

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Verlag

B. G. Teubner GmbH  
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden  
www.teubner.de  
www.gwv-fachverlage.de

*Geschäftsführer:* Dr. Hans-Dieter Haebel  
*Verlagsleitung:* Dr. Heinz Weinheimer  
*Gesamtleitung Anzeigen:* Thomas Werner  
*Gesamtleitung Produktion:* Reinhard van den Hövel

## Leserservice

Tatjana Hellwig  
Telefon: (06 11) 78 78-1 51  
Fax: (06 11) 78 78-4 23  
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

## Produktmanagement

Stefanie Hoffmann  
Telefon: (06 11) 78 78-3 79  
Fax: (06 11) 78 78-4 39  
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

## Abonnentenverwaltung

Ursula Müller  
Telefon: (0 52 41) 80-19 65  
Fax: (0 52 41) 80-96 20  
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

## Anzeigenleitung

Christian Kannenberg  
Telefon: (06 11) 78 78-3 69  
Fax: (06 11) 78 78-4 30  
E-Mail: christian.kannenberg@bertelsmann.de  
www.gwv-anzeigen.de

## Erscheinungsweise und Bezugspreise

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von € 95,- (158,- sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

© B. G. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002

Der Teubner Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim

Druck und buchbinderische Verarbeitung: pagina media gmbh, Hemsbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISSN 0012-0456

**Vorwort** . . . . . 89

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**Domain decomposition in optimal control problems for distributed parameter systems**  
 J. E. Lagnese, G. Leugering . . . . . 91

**Gitter und Modulformen**  
 G. Nebe . . . . . 125

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**G. Fischer, J. Piontkowski: Ruled Varieties**  
 E. Sernesi . . . . . 45

**D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov: A Course in Metric Geometry**  
 W. Ballmann . . . . . 46

**M. R. Murty: Problems in Analytic Number Theory**  
 S. J. Patterson . . . . . 48

**E. Krätzel: Analytische Funktionen in der Zahlentheorie**  
 S. J. Patterson . . . . . 49

**R. Carroll: Quantum Theory, Deformation and Integrability**  
 P. Vanhaecke . . . . . 51

**W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander: Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems**  
 R. Nagel . . . . . 52

### In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

**P. Ullrich:** Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“:  
Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorboten der komplexen Räume

**H.-J. Baues:** Atoms of Topology

---

### Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen  
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle  
Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund  
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg  
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln  
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität  
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1<sup>1/2</sup>, 91054 Erlangen  
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität,  
Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena  
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

### Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810,  
NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Vorwort

In diesem Heft finden Sie neben den Buchbesprechungen die Ausarbeitungen von zwei Plenarvorträgen von DMV Jahrestagungen. Herr Leugering hat 2000 in Dresden vorgetragen und Frau Nebe in diesem Jahr in Halle.

Die Befragung der Leser des Jahresberichts im 2. Quartal hat einige interessante Anregungen gebracht. Das Interesse der Leser richtet sich in etwa gleichgewichtig auf Übersichtsartikel, historische Beiträge und Buchbesprechungen. Eine deutliche Anzahl der Leser wünscht sich mehr Beiträge aus den verschiedenen Bereichen der angewandten Mathematik. Allerdings wurden auch Wünsche nach mehr didaktischen Arbeiten sowie algebraischer Geometrie und Zahlentheorie geäußert.

Das DMV-Präsidium hat über die Ausrichtung des Jahresberichts beraten und einige Maßnahmen eingeleitet. Ab 2003 soll das Herausbergremium vergrößert werden, um die Breite der Mathematik besser abzudecken. Um einen breiten Leserkreis zu erreichen, sollen die Autoren gebeten werden, insbesondere die Einleitung wirklich allgemeinverständlich zu halten und die Relevanz des Beitrags in einem größeren Kontext darzustellen.

Weitere Anregungen würden die Herausgeber natürlich begrüßen.

A. Krieg





## Domain decomposition in optimal control problems for distributed parameter systems

J. E. Lagnese and G. Leugering



### Abstract

- Keywords and Phrases: Domain decomposition, optimal control
- AMS subject classification: 49J20, 49M27, 49M20, 35L20, 58J45

In this survey article we consider methods of domain decomposition for static and more importantly for dynamic partial differential equations on complicated domains, like graph-type or heterogenous domains, which are subjected to controls. In this context one is either interested in solving the corresponding optimality conditions, or in establishing gradient or even higher order informations. Therefore, one is lead to coupled 'direct' and 'adjoint' equations. Instead of just using domain decomposition methods as a convenient computational tool for solving the system equations, we consider mainly methods that can be applied to the corresponding optimality systems. Moreover, we emphasize that methods from optimal control theory of partial differential equations are important in developping domain decomposition methods by the way of 'virtual controls'. We also point out that decomposition schemes with optimized transmission properties are very useful in the context of real-time large-scale optimal control problems. For that reason, we believe that the material presented here is of general interest, and, therefore, we kept the presentation in a general context.

Eingegangen: 8. 8. 2002

J. E. Lagnese, Department of Mathematics Georgetown University,  
Washington DC 20057, USA, lagnese@math.georgetown.edu

G. Leugering, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Mathematik,  
Schloßgartenstr. 7, 64289 Darmstadt, leugering@mathematik.tu-darmstadt.de

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**

© B. G. Teubner 2002

## 1 Introduction

When dealing with complex systems, either just for the purpose of simulation or in order to compute optimal controls together with the optimized dynamics, one is forced to look for some sort of model reduction and decomposition. This is particularly true in the context of real-time control of such systems and even more so for systems involving partial differential equations on network-like domains. Problems on graphs and more general on multiply-linked domains occur in many applications. In particular, problems of transport of gas in a complex network of pipelines, transport of electric power in networks of transmission lines, transport of water and sediments in sewer-systems or irrigation networks (See [7] and the references therein), the transport of solutes in roots and structured soil, blood flow in the artery system, the flow of currents in the neuronal system, the transmission of vibrations in flexible elastic multi-link structures and much more. In all of these applications one is interested in one way or another to control physical quantities in order to achieve a desired state of the system under consideration. Each of the problems mentioned above have a typical real-time character, namely the transport velocity, according to which the time which a signal needs to travel from the source to the controlled 'node' can be estimated, to the effect that the control action can be based on a hierarchy of models and optimal control problems.

In this survey paper we want to focus on some general concept of model and control reduction, namely on (dynamic) domain decomposition. The methods to be discussed are very general but still fairly easy to understand. We will not, however, give detailed proofs of the more complex results but rather be more explicit on the simple ones. We consider methods of domain decomposition of optimal control problems for partial differential equations important because they are inherently parallel and reduce the global 'heterogenous' problem on a complex domain into local simpler ones for which standard (real-time capable) software is available. Another aspect of this article is to emphasize the relevance of optimal control theory also in the development of domain decomposition algorithms for the purpose of numerical simulations. We therefore concentrate on such algorithms that can be obtained by optimization techniques.

We present the domain decomposition methods and the corresponding convergence analysis on the infinite dimensional level and establish a posteriori estimates which are independent of a particular discretization. We thereby underline the flexibility of the methods. On the other side, the numerical discretization and the implementation of the algorithms, also as preconditioners, are not discussed in this paper. We, nevertheless, provide some numerical evidence.

## 2 Introductory material on Domain decomposition methods for one-dimensional problems

### 2.1 Unbounded domains

This section should serve as a first self-contained motivation for dynamic domain decomposition methods. The presentation is highly selective and does not attempt to ac-



count for the vast literature in this area. See the monograph of Quarteroni and Valli [27] for an excellent general reference on domain decomposition methods for partial differential equations. We begin our discussion with two very simple one-dimensional (1-d) partial differential equations, namely the wave equation and the diffusion advection reaction equation. These two models are representative of many problems in applied mathematics.

Define

$$\begin{aligned}
 L_1(u) &:= u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f & \text{in } \mathbf{R} \times [0, \infty) \\
 L_2(u) &:= u_t - \nu u_{xx} + au_x + bu = f & \text{in } \mathbf{R} \times [0, \infty),
 \end{aligned}$$

To fix ideas, we consider the simplest problem possible, namely, an unbounded interval where we do not have to account for boundary conditions. Our goal is to decompose the real line into half-lines at points  $x = 0$  and  $x = L$  such that the interval  $[0, L]$  is a region of overlap, i.e.  $\mathbf{R} = \Omega_1 \cup \Omega_2 := (-\infty, L] \cup [0, \infty)$ , with  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = [0, L]$ . We consider the partial differential equations on each half-line and exchange information on the overlapping interval, or on its boundary.

