriffe *Garbe*, *Garbenkohomologie* und *Spektralsequenz* ein. Seine Motivation war folgende Situation (vgl. Dieudonné [Die89]):

Seien  $X, Y$  topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Hauptproblem ist (nach Leray), die Homologie von  $X$  und die Homologie von  $Y$  miteinander in Beziehung zu bringen — allenfalls unter einschränkenden Bedingungen für  $f$ .

Leray erwähnt aber nicht, dass Leopold Vietoris 20 Jahre zuvor mit der Definition der Homologiegruppen für den Fall kompakter metrischer Räume auch gleich ein solches Ergebnis mitgeliefert hat (siehe [10]):

*Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume — und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen.*

Jetzt also zum zweiten Teil der Vietorisschen Arbeit, dem Abbildungstheorem (in der Formulierung von Stephen Smale, der es nämlich 1957 verallgemeinert hat):

**3.2 Vietoris-Beglesches Abbildungstheorem.** *Es seien  $X, Y$  kompakte metrische Räume,  $f: X \rightarrow Y$  surjektiv und stetig. Für alle  $0 \leq r \leq n - 1$  und alle  $y \in Y$  seien die (reduzierten)  $\tilde{H}_r(f^{-1}(y)) = 0$  (bei Vietoris ist  $G := \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  und wird nun in der Bezeichnung der Homologiegruppen unterdrückt). Dann ist der induzierte Homomorphismus*

$$f_*: \tilde{H}_r(X) \rightarrow \tilde{H}_r(Y)$$

ein Isomorphismus für  $r \leq n - 1$  und ein Epimorphismus für  $r = n$ .

Die Fasern sind also als *azyklisch* („löcherfrei“) vorausgesetzt. (Anders ausgedrückt, sie besitzen dieselbe Homologie wie ein einzelner Punkt.)

Um sich etwas mehr darunter vorstellen zu können, betrachten wir die Situation in topologischen Vektorräumen: Für eine nichtleere Teilmenge  $A$  gilt hier:

$$\text{konvex} \implies \text{sternförmig} \implies \text{zusammenziehbar} \implies \text{azyklisch} \implies \text{zshgd.}$$

Begle erweitert 1950 den Satz auf kompakte Hausdorff-Räume. Für die daran anknüpfenden historischen Entwicklungen, insbesondere die Anwendung des Theorems zur Gewinnung von Fixpunktsätzen für Korrespondenzen kompakter metrischer Räume siehe [Rei01].

Seit kurzem verstehe ich übrigens, warum Jean Leray die Vietorisschen Ergebnisse 1946 nicht gewürdigt zu haben schien: Er verbrachte den 2. Weltkrieg als gefangener französischer Offizier in einem Lager im Waldviertel als Rektor der Gefangenen-Universität Edelbach-Allentsteig. Er verschwieg dabei aber seine Kenntnisse aus der Hydrodynamik, um nicht bei kriegsrelevanten Projekten mitarbeiten zu müssen und gab sich als „weltferner Topologe“ aus – und erfand dabei die Topologie fast neu, da er ja die Untersuchungen von Vietoris im nahen Wien nicht kennen konnte. (Vgl. [BHL00])<sup>5</sup>

## 4 Funktional- und Differentialgleichungen

In der Arbeit [34] reduziert Vietoris 1944 die Funktionalgleichungen für die trigonometrischen Funktionen auf die Gl.

$$(1) \quad A(x + \xi) = A(x)A(\xi)$$

für eine komplexe Funktion  $A(x) = \exp\{u(x) + i\varphi(x)\}$ , wobei  $u$  und  $\varphi$  reelle Funktionen der reellen Variablen  $x$  sind, die

$$(2) u(x + \xi) = u(x) + u(\xi),$$

$$(3) \varphi(x + \xi) \equiv \varphi(x) + \varphi(\xi) \pmod{2\pi\mathbf{Z}}.$$

erfüllen. Er findet dabei unter Verwendung einer Hamel-Basis eine neue Lösung von (3), die einfacher als eine frühere von van der Corput ist.

1957 liefert Vietoris mit Hilfe der Cauchyschen Funktionalgleichung (3) einen nach AczI bemerkenswerten Beweis des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$ .

Zuvor hatte er sich in einer Reihe von Untersuchungen mit mechanischen Hilfsmitteln zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen befasst. Am Beginn steht eine Modifikation der Picardschen sukzessiven Iteration.

## 5 „Schnellschüsse“

Anfang der Achzigerjahre beschäftigte sich Vietoris rege mit Problemen aus der Statistik und stieß dabei auf einige bemerkenswerte Gleichungen und Ungleichungen. Er bewies zunächst für  $m, n, k \in \mathbf{N}$  mit  $0 \leq k \leq m - 1$

$$(m + n)! = \frac{m!}{k!(m - k - 1)!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (k + i)!(m + n - k - 1 - i)!$$

als Verallgemeinerung der Funktionalgleichung für die Faktorielle. Formuliert man dies allerdings etwas um, dann läßt sich mit

$$P_i := \binom{k + i}{i} \binom{m + n - k - 1 - i}{n - i} \bigg/ \binom{m + n}{n},$$

obige Identität schreiben als

$$\sum_{i=0}^n P_i = 1$$

– wie A.J. Zajtá in seiner Besprechung [MR 85m:05009] bemerkt und gleich hinzufügt, dass die  $P_i$  nach einer Aufgabe in Fellers Klassiker als Wahrscheinlichkeiten gewisser Ereignisse auftreten und damit zur Summe eins ergeben!

Kurz zuvor – ab seinem 88. Lebensjahr – hatte Vietoris mit Untersuchungen zum „Vergleich unbekannter Mittelwerte auf Grund von Versuchsreihen“ begonnen und gelangte dabei zu zwei Ungleichungen, die ihn über fünf Jahre faszinierten und in sieben Arbeiten ihren Niederschlag fanden: Sie lauten in einer äquivalenten Fassung (nach G. Lochs):

$$e^k \frac{1}{(k - 1)!} \int_k^\infty x^{k-1} e^{-x} dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k^i}{i!} < \frac{1}{2} e^k < \sum_{i=0}^k \frac{k^i}{i!} = e^k \frac{1}{k!} \int_k^\infty x^k e^{-x} dx$$

Nun, W. Uhlmann, dem Vietoris seine Arbeiten zukommen ließ, konnte 1983 diese Ungleichungskette aus eigenen Abschätzungen folgern, die er 1966 im Zusammenhang zur statistischen Qualitätskontrolle veröffentlicht hatte, andererseits ergeben sie sich aus Ramanujans Question 294:

$$1 + \frac{k}{1!} + \dots + \frac{k^k}{k!} \frac{1}{3} < \frac{1}{2} e^k < 1 + \frac{k}{1!} + \dots + \frac{k^k}{k!} \frac{1}{2},$$

die G. Szegő und G.N. Watson 1928 unabhängig voneinander bewiesen haben.

## 6 Positive trigonometrische Summen

Überaus bedeutende Ungleichungen bewies Vietoris in drei Arbeiten *Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen* [49],[50],[72], wobei er die letzte dieser Abhandlungen im jugendlichen Alter von 103 Jahren verfasste!

**6.1 Theorem** Seien  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und  $t$  reelle Zahlen. Falls (1)  $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$  und (2)  $a_{2k} \leq \frac{2k-1}{2k} a_{2k-1}$  ( $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ ), dann gilt

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n a_k \sin kt > 0, \quad \sum_{k=0}^n a_k \cos kt > 0 \quad (0 < t < \pi)$$

Setzt man  $a_0 = 1, a_k = \frac{1}{k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), so wird aus (3) die Fejér-Jackson-Ungleichung  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kt > 0$  ( $0 < t < \pi$ ) bzw. die W.H. Young-Ungleichung  $1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cos kt > 0$  ( $0 < t < \pi$ ).

R. Askey beschreibt in [Ask98] seine Überraschung, als er (3) zum ersten Mal sah und dabei gewahr wurde, dass die Fejérsche Ungleichung nicht scharf ist.

## 7 Schlusswort

Seine fundamentalen Beiträge sowohl zur allgemeinen als auch zur algebraischen Topologie, aber auch zu anderen Zweigen mathematischen Wissens haben Leopold Vietoris in der Welt der Wissenschaften unsterblich gemacht – dies wird auch seine menschliche Größe bewirken: Er war überaus bescheiden, dankbar, dass es ihm so gut ging, und dies wünschte und vergönnte er auch immer den Mitmenschen. Seine Freizeit galt seiner grossen Familie, religiöser Meditation, der Musik und seinen Bergen. Für Verwaltungsarbeit hatte Vietoris weniger übrig, wie er 1947 in einem Brief an L.E.J. Brouwer betont: „Als Dekan bin ich mit administrativen Aufgaben derart überhäuft, dass ich meine Vorlesungen oft mangelhaft vorbereitet halten muss und erst recht zu keiner wissenschaftlichen Arbeit komme. Das Amtsjahr ist glücklicherweise bald vorüber und dann hoffe ich wieder Wissenschaftler und nicht Kanzleimensch sein zu können.“

Ein langes Leben hat sich erfüllt. Neben die Trauer tritt unsere Dankbarkeit.

*Ich danke Herrn O. Loos, dem Nach-Nachfolger von Vietoris, für seine wertvollen Anregungen bei der Formulierung dieses Nachrufs.*

## Anmerkungen

- 1 Vgl. [Rei97], [Rei02].
- 2 Frühere Arbeiten von E.H. Moore enthalten bereits den Hinweis auf eine „general convergence theory“, aber nicht (D3)!
- 3 Hausdorffs „Klassiker“ bekam Vietoris übrigens erst bei einem Heimaturlaub 1918 zu Gesicht!
- 4 Vietoris bemerkt übrigens: Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus.
- 5 Mein Dank gilt Herrn Siegmund Schultze für einen regen E-Mail-Austausch über den genauen Standort dieser „Universität“.

## Literatur

- [Ask98] R. Askey, *Vietoris's inequalities and hypergeometric series*, Recent progress in inequalities (Niš, 1996), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 63–76.
- [BHL00] A. Borel, G. M. Henkin, and P. D. Lax, *Jean {Leray (1906–1998)*, Notices Amer. Math. Soc. **47** (2000), no. 3, 350–359.
- [Bir35] G. Birkhoff, *A new definition of limit*, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 635.
- [Bir37] G. Birkhoff, *Moore-Smith convergence in general topology*, Ann. of Math., II. Ser. **38** (1937), 39–56.
- [Car37a] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci., Paris **205** (1937), 777–779.
- [Car37b] H. Cartan, *Theorie des filtres*, C. R. Acad. Sci., Paris **205** (1937), 595–598.
- [Die89] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology. 1900–1960*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989.
- [Hir99] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and topology*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999, pp. 57–65.
- [Lef42] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications. 27. New York: American Mathematical Society. VI, 389 p., 1942.
- [LR82] R. Liedl and H. Reitberger, *Leopold Vietoris – 90 Jahre*, Yearbook: Surveys of mathematics 1982, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1982, pp. 169–170.
- [May29] W. Mayer, *Über abstrakte Topologie. I, II.*, Monatsh. Math. **36** (1929), 1–42, 219–258.
- [ML86] S. Mac Lane, *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, J. Pure Appl. Algebra **39** (1986), no. 3, 305–307.
- [MS22] E. H. Moore and H. L. Smith, *A general theory of limits*, American J. **44** (1922), 102–121.
- [Pie80] J.-P. Pier, *Historique de la notion de compacité*, Historia Math. **7** (1980), no. 4, 425–443.
- [Rei97] H. Reitberger, *The contributions of L. Vietoris and H. Tietze to the foundations of general topology*, Handbook of the history of general topology, Vol. 1, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 31–40.
- [Rei01] H. Reitberger, *Vietoris-Beglesches Abbildungstheorem, Vietoris-Lefschetz-Eilenberg-Montgomery-Beglescher Fixpunktsatz und Wirtschaftsnobelpreise*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. **103** (2001), no. 3, 67–73.
- [Rei02] H. Reitberger, *Die Beiträge von L. Vietoris zu den Grundlagen der Topologie. I*, Wiss. Nachrichten **119** (2002), im Druck.
- [Sch53] J. Schmidt, *Beiträge zur Filtertheorie. II*, Math. Nachr. **10** (1953), 197–232.
- [Wei38] A. Weil, *Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale*, Paris: Hermann & Cie. 40 p., 1938.

## Schriftenverzeichnis von Leopold Vietoris

- [1] L. Vietoris, *Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art*, Wien. Ber. **125** (1916), 259–283.



- [2] *Stetige Mengen*, Monatsh. Math. **31** (1921), 173–204.
- [3] *Bereiche zweiter Ordnung*, Monatsh. Math. **32** (1922), 258–280.
- [4] *Über Extrema mit Nebenbedingungen*, Jahresber. D.M.V. **31** (1922), 110–111.
- [5] *Das stetige Deformieren topologischer Gebilde vom Standpunkt der Mengenlehre*, Jahresber. D. M. V. **32** (1923), 70–72.
- [6] *Kontinua zweiter Ordnung*, Monatsh. Math. **33** (1923), 48–62.
- [7] *Zur Geometrie ebener Massenanziehungsprobleme*, Math. Zeitschr. **19** (1923), 130–135.
- [8] *Über den höheren Zusammenhang von kompakten Räumen und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert lässt*, Proceedings Amsterdam **29** (1926), 1008–1013.
- [9] *Über stetige Abbildungen einer Kugel­fläche*, Proceedings Amsterdam **29** (1926), 443–453.
- [10] *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. **97** (1927), 454–472.
- [11] *Metrisierung topologischer Räume*, Jahresber. D. M. V. **36** (1927), 12–16.
- [12] *Über die Symmetrie in den Zusammenhangszahlen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten*, Monatsh. Math. **35** (1928), 165–174.
- [13] *Richtigstellung*, Monatsh. Math. **35** (1928), 163–164.
- [14] *Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume*, Math. Ann. **101**, 219–225. Berichtigung: dazu Math. Ann. **102**, 176 (1929).
- [15] *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatsh. Math. **37** (1930), 159–162.
- [16] *Erzeugung der regulären Unterteilung von simplizialen Komplexen durch wiederholte Zweiteilung*, Monatsh. Math. **37** (1930), 97–102.
- [17] (*gem. m. H. Tietze*) *Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie*, Enc. math. Wiss. **III.1.2** (1931), AB13.
- [18] *Über den höheren Zusammenhang von Vereinigungsmengen und Durchschnitten*, Fundam. Math. **19** (1932), 265–273.
- [19] *Über die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Iteration*, Monatsh. Math. Phys. **39** (1932), 15–50.
- [20] *Über die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Iteration. II*, Monatsh. Math. Phys. **41** (1934), 384–391.
- [21] *Berichtigung meiner in Nr. 15 erschienenen Mitteilung „Gruppen mehrdimensionaler Wege“*, Anz. Akad. Wiss. Wien **19** (1935), 208.
- [22] *Ein einfacher Integralkomplex*, Z. Angew. Math. Mech. **15** (1935), 238–242.
- [23] *Gruppen mehrdimensionaler Wege*, Anz. Akad. Wiss. Wien **15** (1935), 143–145.
- [24] *Stetige Abbildung und höherer Zusammenhang*, Fundam. Math. **25** (1935), 102–108.
- [25] *Beziehungen zwischen den Homologiegruppen eines Komplexes*, Monatsh. Math. Phys. **43** (1936), 187–192.
- [26] *Beispiel einer in gewissem Sinn schwach zusammenhängenden Menge*, Monatsh. Math. Phys. **46** (1937), 206–208.
- [27] *Über m-gliedrige Verschlingungen*, Jahresber. D. M. V. **49** (1939), 1–9.
- [28] *Die Schleppe als Planimeter*, Z. angew. Math. Mech. **19** (1939), 120.
- [29] *Über die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Iteration. III*, Monatsh. Math. Phys. **48** (1939), 19–25.
- [30] *Unmittelbare zeichnerische Integration der Gleichung  $y'' = f(x)$* , Z. angew. Math. Mech. **19** (1939), 119–120.
- [31] *Zur Theorie der Integralkomplexe*, Jber. Deutsch. Math. Verein. **52** (1942), 71–74.
- [32] *Eine Fehlerquelle bei den Führungsrädern von Integralkomplexen*, Z. Instrumentenkunde **64** (1944), 123–129.
- [33] *Über einen mit Hilfe seines Schattens gelenkten Integralkomplexen*, Z. Angew. Math. Mech. **24** (1944), 43–44.
- [34] *Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen*, J. Reine Angew. Math. **186** (1944), 1–15.
- [35] *Zur Geometrie der ebenen analytischen Kurven*, Anz. Akad. Wiss. Wien. Math.-Nat. Kl. **83** (1946), 17–20.