The following simple overlapping domain decomposition algorithm is a variant of the classical alternating additive Schwarz algorithm and has been reconsidered in the form below by Gander, Halpern and Nataf [5] (see also [4]):

**Algorithm 1.**

$$\begin{aligned}
 L_i(v^{k+1}) &= f & \text{in } (-\infty, L] \times (0, T) \\
 v^{k+1} &= w^k & \text{on } x = L, (0, T) \\
 L_i(w^{k+1}) &= f & \text{in } [0, \infty) \times (0, T) \\
 w^{k+1} &= v^k & \text{on } x = 0, (0, T)
 \end{aligned}$$

We note that the style in which the algorithms in this paper are presented is conceptual. We, therefore, suppress the display of necessary but obvious initializations. It is remarkable that, in the case of the wave equation on the real line, this algorithm terminates in finite ‘time’:

**Theorem 2.** For  $i = 1$ , Algorithm 1 terminates for  $k > \frac{Tc}{2L}$ .

*Proof.* As the proof is very simple we reproduce it here. Since we are interested in the error, we let  $f = 0$  and the initial data be equal to  $= 0$ . We apply the Laplace transform  $\mathcal{L}$  to  $L_1(u) = 0$  and obtain:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}^{k+1}(x, s) &= \hat{w}^k(L, s) \exp\left(\frac{s(x-L)}{c}\right) \\
 \hat{w}^{k+1}(x, s) &= \hat{v}^k(0, s) \exp\left(-\frac{sx}{c}\right)
 \end{aligned}$$

Thus,

$$\hat{v}^{k+1}(0, s) = \underbrace{\hat{v}^{k-1}(0, s) \exp\left(-\frac{2sL}{c}\right)}_{=: \rho}$$

and hence,

$$\hat{v}^{2k}(0, s) = \rho^k \hat{v}^0(0, s), \quad \hat{w}^{2k}(L, s) = \rho^k \hat{w}^0(L, s).$$

But

$$\exp\left(-\frac{2kLs}{c}\right) = \mathcal{L}(\delta_{t-\frac{2kL}{c}})$$

implying

$$v^{2k}(0, t) = v^0\left(0, t - \frac{2kL}{c}\right).$$

□

As seen from the proof, the finite speed of propagation, peculiar to the wave equation, is responsible for finite-time-termination. Accordingly, for the diffusion-advection problem one obtains ([5]):

**Theorem 3.** For  $i = 2$ , Algorithm 1 converges superlinearly.

*Proof.* Again, the proof is simple and instructive. Therefore we sketch the argument given in [5]. We again apply the Laplace transform to  $L_2(u) = 0$  and obtain by similar

arguments as above together with  $\rho := \exp\left(-\frac{\sqrt{a^2+4\nu(s+b)}}{\nu}L\right)$

$$\hat{v}^{2k} = \rho^k \hat{v}^0(0, s),$$

and similarly for  $\hat{w}^{2k}(L, s)$ . This time, however, the inverse transform gives

$$v^{2k}(0, t) = \int_0^t K_x\left(\frac{2kL}{\sqrt{\nu}}, t - \tau\right) \exp\left(-\left(\frac{a^2}{4\nu} + b\right)(t - \tau)\right) v^0(0, \tau) d\tau$$

where

$$K(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

Apparently, this implies the error-estimate:

$$\|v^{2k}\|_{L^\infty(0, T)} \leq \max\left(1, \exp\left(b - \frac{a^2}{4\nu}\right)T\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{kL}{\sqrt{\nu T}}\right).$$

A similar analysis holds for  $w^{2k}$ . We obtain super-linear convergence. □

We remark that we obtain a convergence rate which depends on the size of the overlap.

*Remark 4.* For  $i = 1, 2$ , if  $L \rightarrow 0$  we loose convergence. □

In order to restore convergence or even finite termination, we need to introduce more exchange of information across the interface. The first and simplest idea to approach this problem is to introduce Robin-type conditions instead of Dirichlet (Neumann) conditions. This can also be achieved with overlapping domains as follows.

**Algorithm 5.** (DDM with/without overlap)

$$\begin{aligned} L_i(v^{k+1}) &= f && \text{in } (-\infty, L] \times (0, T) \\ v_x^{k+1} + \Lambda_v(v^k + 1) &= w_x^k + \Lambda_v(w^k) && \text{on } x = L, (0, T) \\ L_i(w^{k+1}) &= f && \text{in } [0, \infty) \times (0, T) \\ w_x^{k+1} + \Lambda_w(w^{k+1}) &= v_x^k + \Lambda_w(v^k) && \text{on } x = 0, (0, T) \end{aligned}$$

Here  $\Lambda_v$  and  $\Lambda_w$  are either constants or local-in-time operators, as e.g. a time derivative, or convolution operators.

*Remark 6.* – For  $L = 0$  and  $\Lambda_v(u) = \lambda u$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  this is a nonoverlapping Robin-type-Algorithm. See the next section.

– For  $\Lambda_{v,w}(u) := \lambda \star u$  (convolution in time), see Gander, Halpern and Nataf [5]. □

The following results on finite termination ([5]) for transmission operators  $\Lambda_{v,w}(u) = \lambda_{v,w} \star u$  reflects the fact that the corresponding transmission conditions realize exact absorbing (transparent) boundary conditions on each half line:

**Theorem 7.** For  $i = 1$ ,  $\Lambda_v = \frac{1}{c} \partial_t$ ,  $\Lambda_w = -\frac{1}{c} \partial_t$  Algorithm 2 terminates in 2 steps.

*Proof.* One applies the Laplace transform and obtains after some elementary calculus

$$(1) \quad \hat{v}^{k+1}(0, s) = \frac{(\frac{s}{c} + \lambda_w(s))(-\frac{s}{c} + \lambda_v(s))}{(\frac{s}{c} + \lambda_v(s))(-\frac{s}{c} + \lambda_w(s))} \exp(-2\frac{s}{c}L) \hat{v}^{k-1}(0, s)$$

A similar expression is derived for  $\hat{w}^{k+1}$ . The obvious choice

$$(2) \quad \lambda_w(s) = -\lambda_v(s) = -\frac{s}{c}$$

leads to two-step-termination. □

*Remark 8.* It is important to note that the finite-termination property of Theorem 2 does not depend on the size of the overlap. Note, however, that due to the infiniteness of the domain, the ‘optimal’ transmission operators are local operators in time. □

As to be expected, this finite-termination property will not hold in general for diffusion- advection- reaction equations, unless we are able to implement non-local boundary operators.

*Remark 9.* i) For  $i = 2$  and  $\Lambda_{v,w}$  according to

$$\hat{\lambda}_{v,w}(s) = -\frac{a}{2\nu} \pm \frac{1}{2\nu} \sqrt{a^2 + 4\nu(s+b)},$$

Algorithm 5 terminates after 2 steps.

ii) For  $i = 1, 2$  finite termination is independent of  $L$ .

iii) For  $i = 2$ , the *optimal* interface-conditions are *nonlocal*.

iv) We may approximate the non-local transmission conditions by local operators:

$$\Lambda_{v,w} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\nu b}}{2\nu} (\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\nu b}} \partial_t)$$

□

## 2.2 Bounded domains

We now consider the interval  $[-L, L]$  with interface at  $x = 0$ . For the sake of simplicity, we consider a non-overlapping version of the domain decomposition Algorithm 2. While in the 1-d situation it is always possible to consider the entire real axis by applying completely transparent boundary conditions, the question as to whether finite termination is achievable in the case of more general boundary conditions, or what kind of approximations are useful in this context is still not completely understood. Using arguments similar to those of [5] we can state the following remark.

*Remark 10.* i) For  $i = 1$  and  $\Lambda_{v,w}$  according to  $\hat{\lambda}_{v,w}(s) = \pm \frac{\varepsilon}{c} \coth(\frac{\varepsilon}{c} L)$ , Algorithm 5 terminates after 2 steps.

ii) The ‘optimal’ conditions are non-local (even for  $i = 1$ ).

iii) Consider local approximations:

$$\hat{\lambda}_{v,w}(s) := \pm \left( \frac{1}{L} + \frac{L}{3c^2} s^2 + O(s^3) \right)$$

transformation back into the time-domain yields:

$$w_x^{k+1}(0, t) + \frac{1}{L} w^{k+1}(0, t) + \frac{L}{3c^2} w_{tt}^{k+1}(0, t) = \dots$$

Note that this adds a *mass* at the interface. Transmission conditions of this sort will be presented in a monograph by Lagnese and Leugering[16]. □

To complete the picture, we ask: what happens if one works with an absorbing boundary condition at one end? (equivalent to a semi-infinite domain). Using similar arguments, it turns out that in this case we can derive ‘optimal’ transmission conditions which are local: once again, one takes impedance transmission conditions. For a numerical realization of this method see Figure 1 where two strings are connected at  $x = 0$  and two initial displacements on each string cause interacting waves. The Figure 2 clearly reveals that essentially no reflection occurs at the interface. The mismatch at the interface is shown in Figure 3. See also Hundhammer [12].

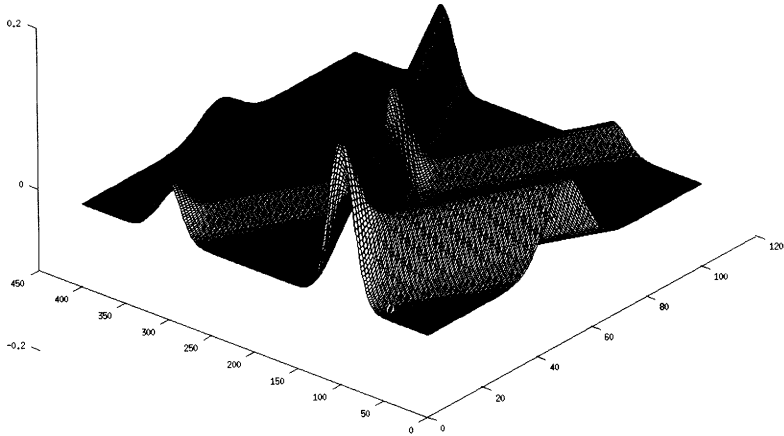


Figure 1. Interacting waves: serial connection

### 2.3 Semi-discretization

As we have seen, the convergence or termination analysis of Algorithm 5 is done in the frequency domain. Indeed, we are dealing with elliptic problems parametrized by the Laplace variable. Now, after time discretization of our equations we also obtain ‘elliptic’ problems to deal with. Hence, it appears natural to consider applying the nonoverlapping version of Algorithm 5 to that situation.