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechung
-------------------	----------------------	-----------------

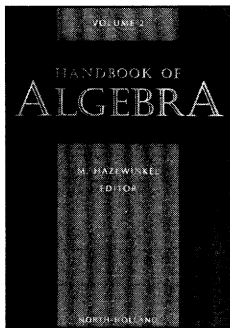
- [36] *Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit*, Monatsh. Math. **52** (1948), 55–85.
- [37] *Ein Kurvenblatt zur Berechnung von  $a \cos^2 \alpha$  und  $\frac{1}{2} a \sin 2\alpha$* , Z. Angew. Math. Mech. **29** (1949), 232–253.
- [38] (bearb. v. G. Lochs) *Vorl. über Differential- und Integralrechnung*, Universitätsverlag Wagner, Innsbruck, 1951.
- [39] *Identität und Gleichheit*, Pyramide **1** (1951), 34–36.
- [40] *Wie kann Wahrscheinlichkeit definiert werden?*, Studium Generale **4** (1951), 69–72.
- [41] *Zum Gebrauch des harmonischen Analysators von Mader-Ott*, Z. Angew. Math. Mech. **31** (1951), 179–181.
- [42] Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven, Arch. Math. **3** (1952), 304–306.
- [43] *Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung einer Gleichung  $y' = f(x, y)$* , Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B. IIa. **162** (1953), 157–167.
- [44] *Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung eines Systems von Gleichungen  $y'_k = f_k(x_1, y_1, y_2, \dots, y_m)$* , Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B. IIa. **162** (1953), 293–299.
- [45] *Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Dialectica **8** (1954), 37–47.
- [46] *Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*, Studium Gen. **9** (1956), 85–96.
- [47] *Zur konformen Geometrie der ebenen Kurven*, Rev. Math. Pures Appl. **1** (1956), no. 3, 73–77.
- [48] *Vom Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$* , Elemente Math. **12** (1957), 8–10.
- [49] *Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen*, Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. **167** (1958), 125–135.
- [50] *Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen. II*, Anz. Österreich. Akad. Wiss. **10** (1959), 192–193.
- [51] *Zur Topologie der Ketten*, Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. **168** (1959), 249–263.
- [52] *Bemerkungen und Abschätzungen zur Induktion*, Monatsh. Math. **64** (1960), 233–250.
- [53] *Eine die Stichprobenverteilung betreffende Abschätzung*, Monatsh. Math. **65** (1961), 287–290.
- [54] *Heinrich Tietze*, Almanach Österreich. Akad. Wiss. **114** (1965), 360–369.
- [55] *Über die Zahl der in einem  $k$ -reduzierten Restsystem liegenden Lösungen einer Kongruenz  $x_1 + x_2 + \dots + x_r \equiv a \pmod{m^k}$* , Monatsh. Math. **71** (1967), 55–63.
- [56] *Über eine Zählfunktion von K. Nageswara Rao*, Monatsh. Math. **72** (1968), 147–151.
- [57] *Mittelwertsätze und konvexe Mengen. I, II*, Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. (1971), no. 12, 165–168; *ibid.* **1972**, no. 5, 99–101.
- [58] *Kurt Reidemeister*, Almanach Österreich. Akad. Wiss. **122** (1973), 317–324.
- [59] *Mittelwertsätze und konvexe Mengen, I, II*, *Berichtigung (Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1972, no. 12, 165–168; ibid. 1972, no. 5, 99–101)*, Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. (1973), no. 7, 41–44.
- [60] *Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Tschebyscheff*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. (1974), no. 461–497, 115–117.
- [61] *Vergleich unbekannter Mittelwerte auf Grund von Versuchsreihen. I*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **188** (1979), no. 8–10, 329–341.
- [62] *Vergleich unbekannter Mittelwerte auf Grund von Versuchsreihen. II*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **189** (1980), no. 1–3, 95–100.
- [63] *Vergleich unbekannter Mittelwerte auf Grund von Versuchsreihen. III*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **190** (1981), no. 8–10, 469–473.
- [64] *Über gewisse die unvollständige Betafunktion betreffende Ungleichungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **191** (1982), no. 1–3, 85–92.
- [65] *Vergleich unbekannter Mittelwerte auf Grund von Versuchsreihen. IV*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **191** (1982), no. 1–3, 53–58.
- [66] *Dritter Beweis der die unvollständige Gammafunktion betreffenden Lochsschen Ungleichungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **192** (1983), no. 1–3, 83–91.
- [67] *Kazimierz Kuratowski*, Almanach Österreich. Akad. Wiss. **132** (1983), 300–312.

- [68] *Eine Verallgemeinerung der Gleichung  $(n + 1)! = n!(n + 1)$  und zugehörige vermutete Ungleichungen*, Monatsh. Math. **97** (1984), no. 2, 157–160.
- [69] *Geschichtliches über gewisse Ungleichungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **193** (1984), no. 4-7, 319–321.
- [70] *Eine Verschärfung der Abschätzung des Restes Taylorscher Näherungspolynome*, Monatsh. Math. **102** (1986), no. 1, 85–89.
- [71] *Zur Abschätzung des Restes Taylorscher Näherungspolynome*, Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. **123** (1986), 131–134 (1987).
- [72] *Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen. III*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **203** (1994), 57–61.

## Promovenden bei Leopold Vietoris

- Hellmich, Kurt, *Funktionen, deren Werte Mengen sind*. 1939
- Petschacher, Martha, *Tafeln hypergeometrischer Funktionen*. 1946
- Jochum, Hiltrud, *Die Cayleyschen Formeln in der Kreisgeometrie und die Brennpunkte in der Gaußschen Ebene*. 1952
- Leicht, Johann, *Zur intuitionistischen Algebra und Zahlentheorie*. 1952
- Dürk, Walter, *Der Strukturkomplex  $t_1 t_2 = b^2$* . 1953
- Grömer, Helmut, *Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit*. 1954
- Ambach, Eva, *Der Größenfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung einer Differentialgleichung*. 1957
- Riege, Gerhard, *Das Axiom von Pasch in konvexen Räumen*. 1957
- Pescolderung, Fortunat, *Über eine Fehlerabschätzung zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. 1958
- Steuer, Egon, *Zur Kreisgeometrie ebener algebraischer Kurven*. 1960





M. Hazewinkel  
**Handbook of Algebra**  
 Volume 2

Amsterdam: North-Holland 2000, 878 S.,  
 USD 177.50

Der vorliegende 2. Band des Handbuchs der Algebra (der 1. Band erschien 1996, Bsp. DMV Jber. 101, 1), dessen Gesamtspektrum nach der seit 1996 fortgeschrittenen aktuellen Planung auf S. IX–XVI beschrieben wird, enthält daraus die folgenden Beiträge:

*Section 2 A.* Category Theory: P. J. Scott, Some aspects of categories in computer science. B. Plotkin, Algebra, categories and databases.

*Section 2 B.* Homological Algebra. Cohomology. Cohomological methods in Algebra. Homotopical Algebra: A. Ya. Helemskii, Homology for the algebras of analysis.

*Section 2 D.* Model Theoretic Algebra: F. Wagner, Stable groups.

*Section 3 A.* Commutative Rings and Algebras: D. Popescu, Artin approximation.

*Section 3 B.* Associative Rings and Algebras: V. K. Kharchenko, Fixed rings and noncommutative invariant theory. A. A. Tuganbaev, Modules with distributive submodule lattice. A. A. Tuganbaev, Serial and semidistributive modules and rings. A. A. Tuganbaev, Modules with the exchange property and exchange rings. F. Van Oystaeyen, Separable algebras.

*Section 3 D.* Deformation Theory of Rings and Algebras: Yu. Khakimdjano, Varieties of Lie Algebras and laws.

*Section 4 D.* Varieties of Algebras, Groups, ...: V. A. Artamonov, Varieties of algebras.

*Section 4 E.* Lie Algebras: Yu. Bahturin, A. A. Mikhalev and M. Zaicev, Infinite-dimensional Lie superalgebras. M. Goze and Yu. Khakimdjano, Nilpotent and solvable Lie algebras.

*Section 5 A.* Groups and Semigroups: A. V. Mikhalev and A. P. Mishina, Infinite Abelian groups: Methods and results.

*Section 6 C.* Representation Theory of “Continuous Groups” (Linear Algebraic Groups, Lie Groups, Loop Groups, ...) and the Corresponding Algebras: A. U. Klimyk, Infinite-dimensional representations of quantum algebras.

*Section 6 E.* Abstract and Functorial Representation Theory: S. Bouc, Burnside rings. P. Webb, A guide to Mackey functors.

Wie schon beim 1. Band wird diese reichlich zufällige Themenauswahl vom Herausgeber im Vorwort so begründet:

An die Stelle eines systematischen Aufbaus wird einer dynamischen Entwicklungsplanung der Vorzug gegeben. Die einzelnen Artikel werden nach ihrem Eingang rasch publiziert. Spätere Änderungen im Aufbau – auch eventuell auf Anregung von Lesern – bleiben dadurch möglich. Gegenüber der in Band 1 dargelegten Konzeption finden sich jetzt folgende Änderungen: Weniger Streben nach Vollständigkeit in mehr elementaren Bereichen, mehr Betonung von neuen Entwicklungen in aktuellen Gebieten. Demgemäß mehr Flexibilität in der Festlegung der zu behandelnden Gebiete, auch nach Verfügbarkeit von Autoren ...

Hier zeigen sich deutlich Schwierigkeiten (und Grenzen?) eines Unternehmens wie des zu besprechenden Handbuchs.

Die Zielsetzung des Handbuchs sei hier nochmal in den Worten des Herausgebers wiedergegeben: „It is not the intention that the handbook as a whole can be a substitute undergraduate or even graduate text book. The treatment of the various topics will be much too dense and professional for that. Basically, the level is graduate and up ... An important function of the articles in the

Handbook is to provide professional mathematicians working in a different area with sufficient information on the topic in question if and when it is needed. Each chapter combines some of the features of both a graduate-level textbook and a research-level survey. Not all of the ingredients mentioned below will be appropriate in each case, but authors have been asked to include the following:

- Introduction (including motivation and historical remarks)
- Outline of the chapter
- Basic concepts, definitions, and results (proofs or ideas/sketches of the proofs are given when space permits)
- Comments on the relevance of the results, relations to other results, and applications
- Review of the relevant literature; possible supplemented with the opinion of the author on recent developments and future directions
- Extensive bibliography (several hundred items will not be exceptional).“

Ein Subject Index von 41 Seiten soll das Auffinden einzelner Begriffe erleichtern.

Nicht alle Beiträge in diesem 2. Band werden den oben genannten Zielen gerecht. Einige erfordern auch zu einer peripheren Orientierung das Heranziehen von Originalliteratur. Auch der Index ist zuweilen wenig hilfreich, wenn man, um eine Definition nachzuschlagen, Seiten findet, auf denen der fragliche Begriff vorkommt, aber nirgendwo definiert wird. Im Übrigen gilt das in der Besprechung des 1. Bandes Gesagte (loc. cit.) auch für diesen 2. Band. Weitere Bände müssen folgen, um dieses Werk – wenn überhaupt möglich – abzurunden. In Zukunft soll jedes Jahr ein Band erscheinen.

Münster

H.-J. Nastold

B. Bolzano

**Functionenlehre**

B. Bolzano  
**Functionenlehre**  
 Hrsg. Bob van Roozelaar  
 Bernard-Bolzano-  
 Gesamtausgabe II.A  
 10/1

Stuttgart-Bad Cannstatt: Friedrich Frommann Verlag, Günter Holzboog 2000, 197 S., EUR 233,–

Als Bernard Bolzano (1781–1848) in den 1830er Jahren seinen begrifflichen Aufbau der Analysis entwickelte, hatte dieses Vorhaben nur ein Vorbild: die Lehrbücher von Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) der Jahre 1821, 1823 und 1829. Die übrige Literatur zum Thema war überschaubar: eineinhalb Dutzend Monographien und drei Wörterbücher.

Wie wir heute wissen, ist die Entwicklung eines begrifflich strengen Aufbaus der Analysis ein schwieriges Unterfangen. Daher werden wir bereit sein, Bolzano als einem Pionier auf diesem Feld gelegentliche Denkfehler nachzusehen und eher seine überzeugenden Gedankführungen würdigen.

Die *Functionenlehre* enthält etliche solche überzeugenden Entwürfe, insbesondere im Abschnitt 1 „Stetige und unstetige Functionen“: zunächst *Begriffe* wie einseitige Stetigkeit, der Unterschied von Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit (ohne diesen Namen), stetige Fortsetzbarkeit, Sprung, Monotonie (ohne diesen Namen), dann *Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen* wie den Schranken-, den Extremal- und den Zwischenwertsatz für abgeschlossene Wertebereiche oder die Verschiedenheit von Stetigkeit und Zwischenwerteigenschaft. Dieser Abschnitt 1 mit seinen 82 Paragrafen auf 104 Manuskript- bzw. jetzt 56 Druckseiten ist sicher das Glanzstück von Bolzanos *Functionenlehre*. Ihr Abschnitt 2 „Abgeleitete Func-

tionen“ mit seinen 99 Paragrafen auf 139 Manuskript- bzw. jetzt 74 Druckseiten ist weniger begriffsscharf. Freilich ist die Thematik – Differenzial- und Integralrechnung einer und mehrerer Veränderlicher sowie Taylorreihen – für diesen Raum auch zu umfangreich, und die technische Versiertheit des Autors ist hier nicht hinreichend.

Als die *Functionenlehre* 1930 erstmals gedruckt wurde – als Band 1 von „Bernard Bolzano’s Schriften“ durch die Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften (1948 aufgelöst) –, erregte das Beispiel einer überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion (s. [1]) besondere Aufmerksamkeit; immerhin ist es vier Jahrzehnte älter als sein von Weierstraß (1815–1897) gegebenes Pendant. Heute goutieren wir eher Bolzanos akribische Gedankenführung, beispielsweise wenn er den Extreimalsatz oder den Zwischenwertsatz an der jeweils entscheidenden Stelle (Existenz einer gewissen Zahl) unter Rückgriff auf seine Begriffskonstruktionen in der *Zahlenlehre* beweist.