We use Newmark’s scheme as in Raviart-Thomas [28] for the wave equation:

$$\begin{aligned}
 w_i^m &\doteq w_i(\cdot, m\delta t), \\
 z_i^m &\doteq w_{i,t}(\cdot, m\delta t), \\
 w_i^{m+1} &= w_i^m + \delta t z_i^m + \delta t^2 c_i^2 (\beta w_{i,xx}^{m+1} + (\frac{1}{2} - \beta) w_{i,xx}^m), \\
 z_i^{m+1} &= z_i^m + \delta t c_i^2 (\gamma w_{i,xx}^{m+1} + (1 - \gamma) w_{i,xx}^m).
 \end{aligned}$$

(with  $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$  we enjoy conservation of energy) This time-stepping procedure leads to the elliptic problem (followed by an update of the velocity  $z_i^{m+1}$ ):

$$(3) \quad w_i^{m+1} - \delta t^2 \beta c_i^2 w_{i,xx}^{m+1} = w_i^m + \delta t z_i^m + \delta t^2 c_i^2 (\frac{1}{2} - \beta) w_{i,xx}^m =: f_i^m$$

We have to add the continuity and transmission conditions, say, at the interface  $x = 0$

$$(4) \quad w_1^{m+1}(0) = w_2^{m+1}(0), \quad w_{1,x}^{m+1}(0) = w_{2,x}^{m+1}(0)$$

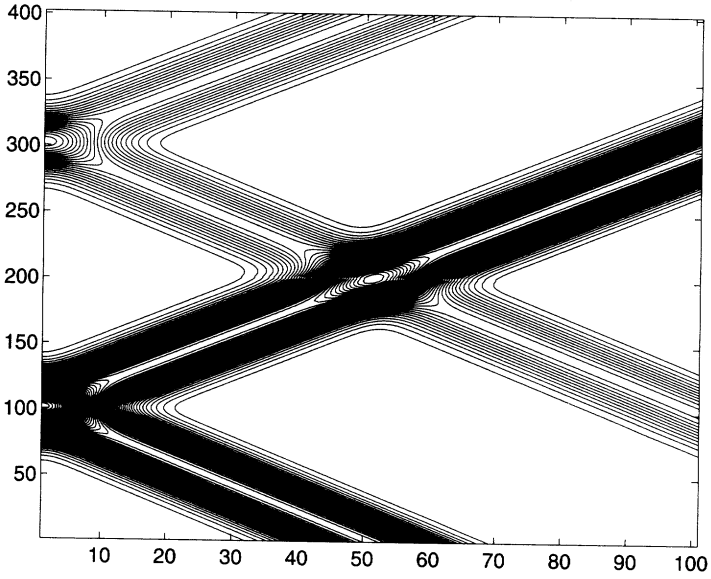


Figure 2. Interacting waves: serial connection

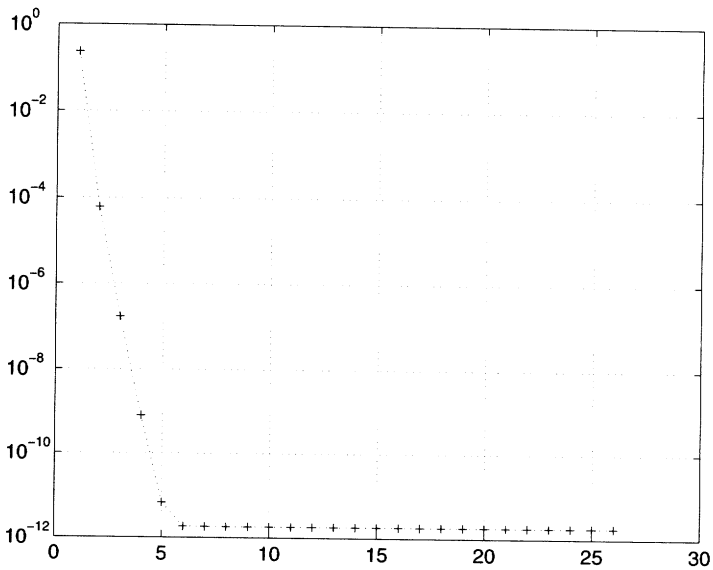


Figure 3. Iteration history: dynamic problem

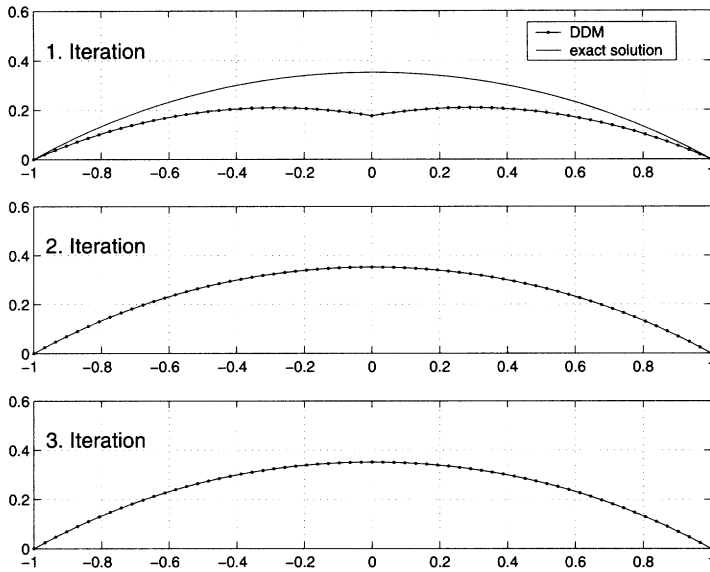


Figure 4. Two-step convergence in the static case: numerical / exact solution

Thus, for each time step we have to solve an elliptic problem on a serially connected domain. Therefore, at each time step with step size  $\delta t$  and

$$\Lambda_{1,2} := \pm \frac{1}{\delta t^2 \beta c} \coth\left(\frac{L}{\delta t^2 \beta c}\right),$$

Algorithm 5 applied to (3), (4) terminates after 2 steps. At a given time step this behaviour is again realized numerically in Figure 4.

As we have seen Robin-type iterations are motivated from the point of view of optimal transmission of information across the interface. In particular classical Robin-conditions typically correspond to 0th order approximations of such optimal conditions. In general, therefore, one can not expect finite termination. Nevertheless, these iterations are powerful.

### 3 Nonoverlapping domain decompositions of the Robin type

#### 3.1 The basic algorithm of P. L. Lions

We now proceed to consider higher dimensional situations. In particular, we consider a domain as shown in Figure 5. As we will later concentrate on nonoverlapping decomposition methods for optimal control problems, we confine ourselves to the nonoverlapping case also in the uncontrolled case. As we have emphasized above, optimal interface conditions are strongly related to transparent boundary conditions. That is to say, in-

formation should not be reflected when crossing the interface. Even in the one-dimensional situation it has been shown above that this requirement is too strong in general on bounded domains, if one insists on local operators acting on the interface. The problem of optimal interface conditions for domain decomposition methods has been thoroughly discussed by Nataf and coauthors in various recent papers [4], [5]. These methods have, however, not yet been put into the perspective of optimization. For the sake of simplicity, we proceed to discuss a more elementary procedure given by P.L.Lions [22].

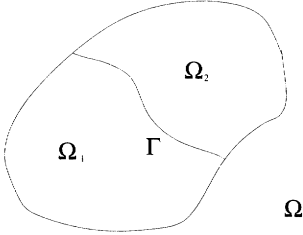


Figure 5. Splitting of the domain

We have the following natural decomposition.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$$

To fix ideas, we consider the Poisson equation on  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } & \Omega \\ u &= 0 & \text{on } & \partial\Omega \end{aligned}$$

Obviously this problem can be solved locally on each subdomain  $\Omega_i$  as long as continuity of displacements and Neumann-traces are guaranteed. This turns out to be equivalent to the condition:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{ij}} u_i + \beta u_i = -\frac{\partial}{\partial \nu_{ji}} u_j + \beta u_j, i, j = 1, 2$$

As in the preceding sections, the idea is to iterate such a transmission condition. However, as to be anticipated, finite termination will not be generic in higher dimensions (if at all possible). The following prototype-algorithm is due to P.L. Lions [22]:

**Algorithm 11.** Given the data at iteration level  $n$ , solve successively:

$$\begin{aligned} -\Delta u_i^{n+1} &= f_i & \text{in } & \Omega_i \\ u_i^{n+1} &= 0 & \text{on } & \partial\Omega_i \setminus \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial \nu_j} u_i^{n+1} + \beta u_i^{n+1} &= -\frac{\partial}{\partial \nu_i} u_j^n + \beta u_j^n, i, j = 1, 2 & \text{on } & \Gamma. \end{aligned}$$

The variational formulation of this iteration is given by.

$$\begin{aligned} a_i(w_i^{n+1}, \hat{w}_i) + s_i(\beta w_i^{n+1}, \hat{w}_i) &= s_i(\lambda_j^n, \hat{w}_i) + (f_i, \hat{w}_i), \quad \forall \hat{w}_i \in V_i \\ \lambda_i^{n+1} &= 2\beta w_i^{n+1} - \lambda_i^n \quad i = 1, 2 \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned}$$



where we use the standard notation  $a(w, \hat{w}) := \int_{\Omega} A \nabla w \nabla \hat{w} + cw\hat{w} dx$ ,  $A$  being a symmetric and positive definite matrix and  $c$  a non-negative constant,  $a_i(v, w)$  is  $a(v, w)$  restricted to functions on  $\Omega_i$  and  $s_i(v, w) := \int_{\Gamma} v|_{\Omega_i} w|_{\Omega_i} d\gamma$ .  $H_0^1(\Omega)$  is the standard Sobolev space with Dirichlet conditions along the boundary, and  $V_i := H^1(\Omega_i)$ .

This is a so-called Robin-type method. See Quarteroni and Valli [27] as general reference. Interestingly enough, R. Glowinski and P. Le Tallec provided a very natural interpretation of this algorithm as a special Uzawa-type algorithm applied to an augmented Lagrangian formulation.