Bolzano kennt Cauchys Lehrbücher der Analysis, und offenbar arbeitet er sich in manchen Punkten an ihnen ab. (Dabei entgeht ihm, dass es bei ihren Grundbegriffen eine mathematisch folgenreiche Differenzierung gibt.) Natürlich sind Cauchys Lehrbuchdarlegungen weitaus eleganter, in sich stimmiger (auch fehlerfreier, als es eine gern kolportierte Meinung besagt, s. [3]) und mathematisch tiefer liegend. Bolzanos Denken hingegen ist mutiger, freier, fortschrittlicher als Cauchys. Das hat Bolzano zur Konstruktion der bereits erwähnten Monsterfunktion geführt (die in Cauchys Fassung der Analysis keine *Funktion* ist), und das spricht sich auch direkt in der Art der Formulierungen aus. Cauchy schreibt passivisch, seine Subjekte sind „man“ und „wir“; „ich“ formuliert allenfalls einen Lehrsatz, der dann bewiesen wird. Bei Bolzano hingegen ist vom denkenden Subjekt die Rede: von dem, was es weiß („Selbst wenn wir wissen ...“, § 72), was es vermag („Was hindert uns z. B. festzusetzen, dass ...“, aaO.) und wie es einsieht („... leuchtet von selbst ein“, § 45), ganz zu

schweigen von der expliziten kritischen Auseinandersetzung mit den Fachautoren (etwa in § 39). Cauchy formuliert als Verkünder bestehender Wahrheit, Bolzano als freier Konstrukteur der Wahrheit, verpflichtet allein der Kraft seines Verstandes.

Dieser Verstand ist sehr gründlich und wird ganz zwanglos zu Unterscheidungen geführt, die sich in späteren Entwürfen als wichtige Begriffe erweisen, beispielsweise die Unterscheidung zwischen gewöhnlicher und gleichmäßiger Stetigkeit (S. 43):

§.[49.] *Lehrs* [atz]. Bloß daraus, daß eine 16 v Function  $Fx$  für alle inner-| halb  $a$  und  $b$  gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen  $x$  stetig | sey, folgt nicht, daß es für alle innerhalb dieser {Grenz[en]} gelegenen| Werthe von  $x$  eine und eben dieselbe Zahl  $e$  geben müsse, klein | genug, um behaupten zu können, daß man  $\Delta x$  nach seinem ab-|soluten Werthe nie  $< e$  zu machen brauche, damit der Unter-|schied  $F(x + \Delta x) - Fx < \frac{1}{N}$  ausfalle.

Bolzano verweigert sich weitgehend der Entwicklung einer Fachsprache. Die *Functionenlehre* zeigt, wie bald dann die Argumentationen unübersichtlich werden, und so schleichen sich immer öfter Fehler in Bolzanos Beweisführungen ein, je tiefer seine Gedankengänge dringen. Nicht Lehrsätze sind Bolzanos Stärke, sondern Unterscheidungen, Konstruktionen und Begriffsbildungen.

Bernard Bolzano war ein eigenständiger, damit unbequemer Denker. So wurde er 1819/20 aus der Prager Universität entfernt. In der Folge ermöglichten es ihm Freunde, sein zurückgezogenes Leben ganz seinen philosophischen, logischen und mathematischen Interessen zu widmen. Neben seiner Religionswissenschaft konzipierte der katholische Priester Bernard Bolzano vor allem zwei große Denkgebäude: die vierbändige *Wissenschaftslehre*, trotz herrschaftlichen Publikationsverbots 1837 im Ausland gedruckt, und die vierteilige *Größenlehre*, deren erste drei Teile erst im 20. Jahrhundert publiziert wurden: *Einleitung* und *Erste Begriffe*

der *allgemeinen Größenlehre*; *Reine Zahlenlehre*; *Functionenlehre*; die Publikation der *Reinen Zeit-* und der *Raumlehre* steht noch aus.

Die 1969 begonnene Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe (BGA) präsentiert Bolzano als einen hermetischen Sonderling. Die seit Descartes' *Géometrie* von 1637 hervorragend bewährte Druckpraxis, zum Zwecke besserer Übersicht algebraische Formeln kursiv vom Text abzusetzen, wird ignoriert, und die Lesbarkeit des Fließtextes wird rücksichtslos seminarphilologischen Editionsprinzipien (s. BGA E 2/1, S. 13ff) geopfert, die bei der *Functionenlehre* jetzt zu einem neuen Exzess gesteigert werden (s. *Functionenlehre*, S. 7). An einem Denker, der sich in dieser beharrlichen Weise der aufklärenden Kraft der (Gemein-)Sprache anvertraut, ist dies ein schlimmer Frevel – als ob die durch polizeistaatliche Repression bewirkte Isolation des Bernard Bolzano durch eine philologisch-kriminalistische Verschleierung seiner Manuskripte weitergeführt werden sollte.

Die Erstausgabe der *Functionenlehre* von 1930 durch Karel Rychlík zeigt, dass das nicht notwendig ist. Sie kann dem heutigen mathematischen und mathematikhistorischem Interesse praktisch genügen. Die sehr wenigen Lesefehler dort erschließen sich von selbst, und im Gegensatz zur neuen vermerkt die frühere Ausgabe (auf S. 22f. ihrer Anmerkungen), welche zeitgenössische Literatur sich in Bolzanos Handbibliothek oder in der Prager Universitätsbibliothek befand. Schließlich fehlt der neueren wie der früheren Ausgabe ein Sachregister, im Zeitalter der Textverarbeitungsprogramme und angesichts des gewaltigen Preises eine arge Nachlässigkeit.

Das einzig Neue dieser Neuausgabe ist die zusätzliche Publikation des Manuskriptes „Verbesserungen“ auf S. 169–190. Dabei handelt es sich ganz offenkundig um von Bolzano nicht zur Publikation bestimmte Kommentare. Sie sind entsprechend unvollkommen. Lange Passagen sind (mathematisch zu Recht) im Manuskript durchstri-

chen. Dass dieses Manuskript ein neues Licht auf die *Functionenlehre* würfe, ist mir bei der Erstlektüre entgangen. Die wissenschaftliche wie moralische Fragwürdigkeit der Publikation solcher Manuskripte – eher: diese Art der Leichenfledderei – habe ich bereits herausgestellt (s. [2], S. 89–91), aber das Verlegergeschäft ist gegen derartige Bedenken immun.

Der populäre Prediger Bernard Bolzano hat eine leicht zugängliche, zumindest aber eine lesbare Drucklegung seiner dazu konzipierten grandiosen mathematischen Entwürfe zu einem moderaten Ladenpreis verdient, nicht eine solche wissenschaftlich verbräunte Verhöhnung, zum Verdienst eines Verlegers durch einen sich jeder kritischen Diskussion entziehenden Herausgeberclub.

## Literatur

- [1] V. Jarník: On Bolzano's function (in: *ders.: Bolzano and the Foundations of mathematical Analysis*, Prag 1981, S. 67–81); tschechisch in: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* **60** (1922), S. 248–264.
- [2] D. D. Spalt: Buchbesprechung, Jahresberichte der DMV **96** (1994/95), S. 88–91; tschechische Übersetzung durch J. Foltá in: *Dějiny věda techniky*, Prag 1993, Nr. 4, S. 250–252.
- [3] *ders.*: Die Vernunft im Cauchy-Mythos, 1991 eingereichte, 1992 und 1996 vom Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt abgelehnte Habilitationsschrift; überarbeitet Frankfurt am Main u. a. 1996.

Darmstadt

D. D. Spalt





T. Needham  
**Anschauliche  
 Funktionentheorie**

München – Wien, Oldenbourg Verlag 2001,  
 685 S., EUR 54,80

Wenn wir die sieben Seiten des Vorwortes und die nachfolgenden Danksagungen gelesen haben, sind wir schon eingestimmt, einem umwälzenden Ereignis in der Geschichte mathematischer Lehrbücher beizuwohnen, einer Wende, wie es politisch heißt, einem Paradigmenwechsel: Das Buch hat eine „Newtonsche Entstehungsgeschichte“ und strömt aus dem Geist von Sir Roger Penrose. „Ein bedeutender Teil der geometrischen Betrachtungen und Argumente in diesem Buch sind meines Wissens neu“. Was hier auf so hohe und bahnbrechend neue Weise errungen wird, sind die elementaren Grundlagen der Funktionentheorie. Zum Beispiel sind wir auf Seite 500 so weit zu erfahren, dass sich eine holomorphe Funktion lokal in eine Taylorreihe entwickeln lässt.

Anschaulich soll es zugehen, und nach meinem Fache und meinen Neigungen soll mir das gefallen, nur zu! – Anschauliches ließe sich doch eigentlich auch ohne persönliche Ergüsse vortragen. Aber mein Zutrauen hat sehr bald einen Stoß erhalten; genauer gesagt auf Seite 1: „Aber im Gegensatz zu allen anderen Zahlen hat  $i$  die Eigenschaft:  $i^2 = -1$ .“ Hat nicht auch  $-i$  diese Eigenschaft, und überhaupt jede Eigenschaft von  $i$ ? Der Körper  $\mathbb{C}$  hat einen nicht trivialen stetigen Automorphismus, sehr im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$ . Aber freilich, wie konnten wir das übersehen, das ist ja Algebra, und hier geht es doch um Geometrie. Das Wort „Körper“

kommt im Index nicht vor. Auch die Wörter „offen“ oder „Gebiet“ kommen übrigens im Index nicht vor, denn es wäre dafür auf keine Definition im Text zu verweisen. Da allerdings werden analytische Funktionen manchmal in einem Gebiet betrachtet, manchmal in einem Bereich oder einfach einer Menge, don't worry. Zur Erklärung des Wortes „zusammenhängend“ heißt es auf Seite 107: Eine Menge  $S$  heißt zusammenhängend (siehe Bild 2.30 a), wenn zwei Punkte in  $S$  durch eine ununterbrochene Kurve, die ganz in  $S$  liegt, verbunden werden können. „Irgend zwei? – Je zwei? – Und eine Kurve? Na, denken Sie sich ein elastisches Band, eine Hundeleine ... Das Glaubensprinzip des Buches ist nämlich, dass das Vage verständlicher ist als das Präzise. Und im Dunkeln ist gut munkeln, der Autor redet über alles uferlos herum, versichert uns, dass man schon sieht, verweist auf Beispiele, gleitet zwischen dem Lokalen und dem Infinitesimalen hin und her wie es gerade angenehm ist, was um so leichter geht, als beides nicht definiert wird. Es gibt auch infinitesimale Umgebungen.

Zum Beispiel (Seite 228): „Analytische Abbildungen sind genau diejenigen, die lokal eine Drehstreckung sind: alle infinitesimalen komplexen Zahlen, die von einem einzigen Punkt ausgehen, werden um den gleichen Betrag gestreckt und gedreht.“

Ein Musterbeispiel für den Aufbau auf solche Grundlagen ist die Erklärung auf Seite 264, warum man eine konvergente Potenzreihe gliedweise differenzieren kann. Man kann das ja verschieden begründen, am einfachsten vielleicht, indem man die Ableitung hinschreibt und sie zum Beweis gliedweise integriert. Aber das Integral kommt erst ab Seite 437. Jedenfalls läuft es immer darauf hinaus, dass die Ableitungen der Partialsummen eine lokal gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen bilden. Aber der Autor schlittert von der lokalen Konvergenz der Partialsummen im Nebel zur infinitesimalen Konvergenz, was ja reell jedenfalls verkehrt und darum hier begründungsbedürftig ist. Natürlich werden Gegenstände

wie der Konvergenzssatz von Weierstraß in dem Buch nicht erwähnt, nicht einmal der Name Weierstraß, und Unterscheidungen wie die zwischen punktwiser, lokaler, lokal gleichmäßiger und infinitesimaler Konvergenz gehören offenbar zu den formalistischen Modeerscheinungen, denen die großen Mathematiker selten Beachtung geschenkt haben (vgl. Seite VIII).

Sein geometrisches Schlüsselwort ist „Drehstreckung“. Doch so viel er herumredet: Nicht einmal dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl einer Drehstreckung der komplexen Ebene entspricht ist wirklich bewiesen: Das Gerede endet mit einem Beispiel an Stelle eines fälligen Arguments. Die Behandlung der Eulerschen Formel ist nur dadurch amüsant, dass der Autor mit Gewalt die Ableitung des Tangens hineinzieht, denn dass man sich die durch eine Betrachtung an einer Figur leicht und plausibel verschaffen kann, war offenbar für ihn eine Art Erweckungserlebnis.

Wir können nun nicht weiter von Zeile zu Zeile vorangehen, ein zu mühsames Unterfangen für ein Buch, das erst auf Seite 243 bei den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ankommt. (Zum Vergleich: Das ganze Buch meines Kollegen Jänich, der doch figürlichem Denken besonders zugeeignet ist, ist nur halb so lang, 123 Seiten, bei vielfachem Inhalt). Doch nach Art der Physiker erlauben wir uns ein experimentelles Vorgehen: Zufällige Stichproben zeigen: wo man hinsieht ist es absurd, verworren und verkehrt.

Kleins Idee im Erlanger Programm „bestand darin, zuerst eine Gruppe  $G$  frei zu wählen ...“ Wirklich? Es gibt doch einen kleinen Unterschied zwischen einer Gruppe und einer Transformationsgruppe. „Räumliche komplexe Zahlen“ seien nicht möglich, weil der Raum der Drehstreckungen des  $\mathbb{R}^3$  die Dimension 4 habe (S. 52). Da fragt man sich, wie die Quaternionen möglich sind, wo die entsprechende Diskrepanz der Dimensionen doch noch größer wird. „Obwohl wir kein dreidimensionales Analogon der komplexen Zahlen gefunden haben, haben wir

den vier-dimensionalen Raum  $Q$  der Drehstreckungen (mit Zentrum 0) des dreidimensionalen Raumes entdeckt. Die Elemente von  $Q$  heißen Quaternionen, ...“ Ja, das sind so Entdeckungen des Autors. Allerdings dachte ich bisher, dass zwischen  $Q \cong \mathbb{R}^4$  und dem Raum der Drehstreckungen  $\mathbb{R}_+ \cdot SO(3)$  ein kleiner geometrischer – um nicht zu sagen: anschaulicher Unterschied besteht. Physikern ist das vertraut, es hängt mit dem *Spin* zusammen. Auf Seite 86 glaubt der Autor zu erklären, wie man Potenzreihen dividiert. Natürlich misslingt das, denn es gibt da ja eine Bedingung, die der Autor nicht erwähnt. Von Laurent-Entwicklung ist erst ab Seite 504 die Rede und auf Seite 515 heißt es: „Eine isolierte Singularität einer analytischen Funktion ist entweder ein Pol oder eine wesentliche Singularität.“ Daher ist es nicht verwunderlich, dass Riemanns Hebbarkeitssatz nicht vorkommt. Wir wollen nicht sagen, dass der Autor hier einen Fehler macht; soweit dringt er nicht vor. Nie ist wirklich gesagt, was eigentlich eine Singularität ist, so viel auch davon die Rede ist. Genießen wir zum Beispiel den Stil folgender Definition (Seite 515): „Sei  $a$  eine Singularität, und für einen hinreichend kleinen Wert von  $\varepsilon$  gebe es keine weiteren Singularitäten innerhalb eines Kreises mit Radius  $\varepsilon$  um  $a$ . In diesem Fall sagt man, dass  $a$  eine isolierte Singularität von  $f(z)$  ist.“ Oder (Seite 88): „Kann  $f(z)$  als Potenzreihe um  $k$  ausgedrückt werden, dann ist der Konvergenzradius der Abstand von  $k$  zur nächstgelegenen Singularität von  $f(z)$ .“ Wo ist überhaupt  $f$  definiert? Was ist eine Singularität? Wer fragt, der ist gerichtet ... Ab Seite 104 versucht sich der Autor an mehrdeutigen Funktionen und ihrer Verzweigung. Er klammert sich an das Beispiel der dritten Wurzel, was ihn zu der bei seinen Erklärungen falschen Behauptung führt (Seite 111): „Kann ein Zweig einer mehrdeutigen Funktion als Potenzreihe ausgedrückt werden, dann kann der Konvergenzkreis nicht so groß sein, dass er alle Verzweigungspunkte der mehrdeutigen Funktion enthält.“ Verzweigt ist ja eigentlich die Projektion der Riemannschen

Fläche  $M$  der Funktion  $f$ . Was aber der Autor betrachtet und Verzweigungspunkte nennt, sind die Bilder der Verzweigungspunkte von  $M$  in  $\mathbb{C}$ . Nun kann sich durchaus ein Gebiet in  $M$  biholomorph auf eine Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  projizieren, die alle Bilder von Verzweigungspunkten enthält. Ein ähnlicher Mangel an geometrischem Verständnis steht dem Autor auch an anderer Stelle im Weg. Ab Seite 476 versucht er sich an dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz. Neuere Diskussionen über dieses Thema sind an ihm natürlich spurlos vorübergegangen. Auf Seite 483 heißt es: „Kann eine geschlossener Weg auf einen Punkt zusammengezogen werden, ohne eine Singularität zu kreuzen, dann verschwindet das Integral entlang dieses Weges.“ Das mag, hinreichend korrigiert und ergänzt, wohl angehen, aber wenn es eine Seite weiter heißt: „Die Schrumpfung in (8.24) ist möglich genau dann, wenn sich der Weg um keine Singularität windet.“ – so wird es falsch, Homologie ist nicht dasselbe wie Homotopie. Später drückt er sich hierüber in unerlaubter Weise mulmiger aus (Seite 499): „Doch die Singularitäten von  $f$  können inmitten von  $L$  gestreut liegen, obwohl (als Voraussetzung) keine im „Innern“ von  $L$  liegen. Ist somit wirklich klar, dass diese Verformung immer ohne das Kreuzen einer dieser Singularitäten durchgeführt werden kann? Wir möchten Sie ermutigen, dieser Idee nachzugehen ...“ – Offenbar hat er es nicht klargekriegt. Hier ist an der Zeit daran zu erinnern, dass die Zunft der Mathematiker ihre Berufsehre hat.