### 3.2 An augmented Lagrangian approach

We define

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w, \lambda, q) := & \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Omega_i} \|\nabla w_i\|^2 - w_i f_i dx \\ & + \sum_i \int_{\Gamma} (\lambda_i(w_i - q) + \frac{\beta}{2} \|w_i - q\|^2) d\gamma \end{aligned}$$

and consider the following saddle-point iteration:

**Algorithm 12.** 0.) Let  $q^{n-1}, \lambda^n$  be given

- 1.) solve for  $w^n$ :  $\partial_w \mathcal{L}(w^n, q^{n-1}, \lambda^n) = 0$
- 2.) update  $\lambda^n$ :  $\lambda_i^{n+\frac{1}{2}} = \lambda_i^n + \alpha(w_i^n|_{\Gamma} - q^{n-1})$
- 3.) solve for  $q^n$ :  $\partial_q \mathcal{L}(w^n, q^n, \lambda^{n+\frac{1}{2}}) = 0$
- 4.) update  $\lambda^{n+\frac{1}{2}}$ :  $\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^{n+\frac{1}{2}} + \alpha(w_i^n|_{\Gamma} - q^n)$

See [9] for a proof of convergence. Once the Lagrange-variable is removed using steps 1. to 4. the Algorithm 12 is seen to be exactly the same as the original one due to P.L. Lions. Even though no convergence rates seem to be known in the general case, numerical experiments clearly reveal linear convergence.

We note that, strictly speaking, the decomposition method of this section follows from an augmented Lagrangian approach only in the static case. In case of, say, hyperbolic problems, which are relevant in structural control, one has to resort to transmission conditions involving the velocity or even accelerations. Active research is currently devoted to this approach (also for overlapping domains, see Gander [3]). Nevertheless, the Robin-type algorithm serves as a first example of a domain decomposition method which can be said to be based on optimization. In fact, the realization of the continuity of traces along the dividing interface can be interpreted as the result of an optimal control. As such controls are not physical controls to be applied to the system, they have been termed ‘virtual control’ by J.L. Lions.

### 3.3 A posteriori estimates

The convergence results established so far guarantee convergence but they do not offer reasonable stopping criteria. Moreover, the question how the parameters of the algorithms have to be chosen in order to obtain fast convergence is not answered completely. Otto and Lube [26] have obtained ‘a posteriori’ estimates for the algorithm of this section at least for the two-domain case. We are going to sketch their arguments for the sake of selfconsistency.

$$(5) \quad a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) = V$$

which is equivalent to

$$(6) \quad \sum_{i=1}^2 a_i(u_i, v_i) = \sum_{i=1}^2 L_i(v_i), \quad v_i \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2.$$

We may extend, if necessary, the  $L^2(\Gamma)$  pairing  $s_i(\cdot, \cdot)$  to the duality pairing between  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{v|_{\Gamma} : v \in H_0^1(\Omega)\} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^* = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , and denote this by  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ . Thus, the Robin-method can be rewritten as

$$(7) \quad \begin{aligned} & a_i(u_i^{n+1}, v_i) + \langle \beta_i u_i^{n+1}, v_i \rangle_{\Gamma} \\ & = L_i(v_i) + \langle \lambda_j^n, v_i \rangle_{\Gamma} \text{ on } V_i := H_{\Gamma_i}^1(\Omega_j), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \langle \lambda_i^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma} = \langle (\beta_i + \beta_j) u_j^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma} - \langle \lambda_j^n, \varphi \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \varphi \in W.$$

It is well-known that  $tr_i : V_i \rightarrow L^2(\Gamma)$  is continuous and that there is a continuous extension of  $tr_i^{-1}$  from  $W := H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  to  $V_i$ . Moreover,  $W$  is continuously embedded into  $L^2(\Gamma)$ . We may, thus, express elements  $v_i \in V_i$  by  $v_i = tr_i^{-1} \varphi$  where  $\varphi \in W$ . Hence, (7) reads as

$$a_i(u_i^{n+1}, tr_i^{-1} \varphi) + \langle \beta_i u_i^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma} = L_i(tr_i^{-1} \varphi) + \langle \lambda_j^n, \varphi \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \varphi \in W.$$

We consider the errors

$$(9) \quad e_i^n = u_i^n - u_i, \quad \eta_i^n = \lambda_i^n - \lambda_i,$$

where  $\lambda_i^n$  satisfy (8) for  $n$  and without  $n$ , respectively. We consider  $\beta_i \in L^\infty(\Omega)$ .

**Theorem 13.** *Let  $u$  be a solution of (5) and  $u_i^{n+1}$  be solutions of (7), (8), for  $i = 1, 2$ . Let the errors  $e_i^n, \eta_i^n, i = 1, 2$  be given as in (9). Then we have the a posteriori estimate*

$$(10) \quad \|e_1^{n+1}\|_{V_1} + \|e_2^n\|_{V_2} \leq C(\beta) \|u_2^n - u_1^{n+1}\|_W,$$

where  $C(\beta)$  is a computable number depending on  $\beta$ , the geometry of the domain, and the norms of the corresponding trace maps.

*Remark 14.* i) Note that the error estimate is not symmetric with respect to the domains. But this asymmetry can easily be removed by starting at domain 2 and then combining the estimates.

ii) The estimate (10) allows one to optimize the error bound  $C(\beta)$  with respect to the transmission coefficients  $\beta_i$  appearing in the Robin-data. Of course, the choice is ruled by proper approximations of transparent interface conditions discussed at the beginning.

iii) We have obtained similar estimates for more general partitions of  $\Omega$ . The arguments are more subtle then, as the local problems no longer need to be coercive.

## 4 Virtual controls

Let us introduce the classical variational formulation of an elliptic problem:

$$a(w, \hat{w}) = (f, \hat{w}) \quad \forall \hat{w} \in V,$$

We then consider the following local problems using additional ‘boundary-terms’ ( $\lambda_i$ ’s):

$$a_i(w_i, \hat{w}_i) = (f_i, \hat{w}_i) + s_i(\lambda_i, \hat{w}_i) \quad \forall \hat{w}_i \in V_i.$$

This time the continuity of traces is considered as a *virtual control problem*, i.e. we introduce controls along the interface  $\Gamma_{ij}$  connecting the domain  $\Omega_i$  with  $\Omega_j$  (where we consider now more general decompositions with the obvious notation), and try to ‘steer’ the differences of the traces involved at  $\Gamma_{ij}$  to zero. This idea can be applied to overlapping and non-overlapping situations. This concept can be seen as a relaxation of the continuity condition. A method that uses a Lagrangian relaxation has been recently introduced by J.L. Lions and O. Pironneau [25], [24]. We confine ourselves with the description of a penalty approach, which is also contained in the papers just cited and also in [10].

### 4.1 A penalty approach

This approach attempts to satisfy continuity of traces by the way of quadratic penalization. The method is rather general and applies to dynamic problems. For the sake of simplicity we again refer to the Poisson problem:

$$(11) \quad a_i(w_i, \hat{w}_i) = (f_i, \hat{w}_i) + s_i((-1)^{i+1}g, \hat{w}_i) \quad \forall \hat{w}_i \in V_i,$$

This variational formulation corresponds to the strong problem

$$(12) \quad \begin{aligned} -\Delta w_i &= f_i \quad \text{in } \Omega_i, \\ w_i &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \\ \frac{\partial}{\partial\nu_i} w_i &= (-1)^{i+1}g \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

Obviously, continuity of Neumann-traces is guaranteed by construction (the same  $g$  appears in both transmission conditions). Now,  $g$  is interpreted as a virtual control which is supposed to minimize the mismatch at the interface  $\Gamma$ . This can be achieved by minimizing the following cost functional.

$$(13) \quad J(g) := \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |w_1 - w_2|^2 d\gamma + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma} |g|^2 d\gamma$$

Thus the problem is restated as an optimal control problem:

$$(14) \quad \begin{array}{l} \inf J(g) \\ \text{subject to (12) or (11)} \end{array}$$

We derive the optimality conditions associated with the optimal control problem (14). We use the strong formulation.

$$(15) \quad \begin{array}{l} -\Delta w_i = f_i \quad \text{in } \Omega_i \\ -\Delta p_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \\ w_i = p_i = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \\ \frac{\partial}{\partial\nu_i} w_i = \frac{(-1)^{i+1}}{\beta} (p_1 - p_2) \\ \frac{\partial}{\partial\nu_i} p_i = (-1)^{i+1} (w_1 - w_2) \end{array}$$

Note that (15) is still a coupled system of elliptic equations. In order to obtain a domain decomposition method, we perform a gradient step as follows.

**Algorithm 15** (Gunzburger et al.). 1.) compute  $w_i^n$  by:

$$\begin{array}{l} -\Delta w_i^n = f_i, \quad \text{in } \Omega_i, \\ w_i^n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \\ \frac{\partial}{\partial\nu_i} w_i^n = \frac{(-1)^{i+1}}{\beta} g^n \quad \text{on } \Gamma \end{array}$$

2.) compute the adjoint variable  $p_i^n$  by:

$$\begin{array}{l} -\Delta p_i^n = 0, \quad \text{in } \Omega_i, \\ p_i^n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \\ \frac{\partial}{\partial\nu_i} p_i^n = (-1)^{i+1} (w_1^n - w_2^n) \quad \text{on } \Gamma \end{array}$$

3.) update the gradient:

$$g^{n+1} = (1 - \alpha)g^n + \frac{\alpha}{\beta} (p_1^n - p_2^n), \quad \alpha \in (0, 1).$$

This algorithm is forwardly decoupled, as the state equation (denoted as the forward problem) is solved independently of the adjoint state, while the adjoint state equation (denoted as the backward problem) is solved using the actual values of the forward states. Thus, the forward problems can be solved in parallel. Once the solutions are all available, the backward problems can also be solved in parallel. After completion of all local solves, the gradients are updated according to the damped update formula 3.).