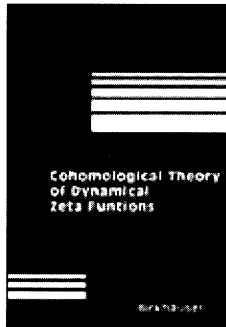
Die Geschichte der Mathematik betrachtet der Autor (Seite XII) „als ein lebendiges Hilfsmittel, sowohl zum Verständnis für den gegenwärtigen Stand der Mathematik als auch zur Richtschnur in die Zukunft.“ Solchen Grundsätzen verdankt man dann Bemerkungen wie (Seite 53): „Hamilton und Rodrigues sind nur zwei Beispiele unglücklicher Mathematiker, die bei Durchsicht der unveröffentlichten Notizbücher des großen Carl Friedrich Gauß einen Schreck bekommen hätten.“ Auch die Geschichtswissenschaft hat ihre eigene Tiefe und Strenge. Wer

sich alle Gelehrten aller Zeiten vorstellt wie einen Amerikanischen Prof, besorgt um die Verlängerung seines NSF-Grant, versteht nichts davon.

Das sei mein letztes und für das Ganze gültiges Wort.

Regensburg

Th. Bröcker



A. Juhl  
**Cohomological  
 Theory of Dynamical  
 Zeta Functions**  
 Progr. Math. 194

Basel u. a., Birkhäuser, 2000, 720 S.

Die Selbergsche Spurformel ist ein Analogon der Poissonschen Summationsformel und verknüpft in ihrer ersten Fassung das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht größer 1 mit dem Längenspektrum geschlossener Geodäten auf dieser Fläche. Interpretiert man den geodätischen Fluß, d. h. die Parallelverschiebung von Tangentialvektoren mit konstanter Geschwindigkeit mit Hilfe der Metrik als Hamiltonsches System, so ergibt sich als Hamiltonfunktion auf dem Tangentialbündel gerade das Geschwindigkeitsquadrat und damit das Hauptsymbol des Laplace-Beltrami-Operators. Man kann daher die Selbergsche Spurformel als Brücke zwischen dem geodätischen Fluß und seiner Quantisierung betrachten. Dies ist für die Physik von besonderem Interesse, weil der geodätische Fluß auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht größer 1 chaotischer Natur ist (z. B. ergodisch) und bis heute unklar ist, wie und über welchen Mechanismus sich klassi-

sche Chaotizität in den (prinzipiell linearen) Quantisierungen niederschlägt. Man hat hierzu viele numerische Experimente gemacht, die verschiedene Vermutungen nahelegen, analytische Resultate gibt es jedoch nur sehr wenige.

Dynamische Zetafunktionen sind grob gesprochen erzeugende Funktionen für das Längenspektrum geschlossener Bahnen (hier Geodäten), so wie die Riemannsche Zetafunktion eine erzeugende Funktion für die Primzahlen ist. Im Falle der Riemannschen Flächen hat Selberg die Definition seiner Zetafunktion sogar aus einer Analogie der Spurformel mit den sogenannten „expliziten Formeln“ für die Riemannsche Zetafunktion abgeleitet. Diese Analogie inspirierte wiederholt namhafte Autoren nach einer dynamischen Interpretation der Riemannschen Zetafunktion und einer zugehörigen Spurformel zu suchen, die es dann ermöglichen sollte, die Riemannvermutung zu beweisen.

Die Selbergsche Spurformel und die dazugehörige Zetafunktion ist in verschiedener Weise verallgemeinert worden. Selberg selbst hat gewisse nicht-kompakte Riemannsche Flächen betrachtet, Gangolli und andere haben die Theorie auf höherdimensionale Analoga, die kompakten lokal-symmetrischen Räume negativer Krümmung (d. h. insbesondere Rang 1), übertragen. Diese Räume haben im Gegensatz zu lokal-symmetrischen Räumen höheren Ranges ebenfalls ergodische geodätische Flüsse, sind also aus Sicht der Physik die interessantesten Beispiele. Neben einem Ausnahmefall sind dies gerade die Räume, die lokal zu den hyperbolischen Räumen über den reellen, komplexen oder quaternionalen Zahlen isomorph sind. Dies ist der Rahmen, in dem Andreas Juhl arbeitet. Allerdings beschränkt er sich in weiten Teilen des Buches auf den reellen Fall.

Sei also  $Y := \mathrm{SO}(1, n)^o / \mathrm{SO}(n) =: G/K$  der  $n$ -dimensionale reelle hyperbolische Raum und  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $\mathrm{SO}(1, n)^o$ , für die  $X := \Gamma \backslash Y$  kompakt ist. Der geodätische Fluß von  $X$  wirkt dann auf dem Sphärenbündel  $SX$  von  $X$ , das mit

$\Gamma \backslash G/M$  identifiziert werden kann, wobei  $M$  der Zentralisator in  $K$  eines maximalen abelschen Unterraums  $\mathfrak{a}$  von  $\mathfrak{p}$  bzgl. einer Cartanzerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  ist. Dieser Unterraum ist eindimensional und der geodätische Fluß  $\Phi_t$  ist nichts anderes als die Rechtsmultiplikation mit den Exponentialbildern von  $\mathfrak{a}$ . Wenn  $c$  eine geschlossene Geodäte der Länge  $|c|$  ist, dann ist jeder Punkt  $p \in SX$  mit Fußpunkt in  $c$  periodisch von der Periode  $|c|$  bzgl. des geodätischen Flusses. Also ist  $p$  ein Fixpunkt von  $\Phi_{|c|}$  und die Ableitung von  $\Phi_{|c|}$  in  $p$  ist ein Endomorphismus  $P_{c,p} \in \mathrm{End}(T_p(SX))$ . Diese sogenannte linearisierte Poincaréabbildung hat einen kontrahierenden Anteil  $P_{c,p}^- \in \mathrm{End}(T_p^-(SX))$ , dessen  $N$ -te symmetrische Potenz mit  $S^N P_{c,p}^- \in \mathrm{End}(S^N(T_p^-(SX)))$  bezeichnet wird. Die Zahl  $\det(\mathrm{id} - S^N(P_{c,p}^-)e^{-s|c|})$  hängt nicht von  $p$  ab. Da es nur abzählbar viele geschlossene Geodäten gibt, kann man jetzt die Selbergsche Zetafunktion  $Z_S$  durch

$$(*) \quad Z_S(s) = \prod_c \prod_{N \geq 0} \det(\mathrm{id} - S^N(P_{c,p}^-)e^{-s|c|})$$

definieren, wobei Geodäten mit unterschiedlicher Orientierung als verschieden betrachtet werden, Mehrfachdurchläufe aber nicht zugelassen sind („Primgeodäten“). Die Formel (\*) kann als eine Art Eulerprodukt für die Selbergsche Zetafunktion betrachtet werden. Die Längen der geschlossenen Geodäten spielen dabei die Rolle der Primzahlen.  $Z_S$  ist das zentrale Studienobjekt des vorliegenden Buches. Analog zum Falle der Riemannschen Zetafunktion sind die funktionentheoretischen Eigenschaften von  $Z_S$  von zentraler Bedeutung für die asymptotischen Eigenschaften des geodätischen Längenspektrums. Vor diesem Hintergrund ist das Hauptergebnis des Buches zu sehen:  $Z_S$  hat eine meromorphe Fortsetzung, deren Nullstellen und Pole mit Vielfachheiten durch eine explizite Formel angegeben werden können. Gemäß einer Vermutung von S.J. Patterson sollte die Ordnung  $\mathrm{ord}_\lambda Z_S$  von  $Z_S$  in  $\lambda$  als alternierende Summe der Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume zum Ei-

genwert  $\lambda$  der Abbildungen  $\text{id} - \Phi_t^* e^{-\lambda t}$  sein, wobei  $\Phi_t^*$  die von  $\Phi_t$  auf der Garbenkohomologie  $H^*(\mathcal{P}^-)$  induzierte Abbildung ist und  $\mathcal{P}^-$  die Garbe der in Richtung der bezüglich  $\Phi$  stabilen Mannigfaltigkeiten konstanten glatten Funktionen. In dieser Form ist die Pattersonvermutung immer noch offen, kann aber auf eine noch nicht bewiesene Spurformel zurückgeführt werden. Juhls zentraler Beitrag ist hier ein gruppentheoretisches Analogon dieser Spurformel, die er „dynamische Lefschetzformel“ nennt und die eine explizite Formel für  $\text{ord}_\lambda Z_S$  erlaubt, in der die Garbenkohomologie durch Kohomologien der in  $L^2(\Gamma \backslash G)$  auftauchenden Harish-Chandra-Moduln ersetzt wird.

Der Beweis der dynamischen Lefschetzformel ist das technische Herzstück des Buches. Der entsprechende Abschnitt ist mit 74 Seiten der mit großem Abstand längste des Buches. Der Beweis der gruppentheoretischen Variante der Pattersonvermutung, der auf U. Bunke und M. Olbrich zurückgeht, wird nur skizziert.

Die gruppentheoretische Formel für  $\text{ord}_\lambda Z_S$  ist insofern unbefriedigend als sie keine wirklich dynamische Interpretation zuläßt. Um diesen Mangel zu beheben, sucht der Autor nach einer passenden Hodgetheorie für den de Rham-Komplex der stabilen Blätterung des geodätischen Flusses. Dies stößt auf enorme konzeptionelle Schwierigkeiten und es wird auch keine endgültige Lösung angeboten. Vielmehr werden diejenigen Komplexe im Detail studiert, von denen man annehmen sollte, daß sie in einer solchen Lösung eine wichtige Rolle spielen, und eine Reihe von partiellen Ergebnissen sowie einige Vermutungen vorgestellt.

Der Autor eröffnet das Buch mit einer 61-seitigen Einleitung, die eine unentbehrliche Orientierungshilfe in diesem 700-Seiten-Werk ist. Das zweite Kapitel ist eine knappe Zusammenstellung der gruppen- und darstellungstheoretischen Resultate, die im weiteren Verlauf benötigt werden. In Kapitel 3 wird die dynamische Lefschetzformel und die gruppentheoretische Formel für  $\text{ord}_\lambda Z_S$  hergeleitet. Die Kapitel 4 bis 7 sind

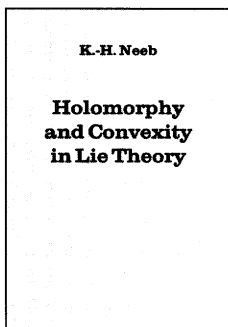
der angestrebten Hodgetheorie für die stabile Blätterung gewidmet. Das Buch schließt mit einem Ausblick und einer Zusammenfassung der wichtigsten Formeln.

Das vorliegende Buch ist die erste Darstellung des Themenkomplexes in Buchform. Dennoch ist es weder eine Einführung noch eine in sich geschlossene Monographie. Trotz der umfangreichen Einleitung wird der Neuling auf dem Gebiet erhebliche Schwierigkeiten haben, sich im Text selbst zurechtzufinden, da die „Präliminarien“ doch recht hoch gehängt sind. Neben Riemannscher und symplektischer Geometrie sollte man z. B. mit Lie-Theorie (Lie-Algebren, universelle einhüllende Algebren, Exponentialfunktion, diverse Zerlegungen etc.) und Darstellungstheorie (Harish-Chandra-Moduln,  $K$ -Typen, Frobenius-Dualität, diskrete Reihe etc.) einigermaßen vertraut sein, um auch nur die Aussagen verstehen zu können. Andererseits werden zum Teil auch zentrale Sätze wie die spektrale Charakterisierung der Pole und Nullstellen von  $Z_S$  (Theorem 3.4) nicht bewiesen, wenn ein Beweis schon anderswo publiziert ist.

Die Bedeutung des Buches liegt darin, daß es wichtige, bisher nicht ausreichend zugängliche, Originalbeiträge des Autors allgemein verfügbar macht und Dank der Einleitung und des Ausblicks eine Orientierung ermöglicht. Es bleibt zu hoffen, daß die aufgeführten offenen Probleme und Vermutungen von den Lesern als Herausforderung angenommen werden.

Clausthal

Joachim Hilgert



K.-H. Neeb  
**Holomorphy and Convexity in Lie Theory**  
 De Gruyter Expositions  
 in Mathematics, 8

Berlin, New York, 2000, xxi+778 pp.,  
 EUR 158,00

The book by Karl-Hermann Neeb *Holomorphy and Convexity in Lie Theory* is devoted to the interplay between complex geometry, complex analysis, holomorphic representations of semigroups, and unitary highest weight representations of Lie groups. The book describes in a very clear and relatively self-contained way the different aspects of the theory. The topics include the algebraic representation theory of involutive semigroups and its connection with positive definite kernels. Furthermore convex complex geometry and plurisubharmonic functions on invariant convex sets in the Lie algebra of a Lie group, representations of abelian semigroups in finite dimensional vector spaces and the role of the Laplace transform in that theory. Finally the algebraic and analytic theory of highest weight representations of Lie groups and their Lie algebra is discussed. This list, which only mentions few of the topics in the book, shows the different aspects of the theory, that K.-H. Neeb develops in his book. It is one of the beautiful aspects of the book, that each of those aspects is presented in an independent way – at least as far as it is possible – and each of the parts is an interesting reading for it self. There are not many places in the literature, where we can find such a complete description of the Laplace transform, invariant convex sets in Lie algebras, plurisubharmonic functions, and the connection with the representations of

Lie groups, and moment sets for  $C^*$ -algebras and group representations. And those are only very few examples of the several topics discussed in the book.

The main subject of the book, complex geometry and its connection with holomorphic representations of semigroups and highest weight representations started out as a semisimple theory. Its history goes back to the fundamental work of Harish-Chandra on the *holomorphic discrete series* of semisimple Lie groups. Those are unitary representations of the group  $G$ , which we for simplicity will assume to have finite center, such that the coefficient functions  $(\pi(g)u, v)$  are square integrable, and have the special property, that they can also be realized in a Hilbert space of vector valued holomorphic functions on a bounded complex domain  $D$  which is holomorphically isomorphic to the Riemannian symmetric space  $G/K$ . Here  $K$  is a maximal compact subgroup of  $G$ . In the work of Harish-Chandra little use was made of the complex geometry that comes naturally with those representations. The geometric aspect was first put forward in the seminal paper of I. M. Gelfand and S. G. Gindikin *Complex manifolds whose skeletons are real semisimple groups and holomorphic discrete series*, Functional Anal. Appl. **11** (1977), 19–27. The important idea formulated in this paper was to use complex geometry and analysis to realize *series* of representations instead of focusing on the construction of each individual representation. The first results were obtained independently by G. I. Ol'shanskii and R. Stanton. Both of them constructed a Hardy space of holomorphic functions on an open domain  $\Xi$  in  $G_{\mathbb{C}}$ , containing the group  $G$  as a  $G$ -invariant boundary component. The important difference in those articles was the construction of the domain  $\Xi$ , and in the end it were the ideas of Ol'shanskii to realize the domain  $\Xi$  as a complex semigroup of the form  $\Gamma_G(W) = G \exp(iW)$ , that put their mark on the following developments. Here  $W \subset \mathfrak{g}$  is a  $G$ -invariant open convex cone containing no affine lines. In his honor those

semigroups now bear his name and are called Ol'shanskii semigroups. By the work of B. Kostant and I. E. Segal it was known that the only Lie algebras allowing for such a cone where the Hermitian Lie algebras, i.e., those corresponding to Lie groups  $G$  with  $G/K$  a bounded symmetric domain, establishing the connection between convex geometry, Lie theory, and representations of semisimple Lie groups.

Those ideas lead to several important constructions for semisimple symmetric spaces. In particular the construction of the holomorphic discrete series for the compactly causal symmetric spaces and the realizations of those representations as a Hardy space of holomorphic functions in the complexification  $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ . But it was first in the paper by J. Hilgert and the reviewer *Analytic continuation of representations, the solvable case*, Japan J. Math. **18** (1992), 213–290, that it became clear that those construction could also be done for other classes of group. The basis for those generalizations was the work of J. Hilgert, K. H. Hofmann, and J. Lawson on invariant convex cones in general Lie algebras. In a series of articles and in their joint book *Lie groups, Convex Cones, and Semigroups*, Oxford University Press, 1989, they clarified the connection between invariant and generating regular convex cones, compact Cartan subalgebras, and the structure of the root system and the corresponding Weyl group. Finally J. Lawson obtained quite general results on the existence of the polar-decomposition  $\Gamma_G(W) = G \exp(iW)$  of Ol'shanskii semigroups in general Lie groups.

The book by K.-H. Neeb cover many of those results, but he sets his marks on the presentation and the abstract framework on which the book is based. The book is divided up in five parts each devoted to a special aspects of the theory. Each part, except maybe the two last, can be read independently from the other. Part A deals with positive kernel functions and abstract representations of involutive semigroup. A simple but basic example of such a semigroup is discussed in the sec-

ond part *Convex Geometry and Representations of Vector Spaces*. Let me explain few aspects of this example in some details as a motivation for the general results for arbitrary Lie groups. Let  $V$  be a finite dimensional real vector space and  $W \subset V$  an open generating convex cone containing no affine lines. Then both  $W$  and  $\Gamma = \Gamma_V(W) = V + iW$  are abelian semigroups. Let us consider only the second case. The  $\mathbb{R}$ -linear map  $s = v + iw \mapsto s^* = -\bar{s} = -v + iw$  defines an involution on  $\Gamma$ . A *holomorphic representation* of  $\Gamma$  is a holomorphic map  $\pi : \Gamma \rightarrow B(\mathbb{H})$  such that  $\pi(s^*) = \pi(s)^*$  and  $\pi(s+t) = \pi(s)\pi(t)$  for all  $s, t \in \Gamma$ . The analytic tool to understand those representations is the *Laplace transform*  $\mathcal{L}(\mu)(x) = \int_{V^*} e^{\langle \alpha, x \rangle} d\mu(\alpha)$  where  $\mu$  is a non-zero Borel measure on  $V$ . In particular each positive definite function  $\varphi$  on  $\Gamma$ , under some weak growth conditions, can be realized as  $\varphi(s) = \mathcal{L}(\mu)(-is)$  for a uniquely determined positive Radon measure  $\mu$  on a closed convex set  $C \subset -\overline{W}^*$ . A special example of a holomorphic representation is given by the Hardy space  $\mathcal{H}^2(W)$  of holomorphic functions on  $\Gamma_V(W)$  satisfying

$$\sup_{\Gamma_V(W) \ni s \rightarrow 0} \int |f(v+s)|^2 dv = \sup_{W \ni w \rightarrow 0} \int |f(v+iw)|^2 dv < \infty.$$

This is a reproducing Hilbert space, isomorphic to the space

$$L^2_W(V) = \left\{ f \in L^2(V) \mid \text{supp}(\hat{f}) \subset W^* \right\}$$

where  $\hat{f}$  is the Fourier transform of  $f$ . The semigroup  $\Gamma$  acts on  $\mathcal{H}^2(W)$  by translation  $sf(w) = f(w+s)$ , and this defines a holomorphic, contractive representation of  $\Gamma$ .

We recognize  $\Gamma_V(W)$  as a special case of an Ol'shanskii semigroup and it is now easy to describe the general construction in the case where  $G \subset G_{\mathbb{C}}$  as we now have all the notations at hand. Let  $\mathcal{H}^2(W)$  be the space of holomorphic functions on  $\Gamma_G(W)$  such that

$$\sup_{\Gamma_G(W) \ni s \rightarrow e} \int_G |f(gs)|^2 dg < \infty.$$

This is a  $G$  and  $\Gamma_G(W)$ -invariant reproducing Hilbert space, i.e., for each  $s \in \Gamma_G(W)$  the point evaluation map  $ev_s(f) = f(s)$  is continuous. In particular there exists a positive definite kernel  $K : \Gamma_G(W) \times \Gamma_G(W) \rightarrow \mathbb{C}$  such that  $f(u) = (f, K_u)$  where  $K_u(v) = K(v, u)$ . The kernel  $K$  is holomorphic in the first variable, ant-holomorphic in the second variable, and  $K(v, u) = \overline{K(u, v)}$ . Furthermore  $K(us, v) = K(u, vs^*)$  where the involution  $*$  is given by  $(g \exp(iW))^* = \exp(iW)g^{-1}$ . Finally the representation  $(s \cdot f)(u) = f(us)$  of  $\Gamma_G(W)$  is holomorphic and restricted to  $G$  decomposes into holomorphic discrete series. The intertwining map from  $\mathcal{H}_2(W)$  into  $L^2(G)$  is the boundary value map

$$\beta(f)(g) = \lim_{\Gamma_G(W) \ni s \rightarrow e} f(gs)$$

where the limit is taken in  $L^2(G)$ . This class of representations does not exist for all semisimple Lie groups, but only those who admit open invariant convex cones not containing any affine lines. This is equivalent to a triangular decomposition  $G \subset P^+ K_{\mathbb{C}} P^-$  where  $P^+$ ,  $P^-$  are complex abelian subgroups in  $G_{\mathbb{C}}$ , and  $K_{\mathbb{C}}$  is the complexification of the maximal compact subgroup  $K$ . A unitary representation  $(\pi, V)$  of  $G$  is a unitary highest weight representation if there is a non-zero vector  $u \in V$  such that  $\pi(K)u$  generates an irreducible finite dimensional representation  $(\rho, V_{\rho})$  of  $K$ , and hence also  $K_{\mathbb{C}}$ ,  $d\pi(\mathfrak{p}^+)u = 0$ , where  $\mathfrak{p}^+$  is the Lie algebra of  $P^+$ , and  $V$  is generated by  $d\pi(\mathfrak{p}^-)V_{\rho}$ . The triangular decomposition allows us to realize  $K \backslash G$  as a bounded symmetric domain in  $\mathfrak{p}^+$ , the Lie algebra of  $P^+$ , in the following way. Each element  $x \in P^+ K_{\mathbb{C}} P^-$  can be written in a unique way as a product  $x = p^+(x) k_{\mathbb{C}}(x) p^-(x)$ . Then  $G/K$  is holomorphically isomorphic to a bounded domain in  $\mathfrak{p}^+$  via  $gK \mapsto \log(p^+(g))$ . The triangular decomposition gives also rise to a positive definite kernel on  $D$  by

$$K_{\pi}(z, w) = \pi(k_{\mathbb{C}}(\exp(-i\bar{w}) \exp(z))^{-1}), \\ z, w \in D.$$

Here  $w \mapsto \bar{w}$  denotes the conjugation on  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  with respect to the real form  $\mathfrak{g}$ . The point is, that all of those constructions are based on the triangular decomposition of  $G$  and is the part of the theory due to Harish-Chandra in the semisimple case. The convex geometry comes into play as we consider the semigroup  $\Gamma = \{\gamma \in G_{\mathbb{C}} \mid \gamma^{-1}D \subset D\}$ . Then  $\Gamma$  is a closed semigroup. If  $G$  is semisimple then  $\Gamma = \Gamma_G(W_{\max})$  where  $W_{\max}$  is a maximal  $G$ -invariant closed regular convex cone. The minimal semigroup is given by  $\Gamma_G(W_{\min})$  where  $W_{\min}$  is the dual cone. Obviously  $\Gamma_G(W_{\min})$  acts also on  $D$  and  $V$ . All the highest weight representations of a semisimple Lie groups extend to holomorphic representations of  $\Gamma(W_{\min})$ . The study of those representations for *admissible* Lie groups is one of the main objectives of the book.

It is quite common in representation theory of Lie groups to divide the theory in two parts, the local part involving the Lie algebra and the global part involving the Lie group itself. This is the approach taken by K.-H. Neeb in his book. The infinitesimal part, in particular convex sets in the Lie algebra, are introduced in the third part of the book. Here the admissible Lie algebras are introduced. Those are Lie algebras containing invariant convex, generating sets not containing an affine line. One of the consequences of this assumption is, that  $\mathfrak{g}$  contains a compact Cartan subalgebra. A special class of convex invariant subset in those Lie algebras are the admissible convex coadjoint orbits  $\mathcal{O}_f = G \cdot f \subset \mathfrak{g}^*$ . In particular it is shown that  $\mathcal{O}_f|_{\mathfrak{t}} = W \cdot f + C$  where  $W$  is a Weyl group and  $C$  is a polyhedral cone related to the roots of  $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$  in  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . This sets up the relation between convex sets and the Kirillov orbit philosophy between coadjoint orbits and unitary representations.

The study of the global theory starts in part D *Highest Weight representations of Lie Algebras, Lie Groups, and Semigroups*. Here the highest weight representations and the Ol'shanskii semigroups are introduced. The reader can here find Lawson's Theorem on Ol'shanskii semigroups, moment sets for



$C^*$ -algebras and for group representations, holomorphic representations of Ol'shanskii semigroups, the Gelfand-Raikov Theorem for Ol'shanskii semigroups, compression semigroups, and finally the theory of Hilbert spaces of square integrable holomorphic functions. In the last part of the book *Complex Geometry and Representation theory* several other connections between convex geometry and representation theory are presented. This includes generalizations of Bochner's Theorem on extension of holomorphic functions, characterization of the  $G$ -invariant plurisubharmonic functions on biinvariant domains in the maximal semigroup, Stein properties of Ol'shanskii semigroups, and finally Hardy spaces.

This book is a self-contained presentation of the theory of convexity and holomorphic representations. It collects results obtained by several authors, in particular Karl-Hermann Neeb himself, over the last twenty years. In many cases the author has simplified, generalized, and unified the original presentation. The theory is presented in a clear and in most cases complete way, but its length and abstract presentation might scare many students from undertaking the task to read the book. But for working mathematicians it is a unique source of information and results in several different fields, complex geometry with a Lie group action, convex geometry, Laplace transform, positive definite kernels, and the theory of highest weight representations.

Baton Rouge, Louisiana

G. Ólafsson

A. Uchiyama

**Hardy spaces  
on the Euclidean  
space**

A. Uchiyama  
**Hardy spaces  
on the Euclidean  
space**

Berlin u. a., Springer, 2001, 305 S.,  
EUR 79,95

Das Buch geht auf ein Manuskript (typewritten draft) von Akihito Uchiyama (1948–1997) aus dem Jahre 1990 zurück, das nach seinem Tode von Nobuhiko Fujii, Akihiko Miyachi und Kôzô Yabuta (unter Mitwirkung weiterer Japanischer Mathematiker) zum Druck vorbereitet wurde. Es beginnt mit einer sehr persönlich gehaltenen Erinnerung des Doktorvaters (PhD adviser) Peter W. Jones, ‚*Recollections of my good friend, Akihito Uchiyama*‘. Das Preface (Sendai, September 1990, Akihito Uchiyama) lautet:

The foundations of the real Hardy space  $H^p(\mathbb{R}^n)$  were laid by C. Fefferman and E.M. Stein ‚ *$H^p$  spaces of several variables*‘ (Acta Math., 129 (1972), 137–193) and by R. Coifman and G. Weiss ‚*Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*‘ (Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 569–645). In this book, we will explain some of the important results on  $H^p(\mathbb{R}^n)$ .

Dementsprechend beschäftigt sich das Buch in 28 Abschnitten fast ausschließlich mit diversen Eigenschaften der Räume

- (1)  $H^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < p \leq 1$ , insbesondere  $H^1(\mathbb{R}^n)$  und  $BMO(\mathbb{R}^n)$ .

Man findet hier diesbezügliche Maximalungleichungen vom Hardy-Littlewood-Fefferman-Stein Typ, atomare Zerlegungen und Charakterisierungen durch Fourier-Multiplikatoren und Riesz-Transformationen. Einen breiten Raum nimmt die Dualität

$$(2) \quad H^1(\mathbb{R}^n)' = BMO(\mathbb{R}^n)$$

ein. Das gilt insbesondere für die damit verbundene Darstellung einer Funktion  $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$  als

$$(3) \quad f = f_0 + \sum_{j=1}^n R_j f_j, \quad f_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

wobei  $R_j$  die Riesz-Potentiale

$$(4) \quad (R_j g)(x) = F^{-1} \left[ -i \frac{\xi_j}{|\xi|} (Fg)(\xi) \right] (x),$$

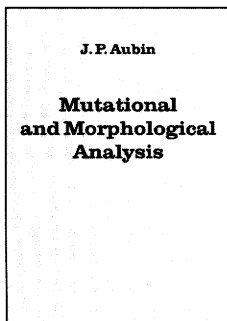
$$j = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

sind. Die abstrakte Fassung von (3), (4) geht auf C. Fefferman und E. M. Stein (1971/72) zurück (im Zusammenhang mit der Dualität (2)). Es gilt als Uchiyama's bedeutendste Leistung, einen konstruktiven Beweis für (3), (4) gefunden zu haben. Die Abschnitte 19–28 konzentrieren sich auf (2)–(4), wobei Abschnitt 22 (A constructive proof of the Fefferman - Stein decomposition of BMO) Uchiyama's konstruktiven Beweis von (3), (4) enthält. Die meisten Abschnitte enden mit sorgfältigen Literaturangaben.

Dieses bemerkenswerte Buch ist eine Fundgrube für jeden Mathematiker, der sich mit den in (1) genannten Räumen beschäftigt.

Jena

H. Triebel



J. P. Aubin  
**Mutational  
and Morphological  
Analysis**

Basel u. a., Birkhäuser, 1998, 472 S.,

In vielen Anwendungen werden zeitliche Abläufe durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Unter üblichen Voraussetzungen gibt es zu jedem Anfangsdatum genau eine Lösung, für eine Variabilität oder Unbestimmtheit läßt das Modell keinen Raum. Will man solche Effekte modellieren, so wird man auf stochastische Differentialgleichungen geführt. Über eine einzelne Realisierung kann man dann stochastische Aussagen treffen.