## 4.2 Stars

Up to now we have considered domain decomposition procedures for problems with a ‘serial’ joint, i.e. the subdomains meet in pairs at a common curve (face) or a point. We now proceed to develop such domain decomposition procedures for *networked domains*. Because of space limitations, we confine ourselves with 1-d-networks. The problem with higher dimensional PDEs on networked domains is related to regularity. Even if we have nicely smooth and convex subdomains, the connected super-domain lacks these properties in general, and, therefore, we have to deal with singularities. This is a delicate matter and goes beyond the scope of this presentation. We will, therefore, exclusively deal here with 1-d-partial differential equations on graphs, and later we will focus on transmission problems for wave equations in higher dimensions. In fact in this section, to make things as simple as possible, we first treat the case of a star with three branches.

We, thus, consider three strings on domains  $\Omega_i$  i.e.  $[L, 0]$ , respectively, connected at  $x = 0$ . To fix ideas, we first discuss the static situation as we did in the previous sections.

$$\begin{aligned} w_{i,xx} &= f_i \quad \text{in } (0, L) \\ w_1(0) &= w_2(0) = w_3(0) \\ w_{1,x}(0) + w_{2,x}(0) + w_{3,x}(0) &= 0 \\ w_1(L) &= w_2(L) = w_3(L) = 0 \end{aligned}$$

We consider the following multiple node decoupling according to the Robin-type iteration.

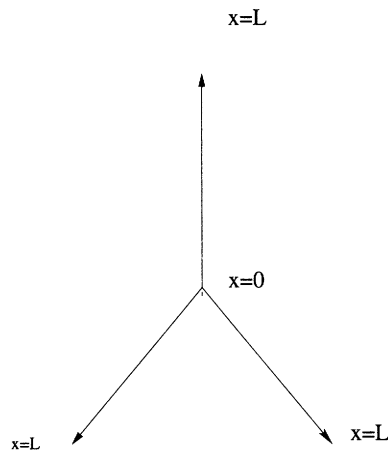


Figure 6. The star

Robin-type decomposition

**Algorithm 16.** 0.) given  $w_i^n, \forall i$

1.) compute the solution  $w_i^{n+1}$  of the 1-d equation

$$w_{i,xx}^{n+1} = f_i \quad \text{on } (0, L), \quad w_i^{n+1}(L) = 0$$

according to the interface conditions:

$$w_{i,x}^{n+1}(0) + \beta w_i^{n+1}(0) = \lambda_{ij}^n$$

$$:= \beta \left( \frac{2}{3} \sum_j w_j^n(0) - w_i^n(0) \right) - \frac{2}{3} \left( \sum_j w_{j,x}^n(0) - w_{i,x}^n(0) \right)$$

In fact, the update can easily be reformulated such that no derivatives appear on the right hand side. For a numerical realization of the method see Figure 7 for the solutions and Figure 8 for the observed convergence rates. See Hundhammer [12].

**Penalty-type decomposition.** In order to set up the problem for the penalty approach we introduce virtual controls  $g_i, i = 1, 2, 3$  at the junction at  $x = 0$ .

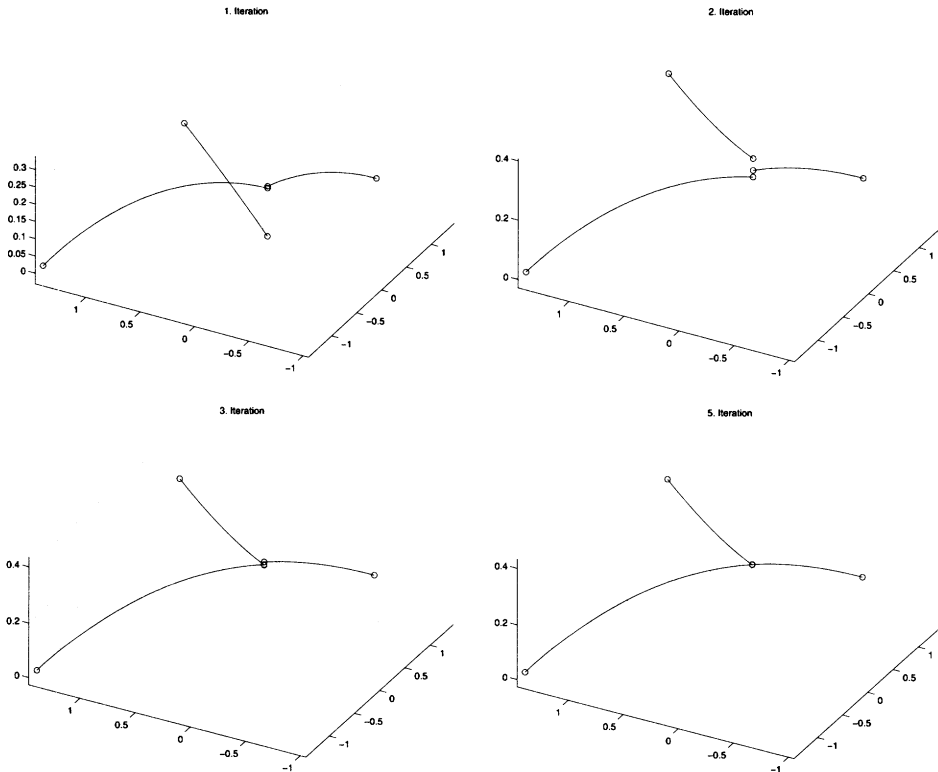


Figure 7. Star: convergence of the Robin-method

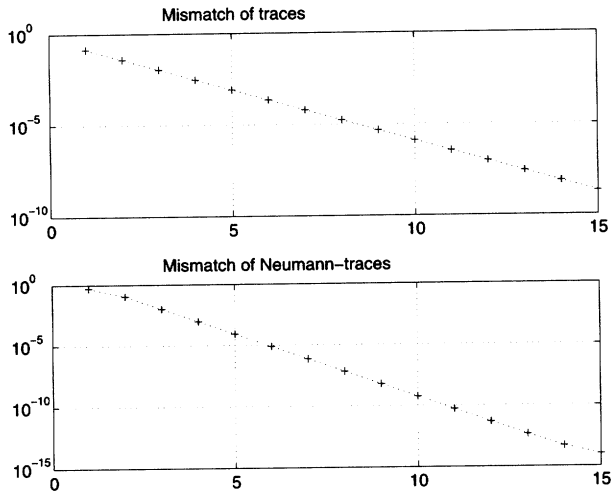


Figure 8. Observed linear convergence for the star

$$\begin{aligned}
 \inf J(w, g) &:= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \left( \frac{1}{3} \sum_j w_j(0) - w_i(0) \right)^2 + \delta \sum_i g_i^2 \right\} \\
 \text{subject to} & \\
 -w_{i,xx} &= f_i \quad \text{in } (0, L) \\
 w_i(L) = 0, \quad w_{i,x}(0) &= \frac{1}{3} \sum_j g_j - g_i
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

One derives the following optimality system.

$$\begin{aligned}
 -w_{i,xx} &= f_i, \quad -p_{i,xx} = 0 \quad \text{in } (0, L) \\
 w_i(L) &= 0, \quad p_i(L) = 0 \\
 w_{i,x}(0) &= \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{3} \sum_j p_j(0) - p_i(0) \right) \\
 p_{i,x}(0) &= \frac{1}{3} \sum_j w_j(0) - w_i(0).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

This system is still coupled and has to be decoupled by the way of a gradient step as follows:

**Algorithm 17.** 1.) Compute the solutions of the direct problems

$$-w_{i,xx}^n = f_i, \quad w_i^n(L) = 0, \quad w_{i,x}^n(0) = \frac{1}{3} \sum_j g_j - g_i$$

2.) compute the solutions of the adjoint problem

$$-p''_{i,xx} = 0, \quad p''_i(L) = 0, \quad p''_{i,x}(0) = \frac{1}{3} \sum_j w''_j(0) - w''_i(0).$$

3.) update the gradient

$$g_i^{n+1} = (1 - \alpha)g_i^n + \frac{\alpha}{\delta} \left( \frac{1}{3} \sum_j p''_j(0) - p''_i(0) \right)$$

It is obvious that even though the penalty approach is conceptually very attractive, it leads to double the effort when compared with the Robin-type algorithm. In the non-linear context, however, the numerical load is on the nonlinear solution method (e.g. the Newton method) for the forward problem, while the adjoint problem is genuinely linear. Moreover, adjoint information can be obtained using automatic differentiation.

### 4.3 General networks

Here we consider general networks in the plane as shown in Figure 9.

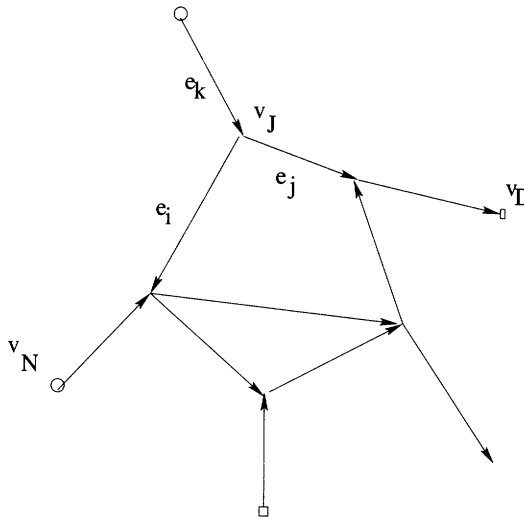


Figure 9. A general graph

Indeed, we can equally well consider graphs in arbitrary dimensions. The following notation is obvious.  $G = (V, E)$  (graph),  $V = \{v_J | J \in \mathcal{J}\}$  (vertices),  $E = \{e_i | i \in \mathcal{I}\}$  (edges),  $\mathcal{I} := \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{I}_{\mathcal{J}} = \{i \in \mathcal{I} | e_i \text{ is incident at } v_J\}$ ,  $d_J := |\mathcal{I}_{\mathcal{J}}|$  (edge degree),  $V = V^M \cup V^S$ ,  $\mathcal{J} := \mathcal{J}^M \cup \mathcal{J}^S$ ,  $d_S = 1$ ,  $d_M > 1$ ,  $\mathcal{J}^S = \mathcal{J}^D \cup \mathcal{J}^N$ ,  $M \hat{=}$  multiple,  $S \hat{=}$  simple,  $D \hat{=}$  Dirichlet,  $N \hat{=}$  Neumann  $\epsilon_{iJ} = 1$ , if  $e_i$  ends at  $v_J$ ,  $= -1$  if  $e_i$



starts there,  $x_{iJ} = \ell_i$  if  $\epsilon_{iJ} = 1$ ,  $= 0$  if  $\epsilon_{iJ} = -1$ ,  $w : G \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^{q=1}$  (displacement),  $w_i = w|_{e_i}$  local displacement on edge  $i$ ,  $w_i(x_{iJ}, t) \hat{=} w_i(v_J, t) \hat{=} w_i(v_J)$  (nodal values).