Man kann versuchen, Unsicherheiten in zeitlichen Abläufen ohne Bezug zur Stochastik, etwa durch mengenwertige Funktionen zu beschreiben. Solche Konzepte hat J. P. Aubin mit anderen – insbesondere H. Frankowska – unter dem Namen „Theorie der Viabilität“ entwickelt. Dabei wird die gedachte Trajektorie in eine „Tube“, d. h. in die mengenwertige Abbildung eines Intervalls eingeschlossen. Verwandte Ideen sind in der Mathematik wiederholt vorgestellt worden; Fuzzy Sets und Fraktale wurden anfangs so motiviert.

Das Buch ist eine Einführung in die Kalküle, die für das Studium von Differentialgleichungen in metrischen Räumen benötigt werden, und in die Ergebnisse, die für solche Gleichungen erzielt werden können. Es ist systematisch und streng formal aufgebaut. In der vorliegenden Form ist die Theorie weitgehend das Werk von Aubin, Frankowska und wenigen anderen (Aubin geht ausführlich auf die Vorgeschichte ein bis zurück in die dreißiger Jahre). Ein Literaturverzeichnis mit fast 500 Einträgen sichert die Verbindung zu Arbeiten über mengenwertige Abbildungen, Konvexität, Subdifferenzialen und vor allem Differential-Einschlüssen (differential inclusions), der geometrischen Maßtheorie, der Verbandstheorie. Die sehr nützlichen Bezüge zur Physik, zur Biologie, zur Soziologie, zu den Wirtschaftswissenschaften werden in der Einleitung hergestellt, aber später kaum wieder aufgegriffen. Die Hinweise auf Bildverarbeitung, Intervall-Analyse, dynamische ökonomische Modelle oder biologische Musterbildung liefern Anreize, sich mit der Theorie

vertraut zu machen. Es ist praktisch, dass jedes Kapitel mit einer Einleitung beginnt, in der die wesentlichen Begriffe, Ergebnisse und vor allem die Ideen zusammengestellt sind.

Die Reichhaltigkeit der Theorie sei hier skizziert. Transitionen auf einem metrischen Raum  $(E, d)$  sind Homotopien mit einer approximativen Halbgruppeneigenschaft. Sie bilden den Mutationsraum  $(E, \Theta(E))$ . Er ersetzt die lineare Struktur. Für eine Abbildung  $f : E \rightarrow F$  zwischen zwei Räumen kann eine Mutation  $f^\circ(x)$  von  $f$  an der Stelle  $x$  als mengenwertige Abbildung von  $\Theta(E)$  in  $\Theta(F)$  erklärt werden. Die Definition beruht auf einer Umschreibung der Richtungsableitung ( $v = f'(x)u$  wenn  $f(x + hu)$  und  $f(x) + hv$  einen Abstand  $o(h)$  haben, die Transition tritt dann an die Stelle der Linearität). Die Mutation ist damit eine Verallgemeinerung der Richtungsableitung und eine Mutationsgleichung ist eine verallgemeinerte Differentialgleichung. Ein grundlegendes Ergebnis ist die Existenz der Stammfunktion und ihre stetige Abhängigkeit von der Mutation. Der nächste Schritt ist ein Satz vom Typ Picard-Lindelöf (hier Cauchy-Lipschitz genannt) und dann eines Satzes vom Nagumo-Typ (Invarianz einer Menge unter einem Fluß bzw. einer Abbildung, Viabilität von Abbildungen bzgl. Mengen). Die folgende Begriffe sind Oberhalbstetigkeit,  $\omega$ -Limesmengen und Attraktionsgebiete (basins) sowie Exit-Abbildungen, Lyapunov-Funktionen und dann approximierende Eulerverfahren. Damit ist ein Großteil der Grundlagen der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Mutationsgleichungen übertragen. Es folgen gekoppelte Systeme solcher Gleichungen, rückgekoppelte und kontrollierte Systeme. Im 3. Kapitel (Morphologische Räume) werden die Ergebnisse angewandt auf Potenzmengen eines Basisraums, auf Evolutionen (Mutationen) im metrischen Raum der kompakten Mengen mit der Hausdorff-Metrik. Der Autor versucht (erfolgreich), die komplizierte Materie durch tabellarische Zusammenfassungen und Graphiken zu veranschaulichen. Mit

den Form-Transitionen beginnt die mathematische Morphologie. Man trifft alte Bekannte wie die  $\epsilon$ -Hülle und ihr Pendant (als Dilatation und Erosion), Niveaumengen von Funktionen etc. Kapitel 4 (Morphologische Dynamik) bringt die Evolution von Tuben (motiviert durch Tubengebiete um Trajektorien von Differentialgleichungen). Da diese selbst Objekte der vorher eingeführten Art sind, kann man sie wieder durch Evolutionsgleichungen beschreiben und u. a. den Cauchy-Lipschitz-Satz, den Nagumo-Satz übertragen. Das 5. Kapitel hat i. w. die Aufgabe, die Theorie mit der klassischen mengenwertigen Analysis zu verbinden. Kapitel 6 (Morphologische Geometrie) handelt von metrischen Projektionen (auf abgeschlossene Mengen), Ableitungen von Distanzfunktionen, Deutung von Projektionen im Rahmen einer zeitlichen Evolution („chronector“, „brachynormal“ spielen die Rolle von Brachystochronen). Schließlich zeigt der Autor, wie man die Konzepte durch Diskretisierung der Berechnung zugänglich machen kann. Kapitel 7 verbindet die Theorie mit Konzepten der Algebra von Mengen. Das 8. Kapitel enthält eine Toolbox für Differential Inclusions.

Der Autor ist ein erfindungsreicher und subtil arbeitender Mathematiker, der mit intensiver Zuwendung und Einsatzfreude sein Konzept der mit Unsicherheit behafteten Trajektorien auf einen großen Teil der klassischen Analysis überträgt, dabei zahlreiche Verzweigungen etwa in die Maß- und Integrationstheorie verfolgt und auch den historischen Ursprüngen nachgeht. Der Autor ist zu bewundern und das Buch ist nützlich. Andererseits bleibt die Theorie den Grundlagen verhaftet. Es bleibt offen, ob sie etwa für konkrete Fragen zum Langzeitverhalten gewöhnlicher Differentialgleichungen Werkzeuge bereithält oder ob sie sich z. B. mit der Differentialgeometrie verbinden läßt.

Tübingen

K.-P. Haderl



L. Ambrosio  
N. Dancer  
**Calculus of Variations  
and Partial Differential  
Equations**

Berlin u. a., Springer 2000, 347 S.,  
EUR 41,95

Das vorliegende Buch ist das Ergebnis einer zweiwöchigen Sommerschule mit dem Titel „Calculus of Variations and Partial Differential Equations“, die im September 1996 in Pisa stattfand. Der Untertitel „Topics on Geometrical Evolution Problems and Degree Theory“ bezieht sich auf die zwei Teile des Buches und spielt gleichzeitig an auf die beiden Hauptbeiträge von Luigi Ambrosio und Norman Dancer, die aus diesem Grund auch als Autoren erscheinen.

Teil I ist überschrieben „Geometric Evolution Problems“ und beginnt nach einer kurzen Einführung in die Problematik der folgenden Beiträge mit den ca. 90seitigen Lecture Notes von Ambrosio. Es folgen vier kürzere Arbeiten anderer Autoren im Umfang von ebenfalls etwa 90 Seiten. Auch Teil II, „Degree Theory on Convex Sets and Applications to Bifurcation“, beginnt mit einer kurzen Einführung, gefolgt von Dancers Lecture Notes, die sich über ca. 40 Seiten erstrecken. Die vier weiteren Arbeiten dieses Teils nehmen einen Raum von ca. 100 Seiten ein.

In Ambrosios Lecture Notes „Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions“ steht der *mean curvature flow* im Zentrum der Betrachtungen. Dabei handelt es sich um ein geometrisches Anfangswertproblem, bei dem man mit einer gegebenen Hyperfläche des  $\mathbb{R}^n$  startet und verlangt, dass diese sich längs ihrer Mittleren Krümmung bewegt. Schon für  $n = 3$  können dabei in endlicher Zeit Singularitäten auftre-

ten (geeignete „Hantel“, „fetter“ Torus), so dass Methoden der klassischen Differentialgeometrie versagen. Deshalb wurden in den letzten beiden Jahrzehnten schwache Formulierungen dieses Problems betrachtet, von denen der Varifaltigkeits-Zugang von Brakke aus dem Jahr 1978 wohl der erste war. Neben diesem maßtheoretischen Zugang gibt es verschiedene mengentheoretische Zugänge, wie den *level set approach*, den *distance approach* sowie den *barrier approach*. Ein weiterer Zugang führt über die sogenannten *Modica-Mortola-Funktionale* und die  $\Gamma$ -Konvergenz. Ambrosio stellt in seinen Lecture Notes den *level set approach* dar (in Kodimension Eins sowie in höherer Kodimension). Beginnend mit einer Anfangs-Hyperfläche  $\Gamma_0$  wählt man dabei eine gleichmäßig stetige Funktion  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : u_0(x) = 0\}$  und betrachtet die parabolische Differentialgleichung  $u_t = |\nabla u| \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|)$  zusammen mit der Anfangsbedingung  $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ . Diese partielle Differentialgleichung ist nichtlinear, degeneriert längs  $\nabla u$  und nicht wohldefiniert für  $\nabla u = 0$ . Deshalb verwendet man die Theorie der *Viskositäts-Lösungen*. In diesem Rahmen wird dann die eindeutige Lösbarkeit des obigen Anfangswertproblems bewiesen. Der Rest von Ambrosios Ausführungen besteht aus einem Beweis der Konsistenz dieses Zugangs mit dem klassischen Zugang, und aus einem Vergleich mit den anderen maßtheoretischen Zugängen einschließlich dem oben erwähnten Modica-Mortola-Zugang.

Ambrosios sehr sorgfältige Darstellung ist unter anderem deshalb so umfangreich geworden, weil es der Anspruch des Autors war „a self contained presentation of this subject and of the relevant techniques involved“ zu geben. Diesem selbstgesetzten Anspruch ist Ambrosio in vollem Umfang gerecht geworden, und man kann seine Lecture Notes jedem fortgeschrittenen Studenten, der sich für Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen interessiert, nur wärmstens empfehlen. Nur selten bekommt man ein hochaktuelles Forschungsgebiet so detailliert und vollständig dargeboten.

Der Rest des ersten Teils des Buches besteht aus den Arbeiten „Variational models for phase transitions, an approach via  $\Gamma$ -convergence“ (G. Alberti), „Some aspects of De Giorgi's barriers for geometric evolutions“ (G. Belletini, M. Novaga), „Partial Regularity for Minimizers of Free Discontinuity Problems with  $p$ -th Growth“ (A. Leaci) und „Free discontinuity problems and their non-local approximation“ (A. Braides).

Dancers Lecture Notes tragen den Titel „Degree theory on convex sets and applications to bifurcation“ und beginnen mit einer kurzen Einführung in die Theorie des *Abbildungsgrades* auf konvexen Mengen (endlich- und unendlichdimensional) bis hin zur fundamentalen *Index-Formel*. Einer kurzen Anwendung der Index-Formel auf das *Gelfand-Problem* folgt dann eine längere Diskussion eines *Populations-Modells* mit Hilfe der Index-Formel. Dabei handelt es sich um ein sogenanntes *Lotka-Volterra-Modell* mit Diffusion für zwei konkurrierende Spezies  $u$  und  $v$ . Neben der *trivialen Lösung*  $(0, 0)$  und den (für geeignete Parameter) *semitrivialen Lösungen*  $(u, 0)$  und  $(0, v)$  ist man vor allem an *koexistierenden Lösungen*  $u > 0$  und  $v > 0$  interessiert. Dancers Ausführungen schließen mit einer kurzen Diskussion des *asymptotischen Verhaltens* koexistierender Lösungen bei *starker Interaktion*.

Bei diesen Lecture Notes handelt es sich um eine schöne und lesbare Einführung in die Theorie des Abbildungsgrades zusammen mit interessanten neueren Anwendungen.

Die Titel der weiteren vier Arbeiten dieses zweiten Teils sind: „Nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents“ (D. Passaseo), „On the existence and multiplicity of positive solutions for semilinear mixed and Neumann elliptic problems“ (G. Cerami), „Solitons and Relativistic Dynamics“ (V. Benci, D. Fortunato) sowie „An algebraic approach to nonstandard analysis“ (V. Benci).

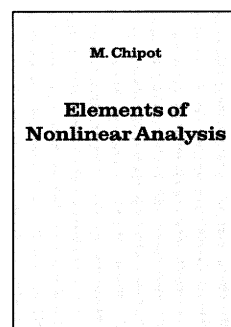
Ein Wort zu den beiden letztgenannten Arbeiten. Während bei dem Thema aus der Mathematischen Physik noch der Zusam-

menhang mit der Abbildungsgradtheorie – es werden topologische Methoden benutzt – zu sehen ist, gibt es nach Ansicht des Rezensenten keine mathematische Rechtfertigung dafür, einen Beitrag über einen – wenn auch neuen – Zugang zur Nichtstandard Analysis in einen Band mit dem Titel „Calculus of Variations and Partial Differential Equations“ aufzunehmen.

Fazit: Dies ist kein typischer Proceedingsband, sondern stellt – insbesondere wegen der Lecture Notes von Dancer und vor allem wegen der von Ambrosio – eine wichtige Bereicherung der anspruchsvollen Forschungsliteratur auf den Gebieten Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen dar. Es ist erfreulich, dass hier allerneueste Forschungsergebnisse so schnell Eingang – abgesehen von Zeitschriften – in die Literatur gefunden haben. Für Interessierte eine lohnenswerte Anschaffung!

Saarbrücken

M. Grüter



M. Chipot  
**Elements of Nonlinear  
 Analysis**

Basel u. a., Birkhäuser, 2000, 256 S.,  
 EUR 50,11

Das Buch beginnt in Kapitel 1 mit der Modellierung von Fragestellungen der Elastizitätstheorie und der Populationsdynamik. Im letzteren Fall ist das Ergebnis eine parabolische Reaktions-Diffusionsgleichung. Im ersten Fall erhält man die Energie, die der Körper bei einer elastischen Verformung

speichert und die zu minimieren ist, und insofern gehört die Elastizitätstheorie zur Variationsrechnung. Logischerweise enthält das Buch auch zwei Kapitel, die der Variationsrechnung zuzuordnen sind.

In Kapitel 9 findet man einen kurzen Abriss der „direkten Methoden“, wonach koerzive und schwach unterhalbstetige Funktionale minimierbar besitzen. Dies trifft insbesondere auf Energiefunktionale zu, welche im Gradienten (der höchsten Ableitung) konvex sind. Die Anwendung im Buch ist aber insofern unbefriedigend, als die Bedeutung für die Elastizitätstheorie überhaupt nicht diskutiert wird. Nach der Einleitung ist man neugierig geworden und hat eine Diskussion und die Einbettung dieses speziellen Resultats in den „state of the art“ erwartet. Es werden keine schwächeren Konvexitätsbegriffe erwähnt, kurzum, man findet nichts über die bahnbrechenden Ergebnisse und offenen Fragen der Elastizitätstheorie.