**The network model.** Let us, for the sake of simplicity, consider a scalar model, i.e. the displacement of the individual strings is considered out of the plane. The more general situation can be handled equally well.

$$\begin{aligned}
 & w_{i,t} - c_i^2 w_{i,xx} + \gamma_i w_i = f_i, \quad \text{in } Q_i \\
 & \quad \text{(state equation on edge } e_i) \\
 & w_i(v_D) = 0, \quad D \in \mathcal{J}^D, \{i\} = \mathcal{I}_D, \text{ on } (0, T), \\
 & \quad \text{(Dirichlet boundary conditions at simple nodes)} \\
 & c_i^2 \epsilon_{iN} w_{i,x}(v_N) + \alpha_i w_{i,t}(v_N) = g_N, \\
 & \quad N \in \mathcal{J}^N, \{i\} = \mathcal{I}_N, \text{ on } (0, T) \\
 (18) \quad & \quad \text{(absorbing b.c.'s at controlled Neumann nodes)} \\
 & w_i(v_M) = w_j(v_M), \quad M \in \mathcal{J}^M, i, j \in \mathcal{I}_M, \text{ on } (0, T), \\
 & \quad \text{(continuity conditions at multiple nodes)} \\
 & \sum_{i \in \mathcal{I}_M} \epsilon_{iM} w_{i,x}(v_M) = 0, \quad M \in \mathcal{J}_M, \text{ on } (0, T), \\
 & \quad \text{(balance of forces at multiple nodes (Kirchhoff law))} \\
 & w_i(\cdot, 0) = w_{i0}, \quad w_{i,t}(\cdot, 0) = v_{i0}, \quad \text{on } \Omega_i \\
 & \quad \text{(initial conditions)}
 \end{aligned}$$

Wellposedness

**Theorem 18.** Assume that:

- a.)  $f_i \in L^1(0, T; L^2(0, \ell_i))$ ,
- b.)  $g_N \in L^2(0, T), N \in \mathcal{J}^N$ ,
- c.)  $\{(w_{i0}, v_{i0})\}_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{V} \times \mathcal{H} =: \mathcal{X}$ ,

where

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \{w \in \prod_{i \in \mathcal{I}} H^1(0, \ell_i) \mid w_i(v_D) = 0, v_J \in V^D, i \in \mathcal{I}_D \\
 & w_i(v_M) = w_j(v_M), M \in \mathcal{J}^M, i, j \in \mathcal{I}_M\} \\
 \mathcal{H} &= \prod_{i \in \mathcal{I}} L^2(0, \ell_i).
 \end{aligned}$$

Then the string system on the graph  $G$  has a unique solution such that

- i)  $(w, w_t) \in C(0, T; \mathcal{X})$
- ii)  $w_{i,x}, w_{i,t} \in L^2(0, T), \forall i \in \mathcal{I}_J, J \in \mathcal{J}^N$ . □

For a proof see Lagnese and Leugering [16].

**The domain decomposition for graph problems.** We now present the general domain decomposition procedure for the wave equation on a graph. It is surprising that for the infinite dimensional system ( that is before a possible space and/or time discretization) no

convergence proof seems to be available without assuming some damping in the simple boundary conditions. As a matter of curiosity, it will turn out to be possible to use the domain decomposition method designed for the control problem to be discussed below also as a tool for the ‘forward simulation’, simply by suppressing the effect of the controls. We return to this point in due course.

**Algorithm 19.** (graph decomposition for stabilized systems)

Given all data at level  $k$ , solve for  $w_i^{k+1}$ :

$$\begin{aligned}
 w_{i,tt}^{k+1} - c_i^2 w_{i,xx}^{k+1} + \gamma_i w_i^{k+1} &= f_i, \\
 \epsilon_{iN} w_{i,x}^{k+1}(v_N) + \alpha_{i,t}^{k+1}(v_N) &= g_N, \\
 w_i^{k+1}(v_D) &= 0 \\
 \epsilon_{iM} w_{i,x}^{k+1}(v_M) + \beta_M w_{i,t}^{k+1}(v_M) &= \lambda_{iM}^k, \\
 \lambda_{iM}^k &:= \beta_M \left( \frac{2}{d_M} \sum_{j \in \mathcal{I}_M} w_{j,t}^k(v_M) - w_{i,t}^k(v_M) \right) \\
 &\quad - \left( \frac{2}{d_M} \sum_{j \in \mathcal{I}_M} \epsilon_{jM} w_{j,x}^k(v_M) - \epsilon_{iM} w_{i,x}^k(v_M) \right) \\
 w_i^{k+1}(\cdot, 0) &= w_{i0}, w_{i,t}^{k+1}(\cdot, 0) = v_{i0}
 \end{aligned}$$

**Theorem 20.** *If  $G$  is a rooted tree with all Neumann nodes satisfying the conditions of the Algorithm 19 and if  $T$  is sufficiently large, then we have  $w$  - \*-convergence of the solutions in  $L^\infty(0, T; H_i^1 \times L^2)$  to the global solution.  $\square$*

For a proof of this theorem see Lagnese and Leugering [16]. For a theory of domain decomposition for hyperbolic problems on graphs see Leugering [20] and Lagnese[14] and for transmission problems for wave equations see Lagnese and Leugering [21].

Up to this point we have treated the problem of ‘forward’ simulation. We have thereby amply demonstrated that ‘virtual’ optimal control theory provides a useful tool for domain decomposition algorithms. We now embark on ‘effective’ optimal control problems.

## 5 Domain decomposition for optimal control problems

### 5.1 The elliptic model problem

In order to fix ideas let us begin with an elliptic optimal control problem which has been considered by Benamou [1] and Despres[2]

$$(19) \quad \begin{cases} \min_{u \in U} \int_{\Omega} |w(u) - w_d|^2 + \nu |u|^2 dx \\ -\Delta w = f + u \quad \text{in } \Omega \\ w = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where  $U$  is closed convex,  $U \subset L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . There is a unique solution to (19). The optimality system is given by:

$$(20) \quad \begin{cases} -\Delta w = f + u & \text{in } \Omega \\ -\Delta p = w - w_d & \text{in } \Omega \\ w = 0 = p & \text{on } \partial \Omega \\ \int_{\Omega} (p + \nu u)(v - u) dx \geq 0, & \forall v \in U \end{cases}$$

The derivation of (20) follows standard procedures. In particular, if  $U = L^2$  then  $u$  is given by the adjoint state  $p$  in the following typical form:

$$u = -\frac{1}{\nu} p$$

Thus the optimality system is a coupled elliptic problem. The coupling occurs at two positions. It appears in the adjoint equation for  $p$  and the first order optimality condition which states that the gradient of the cost functional in (19) vanishes. In order to obtain a reasonable decomposition procedure of (20) Benamou and Despres developed the following embedding into a Helmholtz problem with complex coefficient  $k \in \mathbb{C}$  as follows:

$$(21) \quad \begin{cases} -\Delta z + kz = g & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial \Omega \\ z \in H_0^1(\Omega; \mathbb{C}) \end{cases}$$

and observe that for

$$z = w + \frac{i}{\sqrt{\nu}} p, k = -\frac{i}{\sqrt{\nu}}, g = f - \frac{i}{\sqrt{\nu}} w_d$$

(21) is equivalent to (19). Hence, a convergent domain decomposition of (21) will result in such an algorithm for (19). This observation leads one to suggest a Robin-type algorithm.

**Algorithm 21 (Benamou, Despres).** Given data  $\lambda_{ij}^n, \mu_{ij}^n$  at level  $n$ , compute the solutions  $w_i^{n+1}, p_i^{n+1}$  of the local problems

$$(22) \quad \begin{cases} -w_i^{n+1} + \frac{i}{\nu} p_i^{n+1} = f_i & \text{in } \Omega_i \\ -p_i^{n+1} = w_i^{n+1} - w_{id} & \text{in } \Omega_i \end{cases}$$

$$(23) \quad w_i^{n+1} = 0 = p_i^{n+1} \quad \text{on } \partial \Omega \cap \partial \Omega_i$$

together with

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu_{ij}} w_i^{n+1} + \beta p_i^{n+1} = \lambda_{ij}^n \\ \frac{\partial}{\partial \nu_{ji}} p_i^{n+1} - \beta w_i^{n+1} = \mu_{ij}^n \end{cases}$$

where for  $n \geq 1$

$$(24) \quad \begin{cases} \lambda_{ij}^n = -\frac{\partial}{\partial \nu_{ji}} w_j^n + \beta p_j^n \\ \mu_{ij}^n = -\frac{\partial}{\partial \nu_{ji}} p_j^n - \beta w_j^n \end{cases}$$

It should be noted that the model problem (19) is indeed very special in that the distributed control acts on the entire domain. This is necessary in order to transform the optimality system (20) into the complex form (21). The problem has been chosen just for the purpose of motivation for the class of domain decomposition techniques which result from various choices of the parameters involved. The methods can then be extended to more general distributed control problems and, more importantly, to boundary control problems. See [16].

## 5.2 The 1-d dynamic network problem

We provide the generalization of this algorithm to 1-d network problems. To this end we consider the problem net (with  $\alpha_i = 0$ ) subject to the minimization of the cost:

$$\min_{g_N} \frac{1}{2} \sum_N \int_0^T |g_N|^2 dt + \frac{k}{2} \sum_i \left\{ \|w_i(T) - z_{i0}\|^2 + \|w_{i,t}(T) - z_{i1}\|^2 \right\}$$

We dispense with deriving the corresponding global optimality system (see the next section for a similar problem) but rather give the iterative procedure which decomposes that optimality system into local systems. We note that in the time-dependent problem we replace the constants in the Robin-conditions by velocity traces.

**Algorithm 22.** Given all data  $\lambda_{ij}^n, \mu_{ij}^n \in L^2(0, T)$  at level  $n$ , compute the solutions  $w_i^{n+1}, p_i^{n+1}$  of the local problems

$$(25) \quad \begin{cases} w_{i,t}^{n+1} - c_i^2 w_{i,xx}^{n+1} = f_i, \\ p_{i,tt}^{n+1} - c_i^2 p_{i,xx}^{n+1} = 0, \\ w_i^{n+1}(v_D) = p_i^{n+1}(v_D) = 0 \\ \epsilon_{iN} w_{i,x}^{n+1}(v_N) + p_{i,t}^{n+1}(v_N) = 0, \quad \epsilon_{iN} p_{i,x}^{n+1}(v_N) = 0 \\ w_i(0)^{n+1} = w_{i0}, \quad w_{i,t}^{n+1}(0) = w_{i,1} \\ p_i^{n+1}(T) = k(w_{i,t}^{n+1}(T) - w_{i,1}), \quad p_i^{n+1}(T) = -k(w_i^{n+1}(T) - w_{i0}) \end{cases}$$

together with

$$(26) \quad \begin{cases} \epsilon_{iJ} w_{i,x}^{n+1} + \beta p_{i,t}^{n+1} = \lambda_{iJ}^n \\ \epsilon_{iJ} p_{i,x}^{n+1} - \beta w_{i,t}^{n+1} = \mu_{iJ}^n \end{cases}$$

where, for  $n \geq 1$

$$(27) \quad \begin{cases} \lambda_{iJ}^n = \beta \left( \frac{2}{d_j} \sum_{j \in \mathcal{I}_J} p_{j,t}^n - p_{i,t}^n \right) - \left( \frac{2}{d_j} \sum_{j \in \mathcal{I}_J} \epsilon_{iJ} w_{j,x}^n - \epsilon_{iJ} w_{i,x}^n \right) \\ \mu_{iJ}^n = -\beta \left( \frac{2}{d_j} \sum_{j \in \mathcal{I}_J} w_{j,t}^n - w_{i,t}^n \right) - \left( \frac{2}{d_j} \sum_{j \in \mathcal{I}_J} \epsilon_{iJ} p_{j,x}^n - \epsilon_{iJ} p_{i,x}^n \right) \end{cases}$$

Figure 10 provides an example of Algorithm 22 applied to a grid of elastic strings.

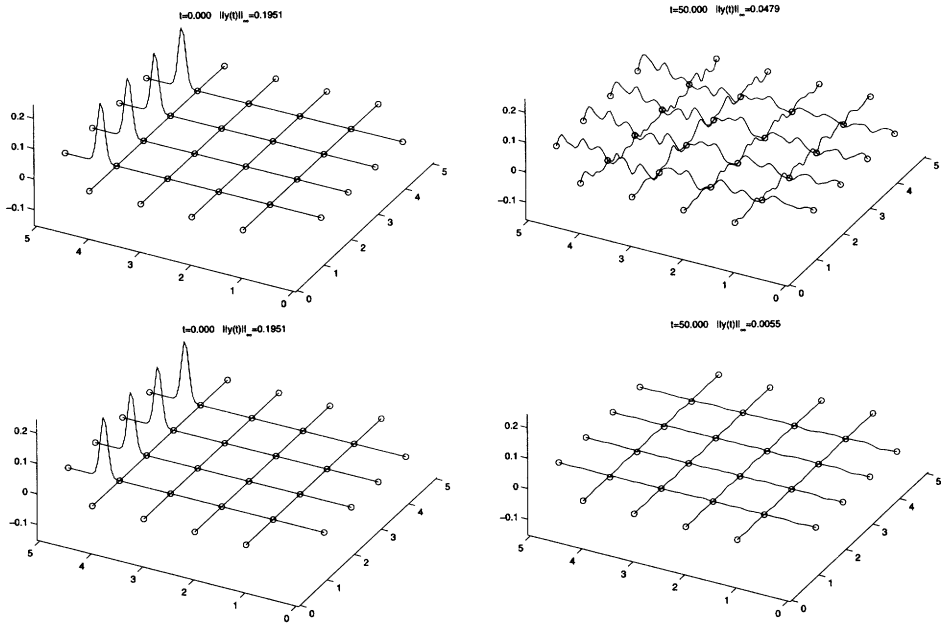


Figure 10. A grid of elastic strings: i.) initial conditions  $t = 0s$ , ii.) uncontrolled  $t = 50s$ , iii.) controlled  $t = 10s$ , iv.) controlled  $t = 50s$ .

**A posteriori estimates.** A posteriori estimates for static optimal control problems can be obtained along the lines provided in the case of simulation without control. A posteriori estimates for the dynamic problems are much more involved ([19]). See the next section.

## 6 Domain decomposition of optimal control problem for wave equations

In this section we are going to describe in some more detail the applications of the Robin-type nonoverlapping domain decomposition algorithm to wave equations in higher dimensions. We will first of all give the set-up of the problem and wellposedness considerations. Then we describe a new time-domain decomposition method based on the same principles. We then indicate the domain decomposition in space. See Lagnese and Leugering [17],[18],[16].

### 6.1 Setting of the problem

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^d$  with piecewise smooth Lipschitz boundary. Consider the final value optimal control problem (where  $\kappa > 0$ )

$$(28) \quad \inf_{f \in L^2(\Sigma)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |f|^2 d\Sigma + \frac{\kappa}{2} [\|w(T) - z_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\frac{\partial w}{\partial t}(T) - z_1\|_{L^2(\Omega)}^2] \right\}$$

subject to

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A \nabla w) + cw = F \text{ in } Q := \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial w}{\partial \nu_A} + \alpha \frac{\partial w}{\partial t} = f \text{ on } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \\ w(0) = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0) = v_0 \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

In (29),  $A = (a_{ij})$  is a symmetric, uniformly positive definite  $d \times d$  matrix with  $L^\infty(\Omega)$  elements,  $c \in L^\infty(\Omega)$  with  $c(x) \geq 0$  a.e., and  $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$  with  $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$  a.e. Further,  $\nu$  denotes the exterior pointing unit normal to  $\Gamma$  and  $\partial w / \partial \nu_A := \nu \cdot (A \nabla w)$ . We shall assume that

$$(30) \quad c(x) > 0 \text{ on a set of positive measure in } \Omega.$$

If

$$w_0 \in H^1(\Omega), \quad v_0 \in L^2(\Omega) \\ F \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad f \in L^2(\Sigma)$$

then (29) has a unique solution with regularity

$$(w, \frac{\partial w}{\partial t}) \in C([0, T]; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)), \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$$

and the linear mapping from the data to  $((w, \frac{\partial w}{\partial t}), \frac{\partial w}{\partial t}|_{\Sigma})$  is continuous in the indicated spaces. The problem (28), (29) is therefore well posed if  $(z_0, z_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Further, the unique optimal control is given by

$$(31) \quad f_{\text{opt}} = -p|_{\Sigma}$$

where  $p$  is the solution of the backwards running adjoint system

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A \nabla p) + cp = 0 \text{ in } Q \\ \frac{\partial p}{\partial \nu_A} - \alpha d_t p = 0 \text{ on } \Sigma \\ p(T) = \kappa (\frac{\partial w}{\partial t}(T) - z_1), \quad \frac{\partial p}{\partial t}(T) = -\kappa A(w(T) - z_0) \end{cases}$$

where  $A$  is the canonical isomorphism of  $H^1(\Omega)$  onto its dual space  $(H^1(\Omega))^*$ . (Throughout we shall identify  $L^2(\Omega)$  with its dual space, so that  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$ .) The symbol  $d_t$  in (32) represents the bounded linear operator  $d_t : L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)) \mapsto (H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)))^*$  defined by

$$(33) \quad \langle d_t h, \phi \rangle_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} h \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Sigma, \quad \forall \phi \in H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)),$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  denotes the duality pairing in the  $(H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)))^*$ ,  $H^1(0, T; L^2(\partial\Omega))$  duality. The system (32) has a unique solution, defined by transposition, with regularity

$$(p, \frac{\partial p}{\partial t}) \in C([0, T]; L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))^*), \quad p|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma).$$

The *optimality system* for the optimal control problem (28), (29) consists of (29) and (32) with  $f$  given by (31).

Let us set

$$V := H^1(\Omega), \quad H := L^2(\Omega)$$

with the standard norm on  $H$ . Because of assumption (30), we may norm  $V$  by

$$(34) \quad \|\phi\|_V = \left\{ \int_{\Omega} (A \nabla \phi \cdot \nabla \phi + c|\phi|^2) dx \right\}^{1/2}$$

which is equivalent to the standard  $H^1(\Omega)$  norm. In the cost functional (28), the  $H^1(\Omega)$  norm is to be understood as given by (34). Thus the canonical isomorphism  $\mathcal{A}$  satisfies  $\|\mathcal{A}\phi\|_{V^*} = \|\phi\|_V$  for all  $\phi \in V$ . In the next two sections we are going to decompose the global optimality system (29), (32), (31) both with respect to the *time* and the *space variables*. We will use a Robin-type condition for the first and an impedance-Robin-type iteration for the latter decomposition. We begin with a decomposition with respect to the time variable. Again, there are various methods in order to relax the continuity of the states and the velocities across time-boundaries. One can apply a proper penalization as in J. L. Lions [23] or an augmented Lagrangian approach as in Heinkenschloss [11]. In these two methods the system is advanced from initial data at each time boundary and can be viewed as some shooting method. We, however, decompose the optimality system directly and obtain a scheme that transports information from both direction, which is in accordance with the fact, that the corresponding adjoint equations are running backwards in time.