Kapitel 10 widmet sich nichtkonvexen Fällen, genauer gesagt, es werden konkrete Funktionale mit sogenannten „W-Potentialen“ diskutiert, welche keine Minimierer besitzen. Diese Beispiele sind der Modellierung der Mikrostruktur von Materialien entlehnt, die den Phasenübergang von Austenit zu Martensit zu beschreiben versucht. Die Minimalfolgen, deren Ableitungen wegen der Nichtexistenz von Minimierern nicht gegen eine Funktion konvergieren können, konvergieren in einem geeigneten Sinne gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß, welches die Verteilung der Werte der Ableitung im Grenzwert beschreibt: Die Definition dieses „Youngschen Maßes“ trifft den Leser völlig unvorbereitet, so dass ohne weitere Literatur den Rechnungen nur formal zu folgen ist. (Existenz kann nicht definiert werden!) Die Ergebnisse für die vorgestellten Beispiele sind nicht überraschend (der Grenzwert ist stets eine gleichgewichtete konvexe Linearkombination von Dirac-Maßen mit Trägern in den Minima des W-Potentials), so dass man sich zwangsläufig fragt, was man eigentlich gewonnen hat. Ein Beispiel mit nicht gleichgewichteten Dirac-Maßen als

Grenzwert wäre da sehr illustrativ. Das Beispiel mit den vier Potentialtöpfen für Matrizen ist zwar sehr bekannt aber nicht typisch: es sollte nicht verschwiegen werden, dass im allgemeinen Fall die Unverträglichkeit der Rangbedingung zwischen den Minima nicht so einfach (wenn überhaupt) behoben werden kann. Schließlich wird eine Finite-Elemente-Methode vorgestellt, welche das Youngsche Grenzmaß durch die Minimierer endlich dimensionaler Funktionale in geeigneter Weise approximiert. Der Leser ist über die praktische Bedeutung dieses Resultats etwas ratlos: Einerseits ist in allen Beispielen das Youngsche Maß in mehr oder weniger einfacher Weise theoretisch zu ermitteln, andererseits dürfte die Berechnung eines globalen Minimierers des endlich dimensionalen Funktionals recht aufwendig wenn nicht unmöglich sein, da viele lokale Minimierer durch die Reduktion des Funktionals auf einen endlich dimensionalen Raum finiter Elemente zusätzlich erzeugt werden. Es ist rätselhaft, warum der Autor diese Schwierigkeiten, die er kennt, nicht im Buch erläutert.

Diese beiden Kapitel 9 und 10 orientieren sich an aktueller Forschung (wenn auch viele Fragen, wie angedeutet, nicht ausreichend diskutiert werden). Die übrigen Kapitel des Buches sind aber weder hinsichtlich der Aktualität noch in Bezug auf die Thematik mit diesen beiden verbunden. Dabei wäre ein inhaltlicher Bezug der Variationsrechnung zur Theorie nichtlinearer elliptischer Probleme einfach herzustellen. Die „Euler-Lagrange-Gleichung“ taucht indessen nur kurz in Kapitel 9 auf, und obgleich hergeleitet findet man nirgends den Begriff der „Natürlichen Randbedingung“.

Die Behandlung (linearer und nichtlinearer) elliptischer Probleme in den Kapiteln 3 und 5 und (linearer und nichtlinearer) parabolischer Probleme in den Kapiteln 11 und 12 folgt der alten französischen Tradition: Die schwache Version der Gleichung wird durch ein Galerkin-Verfahren approximiert, die endlich dimensionalen Gleichungen werden durch Lax-Milgram, einen Fixpunktsatz oder andere bekannte endlich dimensionale

Techniken gelöst, ein Kompaktheits- oder Monotonie-Argument gestattet den Grenzübergang. (Es handelt sich um den Monotonie-Begriff, der in den 70er Jahren en vogue war, nicht um den in geordneten Banachräumen.) Dieser Zugang eröffnet direkt die Anwendung Finiten-Elemente-Methoden, denen konsequenterweise auch Kapitel 8 gewidmet ist. Es wird festgestellt, dies sei (fast) die einzige Möglichkeit, nichtlineare elliptische Probleme zu behandeln, was in Anbetracht des Kapitels über Variationsrechnung verwundert. Die „stationäre“ Aufbereitung parabolischer Probleme ist gut für die drei Forderungen von Hadamard (Existenz, Eindeutigkeit, stetige Abhängigkeit von den Daten), sie ist aber untauglich für jegliche „qualitative Theorie“ der Dynamik. Der Begriff der Halbgruppe wird zwar zitiert aber nicht benutzt. Es sei indessen erwähnt, dass sich ein Kapitel 13 über „Asymptotische Analysis“ für ein spezielles „nichtlokales“ parabolisches Problem sowie über „Blow-up“ einiger spezieller nichtlinearer Wärmeleitungsgleichungen anschließt. Eine Diskussion populationsdynamischer Modelle wird nicht wieder aufgenommen.

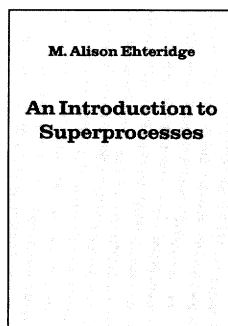
Aberundet werden die Techniken über schwache Lösungen in Kapitel 4 über „Elliptische Variationsungleichungen“ mit Anwendung auf ein lineares Hindernisproblem. Die Regularitätsaussage aus Kapitel 6 passt indessen nicht auf dieses Hindernisproblem; die Bedeutung der hier behandelten Variationsungleichungen für angewandte Probleme bleibt ungeklärt.

Nichteindeutigkeit ist ein wichtiges und entscheidendes Merkmal nichtlinearer Probleme. Die meisten der in Kapitel 5 vorgestellten elliptischen Gleichungen lassen durch die Voraussetzung der Monotonie nur eine einzige Lösung zu; das einzige in einem eigenen Kapitel 7 über „Nichteindeutigkeit“ vorgestellte Problem mit mehreren Lösungen ist ein quasilineares Randwertproblem mit einem nichtlokalen Term. Der Leser wartet vergebens auf einen Hinweis auf mögliche Bifurkationen von Lösungen nichtlinearer (elliptischer) Probleme in Abhängig-

keit von Parametern – die Paradigmen für Nichteindeutigkeit schlechthin. Die Darstellung ist angenehm lesbar und durch das Kapitel 2 über Funktionalanalysis und Sobolevräume auch für Studenten mittlerer Semester zum Selbststudium geeignet.

Augsburg

H. Kielhöfer



M. Alison Etheridge  
**An Introduction to  
 Superprocesses**  
 American Mathematical Society 2000  
 (University Lecture  
 Series, Vol. 20)

187 S., US\$ 33,-, ISBN 0-8218-2706-5.

Bei Superprozessen handelt es sich um eine gewisse Klasse von maßwertigen Diffusionsprozessen, die als Vielteilchen-Limes aus wechselwirkenden Teilchensystemen hervorgehen. Die prominentesten Vertreter sind der Dawson-Watanabe-Prozess (vulgo Super Brown'sche Bewegung) und der Fleming-Viot-Prozess. Die Theorie dieser Prozesse hat sich in den letzten Jahren rasch entwickelt. Das vorliegende Buch liefert eine Einführung in die Thematik und gibt dann eine gute und ausgewogene Zusammenfassung klassischer Ergebnisse und einen Einblick in den Stand der Forschung.

Das Buch ist in neun Kapitel gegliedert. In den ersten beiden Kapiteln werden die Prozesse als Diffusionslimiten der Teilchensysteme eingeführt und dann durch Martingalprobleme charakterisiert, auf die ein gewisses Gewicht gelegt wird. Das Hauptaugenmerk liegt auf dem Dawson-Watanabe-Prozess. Es werden die klassischen Ergebnisse über das Langzeitverhalten, Okkupations-

zeiten, Momente, Stetigkeitseigenschaften sowie die Interpretation als stochastische partielle Differentialgleichung angegeben und hergeleitet.

Die Genealogie des DW-Prozesses kann in der sogenannten Brown'schen Schlange kodiert werden. Dieser Aspekt wird im dritten Kapitel detailliert beschrieben. Später wird die von Donnelly und Kurtz gefundene Kodierung der Genealogie des FV-Prozesses durch den sogenannten Lookdown-Prozess behandelt. Dieses Kapitel ist sehr schön gelungen (wobei diese Hervorhebung nur eine Aussage über den Geschmack des Besprechers darstellt).

Weitere Kapitel behandeln, aufbauend auf der Familienzersetzung des DW-Prozesses, den Stetigkeitsmodul der Pfade des historischen Prozesses sowie Dimensionseigenschaften des Trägers des DW-Prozesses zu festen Zeiten wie auch der Vereinigung der Träger zu allen Zeiten (Range). Es werden polare Mengen charakterisiert und Kollisions-Lokalzeiten beschrieben. Analog zur Brown'schen Bewegung, die in einer und zwei Dimensionen Vielfachpunkte jeder Ordnung, in drei Dimensionen Doppelpunkte, und in höheren Dimensionen keine Vielfachpunkte besitzt, werden Selbstüberschneidungseigenschaften des DW-Prozesses gezeigt.

Über die Laplace-Transformierte der Austrittsmaße aus einem Gebiet  $D$  ist der DW-Prozess mit der nichtlinearen PDGL  $\Delta u = u^2$  in  $D$  verknüpft. Le Gall's Darstellung aller Lösungen (analog zur Poisson'schen Formel des Dirichlet Problems für  $\Delta u = 0$ ) wird hergeleitet und in Zusammenhang mit den Begriffen der Polarität, Kapazität, und Regularität von Mengen gestellt. Es werden Wieners Test und Kolmogoroffs Test für den DW-Prozess vorgestellt.

Zwei Kapitel (7 und 9) sind DW-Prozessen mit zusätzlichen Wechselwirkungen gewidmet. Zunächst wird der Perkins'sche Kalkül vorgestellt, mit dem Wechselwirkungen lokaler aber auch globaler Art auf die Bewegung der Teilchen behandelt werden können. Mit Hilfe der Beschreibung durch eine

Variante des Lookdown-Prozesses kann die Situation vereinfacht werden zu einem System unendlich vieler gekoppelter stochastischer Differentialgleichungen. Danach wird Dawsons Girsanovtransformation hergeleitet, die den Schlüssel darstellt zur Behandlung von zustandsabhängigem Erwartungswert der Verzweigung. Auch Selektion im FV-Prozess kann auf diese Weise beschrieben werden.

Im letzten Kapitel werden neuere Ergebnisse für DW-Prozesse mit Wechselwirkungen beschrieben, wie (wechselseitig) katalytisches Verzweigen, mehrstufiges Verzweigen (multi-level), Reskalierung von entfernteren Teilchenmodellen (Kontaktprozess) zu DW-Prozessen.

Das Buch ist gut geschrieben und macht besonders ab dem dritten Kapitel viel Freude beim Lesen. Der Stil ist zum Teil informell und zielt mehr auf ein intuitives Verständnis denn auf technische Beweise ab, die fast vollständig weggelassen werden. Dafür werden die zu Grunde liegenden Ideen in einer beeindruckenden Klarheit beschrieben. Dabei stellt die Autorin zum Teil sehr hohe Anforderungen an den mathematischen Hintergrund und die Vorstellungskraft des Lesers. Das Buch eignet sich also sehr gut für jene, die sich rasch und umfassend über das in Rede stehende Thema informieren wollen und bereit sind, zur Vertiefung und für technische Details auf Originalarbeiten zurückzugreifen. Als Grundlage für ein Seminar eignet sich das Buch aufgrund des rapiden Tempos nur bedingt, vielleicht am ehesten in einem Doktorandenseminar.

Erlangen

A. Klenke



M. Fabian, P. Habala, F. Hájek  
V. Montesinos Santalucía  
J. Pelant, V. Zizler

**Functional Analysis  
and Infinite-Dimen-  
sional Geometry**

M. Fabian, P. Habala  
P. Hájek, V. Montesinos  
Santalucía, J. Pelant  
V. Zizler

**Functional Analysis  
and Infinite-Dimen-  
sional Geometry**

Springer Verlag, 2001, 451 Seiten, EUR 97,-

Eine Gruppe von Funktionalanalytikern, die (überwiegend) in der tschechischen Republik arbeiten und in Fachkreisen gut bekannt sind, hat ein umfangreiches Lehrbuch vorgelegt. Es handelt sich um die erweiterte Fassung eines Manuskripts, das bereits 1996 von der Tschechischen Akademie der Wissenschaften heraus gegeben wurde.

Auf knapp 450 Seiten findet man sowohl eine Einführung in den Standardstoff der Funktionalanalysis als auch einen Querschnitt durch zahlreiche Entwicklungen der Banachraum-Geometrie der letzten Jahrzehnte. Die Kapitelüberschriften lauten:

- Basic Concepts
- Hahn-Banach and Banach Open Mapping Theorems
- Weak Topologies
- Locally Convex Spaces
- Structure of Banach Spaces
- Schauder Bases
- Compact Operators on Banach Spaces
- Differentiability of Norms
- Uniform Convexity
- Smoothness and Structure
- WCG Spaces
- Topics in Weak Topologie

Es dürfte kaum ein anderes Buch zur Funktionalanalysis geben, das eine derartige Fülle von Stoff abdeckt. Ich wüsste jedenfalls keine Quelle, in der man sich in einem einzigen Buch über so viele Stichworte informieren kann.

Wem kann man nun dieses Buch empfehlen? Vorbehaltlos sicher allen, die Vorlesungen zur Funktionalanalysis halten. Hier findet man interessante Anregungen, als Vorlage für eine Einführungsveranstaltung sollte man es aber wohl doch nicht nehmen: Vieles ist recht kurz dargestellt, einige wichtige Bereiche fehlen völlig (so wird z. B. der Spektralsatz nur für kompakte Operatoren behandelt). Die Beweise sind bemerkenswert elegant, Fehler – selbst wesentliche Druckfehler – habe ich nicht entdecken können. Außerdem gibt es ein sehr umfangreiches Aufgabenreservoir, durch das man viele ergänzende Sachverhalte erarbeiten kann. (Die Aufgaben betreffen teilweise Ergebnisse aus Originalarbeiten, die Beweise sind durch sinnvolle Anleitungen und Tipps dennoch gut zu bewältigen.)

Mit Einschränkungen würde ich das Buch auch angehenden Doktoranden empfehlen. Sie können sich einen guten Überblick darüber verschaffen, was in der Funktionalanalysis, Abteilung Banachraumtheorie, in letzter Zeit diskutiert wurde, und durch das Lösen der Aufgaben können sie sich in die wichtigsten Techniken einarbeiten. Die Einschränkung hängt mit meinem wesentlichsten Kritikpunkt zusammen: Das Buch ist de facto wie ein Nachschlagewerk geschrieben. Es gibt – für mich ein Novum in der Lehrbuchliteratur – nicht den leisesten Versuch, die behandelten Gebiete zu motivieren, ihren Stellenwert zu beschreiben, auf Historisches hinzuweisen, weiterführende Literatur zu nennen usw. Für jemanden, dem das alles noch neu ist, entsteht der Eindruck eines Sammelsuriums von Einzelergebnissen, die scheinbar alle gleich wichtig (oder unwichtig) sind. Bezüge zu anderen Gebieten sind ebenfalls völlig ausgespart, der Leser dürfte nach der Lektüre einen extrem verengten Eindruck vom Gebiet Funktionalanalysis haben.

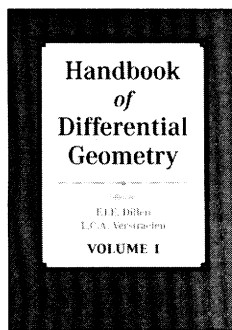
Daraus folgt auch, dass ich das Buch für Studierende, die sich in das Gebiet einarbeiten wollen, für ungeeignet halte (als Ergänzung zu einer Vorlesung hätte es aber sicher eine Berechtigung). In Hinblick auf diese

Zielgruppe finde ich es auch problematisch, dass sich die Autoren bei der Verwendung des Begriffs „Netz“ für eine Definition entschieden haben, die von der sonst verwendeten abweicht: Die Indexmenge ist bei ihnen eine beliebige geordnete Menge, sie verlangen nicht, dass sie nach oben gerichtet ist. (Oder ist beim Korrekturlesen übersehen worden, dass da etwas fehlt?)

Es wäre sicher zu begrüßen gewesen, wenn der Verlag das Buch unter einem Titel herausgegeben hätte, der dem Inhalt besser entspricht, etwa „Topics in Banach Space Theory“. Auch bin ich, siehe oben, mit dem Passus „... the text can be used for independent study“ aus dem Ankündigungstext überhaupt nicht einverstanden. Es ist schade, dass der Ladenpreis von rund 100 EURO die Verbreitung des Buches auch in der Zielgruppe bremsen wird, für die man es gut empfehlen könnte.

Berlin

E. Behrends



F. Dillen, L. Verstraeten  
(Eds.)

**Handbook of  
Differential Geometry**  
Vol. 1

Amsterdam: North-Holland 2000,  
xii+1054 pp., \$ 177.50.

Der vorliegende erste Band eines „Handbuchs der Differentialgeometrie“ umfasst 11 Übersichtsartikel zu aktuellen Teilgebieten der Differentialgeometrie.

Der Inhalt im einzelnen:

- [1] Maks A. Akivis, Vladislav V. Goldberg,  
Differential geometry of webs (1–152);

- [2] David E. Blair, Spaces of metrics and curvature functionals (153–185);  
[3] Bang-Yen Chen, Riemannian submanifolds (187–418);  
[4] Andrzej Derdziński, Einstein metrics in dimension four (419–707);  
[5] Peter B. Gilkey, The Atiyah-Singer index theorem (709–746);  
[6] Carolyn S. Gordon, Survey of isospectral manifolds (747–778);  
[7] Ulo Lumiste, Submanifolds with parallel fundamental form (779–864);  
[8] Katsuhiro Shiohama, Sphere theorems (865–903);  
[9] Udo Simon, Affine differential geometry (905–961);  
[10] Gudlaugur Thorbergsson, A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations (963–995);  
[11] Tom Willmore, Curves (997–1023);  
Author index (1025–1036); Subject index (1037–1054).

Es ist natürlich nicht möglich und sicherlich auch nicht Aufgabe dieser Buchbesprechung, die Artikel im einzelnen inhaltlich zu würdigen. Wir verweisen hierzu auf die Einzelreferate im Zentralblatt und den MathReviews.

Es handelt sich um Spezialartikel. Daher versteht sich die Bezeichnung „Handbuch“ hier nicht im Sinne eines Nachschlagewerks. Die ursprüngliche Vorstellung der Herausgeber, einen Einstieg in die Differentialgeometrie von ihren Grundlagen und „zentralen Themen“ aus zu präsentieren, der dann in speziellere Bahnen verzweigt, erwies sich als nicht realisierbar. Es ist ihnen aber eine Sammlung ausgezeichneter Artikel geglückt, die fundiert in einige wichtige Teilbereiche – in eher zufälliger Kombination – einführen.

Die 12 Autoren sind ausgewiesene Kenner und Akteure der jeweiligen Forschungsbereiche. Hinsichtlich der genaueren Themenauswahl, des Umfangs, der Art und Ausführlichkeit der Präsentation wurde den Autoren von den Herausgebern freie Hand gelassen. Der zugestandene Freiraum wurde genutzt, zentrale Themenkreise, Konzepte und Ideen verständlich zu präsentieren und einzuordnen, von historischen Entwicklungen

gen bis hin zu aktuellen offenen Fragen des jeweiligen Gebiets, ergänzt durch eine umfassende Bibliographie und ein (manchmal recht knapp gehaltenes) Inhaltsverzeichnis. Diese gemeinsame Zielsetzung aller Autoren wurde im einzelnen Artikel souverän und in individuellem Stil – mit sehr unterschiedlichem Platzbedarf – umgesetzt:

Einigen Autoren war offensichtlich eine umfassende Vorstellung aller wichtigen Resultate ihres Fachgebiets ein Anliegen ([1], [3], [4], [7]), sei es in kompakter Form ([1]), enzyklopädisch ([3]) oder fast lehrbuchhaft mit einer Fülle an Beweisen ([4], [7]). Die anderen Artikel haben einführenden ([11]) oder Überblickscharakter, setzen thematische Schwerpunkte oder begleiten den Leser anhand eines historischen Abrisses bis zu den jüngsten Ergebnissen und Problemen. Welche Art der Präsentation ein Leser bevorzugt, ist natürlich Geschmackssache. Für einen raschen Einstieg liegt wohl die Würze eher in der Kürze, ergänzt durch gezielte Anleitung zum weiteren Studium; auf der anderen Seite ist eine weitgehend vollständige Bestandserhebung eines sehr aktiven, weitverzweigten Forschungsgebietes von unschätzbarem Wert. Man sollte die unterschiedliche Länge der Artikel aber nicht als Indiz für eine Rangfolge „mathematischer Wichtigkeit“ missverstehen (dann käme etwa [5] „zu kurz“ weg). Die bunte Vielfalt ist jedenfalls auch ein Reiz dieser Sammlung.

Die geleistete Literaturrecherche war in jedem Fall akribisch. Die Artikel sind sehr gut konzipiert und aufgeschrieben, als nützliche Quelle für Fakten und Referenzen, decken vor allem aber auch Ideen und Beziehungen auf. Sie erscheinen für Experten und Nicht-Experten gleichermaßen interessant und hilfreich.

Eine Fülle von Themen, die für weitere Bände vorgesehen sind, wird im Vorwort stichpunktartig aufgelistet und zum Teil auch in S. S. Cherns Einleitung angesprochen. So werden beispielsweise differentialgeometrische Anwendungen der Seiberg-Witten-Invarianten in [4] nur recht knapp behandelt, was gerechtfertigt erscheint, da

sie in einem späteren Band ausführlichere Würdigung erfahren sollen.

Als Ergänzung zu diesem Band und den zukünftigen Bänden, die wir mit Spannung erwarten dürfen, sei abschließend Marcel Bergers ausführlicher Report [12] empfohlen.

[12] Marcel Berger, Riemannian geometry during the second half of the twentieth century, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 100 (1998), no. 2, 45–208.

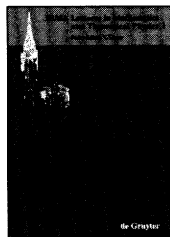
Kiel

J. Heber

## IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics

Edited by: Vladimir Turaev, Strasbourg, France

This series is devoted to the publication of proceedings of conferences or workshops sponsored by the Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, France, research monographs and other mathematical writings judged appropriate by the editor. The main focus will be proceedings of the international meetings between mathematicians and theoretical physicists (known under the French abbreviation "RCP") held at IRMA twice a year since about 30 years. These meetings are aimed at creating and strengthening bridges between active mathematicians and physicists in the areas of current strong development. The goal is to promote the recent advances in these disciplines and to make them accessible to wide circles of professional mathematicians and students of mathematics and physics.



**Volume 1**  
**Deformation  
Quantization**  
Proceedings of the  
Meeting of  
Theoretical Physicists  
and Mathematicians,

**Strasbourg May 31 – June 2, 2001**

Editor: Gilles Halbout

2002. 24 x 17 cm. VIII, 236 pages. Paperback.  
€ 34,95 [D] / sFr 56,- / US\$ 34.95 for USA,  
Canada and Mexico • ISBN 3-11-017247-X

Contains eleven refereed research papers on deformation quantization by leading experts in the respective fields.

Topics covered are: star-products over Poisson manifolds, quantization of Hopf algebras, index theorems, globalization and cohomological problems. Both the mathematical and the physical approach ranging from asymptotic quantum electrodynamics to operads and prop theory will be presented. Historical remarks and surveys set the results presented in perspective.

**Coming November 2002**

**Volume 2**  
**Locally compact quantum groups  
and groupoids**

Proceedings of the Meeting of Theoretical  
Physicists and Mathematicians,  
Strasbourg February 21–23, 2002

Editor: Leonid Vainerman

2002. 24 x 17 cm. VIII, 236 pages. Paperback.  
Approx. € 36,95 [D] / sFr 59,- / US\$ 36.95 for  
USA, Canada and Mexico

Topics covered are: star-products over Poisson manifolds, quantization of Hopf algebras, index theorems, globalization and cohomological problems. Both the mathematical and the physical approach ranging from asymptotic quantum electrodynamics to operads and prop theory will be presented. Historical remarks and surveys set the results presented in perspective.

Prices are subject to change

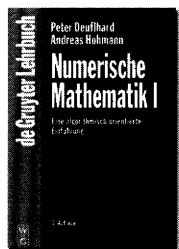
---

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG  
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin  
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0  
Fax +49-(0)30-2 60 05-251  
www.deGruyter.de



de Gruyter  
Berlin · New York

# de Gruyter Lehrbuch



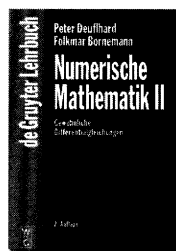
Peter Deuffhard und Andreas Hohmann  
**Numerische Mathematik I**  
**Eine algorithmisch orientierte Einführung**  
**3., überarbeitete und erweiterte Auflage**

2002. 15,5 x 23 cm. XII, 370 Seiten.  
Broschur. € 24,95 [D] / sFr 40,-  
• ISBN 3-11-017182-1

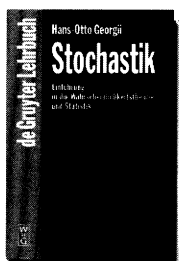
Dieses Lehrbuch hat sich seit der zweiten Auflage zu einem vielbeachteten Klassiker im deutschsprachigen Raum entwickelt. Die dritte Auflage wurde in Teilen überarbeitet und um stochastische Eigenwertprobleme erweitert.

Peter Deuffhard und Folkmar Bornemann  
**Numerische Mathematik II**  
**Gewöhnliche Differentialgleichungen**  
**2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage**

2002. 15,5 x 23 cm. XII, 509 Seiten.  
Broschur. € 29,95 [D] / sFr 48,-  
• ISBN 3-11-017181-3



Gegenüber der ersten Auflage sind neue Anwendungsprobleme aus Moleküldynamik und Schaltkreissimulation aufgenommen worden. Ein umfangreiches Kapitel behandelt die in den Anwendungen so wichtigen Randwertprobleme inklusive Parameteridentifizierung und optimaler Steuerung von Prozessen.



Hans-Otto Georgii  
**Stochastik**  
**Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**

2002. 15,5 x 23 cm. IX, 356 Seiten.  
Broschur. € 24,95 [D] / sFr 40,-  
• ISBN 3-11-017235-6

Dieses neue Lehrbuch bietet eine Einführung in die zentralen Ideen und Ergebnisse der Stochastik, mit gleichem Gewicht auf den beiden Teilgebieten Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Mit einem Stoffumfang von etwa zwei Semestern führt das Buch in vielen Punkten weiter als andere vergleichbare Texte.

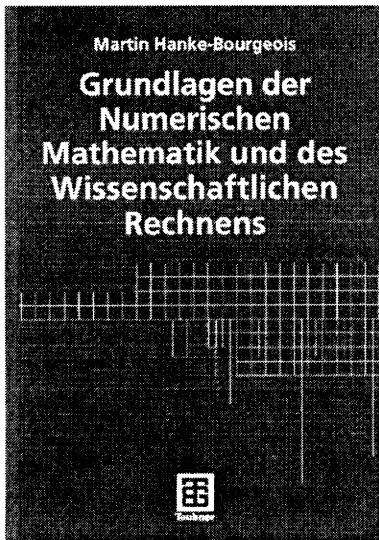
Preisänderungen vorbehalten

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG  
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin  
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0  
Fax +49-(0)30-2 60 05-251  
[www.deGruyter.de](http://www.deGruyter.de)



de Gruyter  
Berlin · New York

## ***Konsequent anwendungsbezogen***



Martin Hanke-Bourgeois  
**Grundlagen der  
Numerischen Mathematik  
und des  
Wissenschaftlichen  
Rechnens**

2002. II, 838 S. (Mathematische  
Leitfäden, hrsg. von Bierstedt,  
Klaus D./Trautmann, Günther/  
Köthe, Gottfried) Br. EUR 64,90  
ISBN 3-519-00356-2

Inhalt: Algebraische Gleichungen - Interpolation und Approximation  
- Mathematische Modellierung - Gewöhnliche Differentialgleichungen  
- Partielle Differentialgleichungen

In dieser umfassenden Einführung in die Numerische Mathematik wird konsequent der Anwendungsbezug dargestellt. Zudem werden dem Leser detaillierte Hinweise auf numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen gegeben. Ergänzt um ein Kapitel zur Modellierung soll den Studierenden auf diesem Weg das Verständnis für das Lösungsverhalten bei Differentialgleichungen erleichtert werden. Das Buch eignet sich daher sowohl als Vorlage für einen mehrsemestrigen Vorlesungszyklus zur Numerische Mathematik als auch für Modellierungsvorlesungen im Rahmen eines der neuen Studiengänge im Bereich des Wissenschaftlichen Rechnens (Computational Science and Engineering).

Erhältlich im Buchhandel oder beim Verlag. Änderungen vorbehalten.

Teubner Verlag · Abraham Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden  
Fax: 0611.7878-400 · [www.teubner.de](http://www.teubner.de)

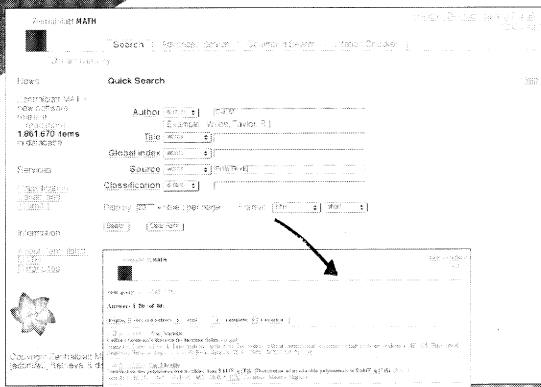


# Zentralblatt MATH

## www.emis.de/ZMATH

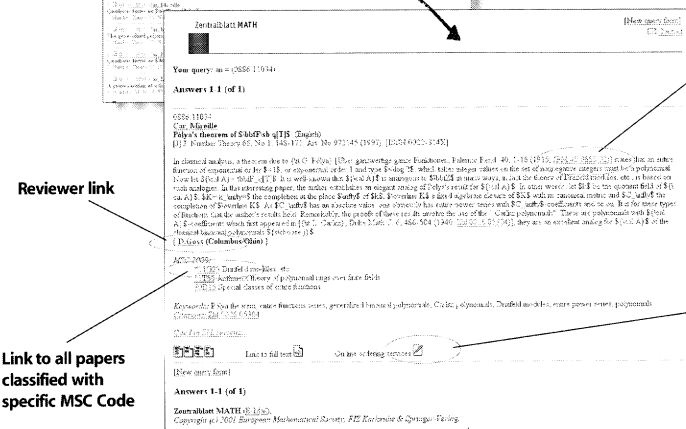
Now with easy  
navigation and multilingual  
user interfaces

The longest term running and most comprehensive abstracting service in mathematics. More than 1.8 million entries from more than 2,000 serials and journals. Zentralblatt MATH covers all of pure and applied mathematics plus related fields.



### New and enhanced services for scientists:

- ▶ Cross Reference link generator and Citation checker
- ▶ Direct links to articles and journals
- ▶ Links to electronic versions of all major publications and to *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* (research publications prior to 1931)
- ▶ Extended coverage of „rare“ literature through a European network of editorial offices
- ▶ Additional search facilities through keywords, MSC-classification



Direct link to  
*Jahrbuch für die  
Fortschritte der  
Mathematik*

Link to  
libraries

Reviewer link

Link to all papers  
classified with  
specific MSC Code

For more information about Zentralblatt MATH, visit:

[www.emis.de/ZMATH](http://www.emis.de/ZMATH)

or contact: Clemens Heine · e-mail: [heine@springer.de](mailto:heine@springer.de)  
Springer-Verlag Heidelberg · Tiergartenstr. 17 · D-69121 Heidelberg · Germany  
d&p · 8036/MNTZ/SF



Springer