### 6.2 Time-domain decomposition.

We decompose the time-span  $(0, T)$  into  $K + 1$  subintervals  $I_k := (T_k, T_{k+1})$ ,  $k = 0, \dots, K$ , where

$$(35) \quad 0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_K < T_{K+1} = T,$$

and introduce locally defined functions by setting a subscript:  $w_k = w|_{I_k}$ ,  $p_k = p|_{I_k}$  etc. We proceed to decompose the optimality system (29), (32), (31) into  $K + 1$  subsystems respectively defined on  $I_k$ ,  $k = 0, \dots, K$ , which are coupled through the time-wise transmission conditions

$$(36) \quad \begin{aligned} w_k(T_{k+1}) &= w_{k+1}(T_{k+1}), \\ \frac{\partial w_k}{\partial t}(T_{k+1}) &= \frac{\partial w_{k+1}}{\partial t}(T_{k+1}), \\ p_k(T_{k+1}) &= p_{k+1}(T_{k+1}), \\ \frac{\partial p_k}{\partial t}(T_{k+1}) &= \frac{\partial p_{k+1}}{\partial t}(T_{k+1}), \quad k = 0, \dots, K - 1. \end{aligned}$$

The transmission conditions (36) are then uncoupled by an iteration in  $n$  as follows:

**Algorithm 23.** Given data  $\mu_{k,k-1}^n, \mu_{kk+1}^n, \eta_{kk-1}^n, \eta_{kk+1}^n$  at iteration level  $n$ , solve successively

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w_k^{n+1}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A \nabla w_k^{n+1}) + c w_k^{n+1} = F_k \\ \frac{\partial^2 p_k^{n+1}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A \nabla p_k^{n+1}) + c p_k^{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{in } Q_k := \Omega \times I_k$$

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_k^{n+1}}{\partial \nu_A} + \alpha \frac{\partial w_k^{n+1}}{\partial t} + p_k^{n+1} = 0 \\ \frac{\partial p_k^{n+1}}{\partial \nu_A} - \alpha d_t p_k^{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{on } \Sigma_k := \partial\Omega \times I_k$$

$$(39) \quad \begin{cases} w_0^{n+1}(0) = w_0, \quad \frac{\partial w_0^{n+1}}{\partial t}(0) = v_0 \\ p_K^{n+1}(T) = \kappa \left( \frac{\partial w_K^{n+1}}{\partial t}(T_{K+1}) - z_I \right) \\ \frac{\partial p_K^{n+1}}{\partial t}(T) = -\kappa A(w_K^{n+1}(T) - z_0) \quad \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_k^{n+1}}{\partial t}(T_{k+1}) - \beta p_k^{n+1}(T_{k+1}) = \mu_{k,k+1}^n \\ \frac{\partial p_k^{n+1}}{\partial t}(T_{k+1}) + \beta A w_k^{n+1}(T_{k+1}) = \eta_{k,k+1}^n \\ -\frac{\partial w_k^{n+1}}{\partial t}(T_k) - \beta p_k^{n+1}(T_k) = \mu_{k,k-1}^n \\ -\frac{\partial p_k^{n+1}}{\partial t}(T_k) + \beta A w_k^{n+1}(T_k) = \eta_{k,k-1}^n \end{cases}$$

where  $\{(\mu_{k,k+1}^0, \eta_{k,k+1}^0)\}_{k=0}^{K-1}$  and  $\{(\mu_{k,k-1}^0, \eta_{k,k-1}^0)\}_{k=1}^K$  are given arbitrarily in  $H \times V^*$ , and, for  $n \geq 1$

$$(41) \quad \begin{cases} \mu_{k,k+1}^n = \frac{\partial w_{k+1}^n}{\partial t}(T_{k+1}) - \beta p_{k+1}^n(T_{k+1}) \\ \eta_{k,k+1}^n = \frac{\partial p_{k+1}^n}{\partial t}(T_{k+1}) + \beta A w_{k+1}^n(T_{k+1}) \\ \mu_{k,k-1}^n = -\frac{\partial w_{k-1}^n}{\partial t}(T_k) - \beta p_{k-1}^n(T_k) \\ \eta_{k,k-1}^n = -\frac{\partial p_{k-1}^n}{\partial t}(T_k) + \beta A w_{k-1}^n(T_k) \end{cases}$$

for  $k = 1, \dots, K-1$  and  $\beta > 0$ .

In  $I_0$  or  $I_K$  the first or the second half of (40) and (41) are valid, respectively. It is readily seen that, upon convergence, (40) and (41) reduced to (36) i.e., (40) and (41) are consistent with (36). If



$$(42) \quad \begin{aligned} (\mu_{k,k+1}^n, \eta_{k,k+1}^n) &\in H \times V^*, \quad k = 0, \dots, K-1 \\ (\mu_{k,k-1}^n, \eta_{k,k-1}^n) &\in H \times V^*, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

are given, then for each index  $k = 0, \dots, K$  the system (37) – (39), (40) is well posed since it is itself an optimality system concentrated on the interval  $I_k$  (see below). The solution has regularity

$$\begin{aligned} (w_k^{n+1}, \frac{\partial w_k^{n+1}}{\partial t}) &\in C(I_k; V \times H), \quad \frac{\partial w_k^{n+1}}{\partial t} \Big|_{\Sigma} k \in L^2(\Sigma_k), \\ (p_k^{n+1}, \frac{\partial p_k^{n+1}}{\partial t}) &\in C(I_k; H \times V^*), \quad p \Big|_{\Sigma} k \in L^2(\Sigma_k). \end{aligned}$$

By observing that the conditions (42) propagate with  $n$ , it follows that the iterative procedure (37) – (39), (40), (41) is well defined provided the starting data  $\{(\mu_{k,k+1}^0, \eta_{k,k+1}^0)\}_{k=0}^{K-1}$  and  $\{(\mu_{k,k-1}^0, \eta_{k,k-1}^0)\}_{k=1}^K$  are given in  $H \times V^*$ .

The decoupled system (37) – (39), (40) corresponds, in fact, to an optimality system concentrated on the time-interval  $I_k$ . We omit the superscript  $n + 1$  for the time being and focus first on the internal intervals  $I_k, k = 1, \dots, K - 1$ .

Define the following cost functional on  $I_k$ :

$$\begin{aligned} J_k^n(f_k, g_{k,k-1}, h_{k,k-1}) &:= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |f_k|^2 d\Gamma dt \\ &+ \frac{1}{2\beta} \{ \|\beta w_k(T_{k+1}) - \mathcal{A}^{-1} \eta_{k,k+1}^n\|_V^2 \\ (43) \quad &+ \|\frac{\partial}{\partial t} w_k(T_k) - \mu_{k,k+1}^n\|_H^2 + \|g_{k,k-1}\|_H^2 + \|h_{k,k-1}\|_{V^*}^2 \}. \end{aligned}$$

We then investigate the following optimal control problem on  $I_k$ .

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \inf_{\substack{f_k \in L^2(\Sigma) \\ (g_{k,k-1}, h_{k,k-1}) \in H \times V^*}} J_k^n(f_k, g_{k,k-1}, h_{k,k-1}) \\ \text{subject to} \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A \nabla w_k) + c w_k = F_k \text{ in } Q_k, \\ \frac{\partial w_k}{\partial \nu_A} + \alpha \frac{\partial w_k}{\partial t} = f_k \text{ on } \Sigma_k, \\ w_k(T_k) = \frac{1}{\beta} \mathcal{A}^{-1} (\eta_{k,k-1}^n + h_{k,k-1}) \text{ in } V, \\ \frac{\partial}{\partial t} w_k(T_k) = -(\mu_{k,k-1}^n + g_{k,k-1}) \text{ in } H. \end{array} \right.$$

We conclude that the iterative decoupling procedure for  $k = 1, \dots, K - 1$  according to (40) – (39) produces the optimality system corresponding to the optimal control problem (44). The interpretation of (44) is as follows. One introduces artificial controls (“virtual controls” (see Lions [23] and Gervasio, Lions and Quarteroni [6])) which serve to match the initial and final conditions in terms of the iteration history, while optimizing also with respect to the “real control”  $f_k$ .

We proceed to consider the boundary intervals  $I_0$  and  $I_K$ . On  $I_0$  we define the cost functional.

The optimal control problem on the boundary interval  $I_0$  is given by (44) with  $i = 0$ , initial conditions replaced by  $w_0(0) = \varphi, \frac{d}{dt} W_0(0) = \psi$ , and  $g_{0,-1}, h_{0,-1}$  dropped.

The optimal control problem to be discussed on the final interval  $I_K$  is the following. With

$$\begin{aligned}
 J_K^n(f_K, h_{K,K-1}, g_{K,K-1}) &:= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_K} |f_K|^2 d\Sigma + \frac{k}{2} \{ \|w_K(T_K + 1) - z_0\|_V^2 \\
 (45) \quad &+ \|\frac{\partial w}{\partial t}(T_{K+1}) - z_1\|^2 \} + \frac{1}{2} \beta \{ \|g_{k,k-1}\|_H^2 + \|h_{k,k-1}\|_V^2 \}
 \end{aligned}$$

we consider

$$(46) \quad \begin{cases} \inf_{f_K, g_{K,K-1}, h_{K,K-1}} J_K^n(f_K, h_{K,K-1}, g_{K,K-1}) & \text{subject to} \\ \frac{\partial^2 w_K}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A \nabla w_K) + c w_K = F_K & \text{in } Q_K \\ \frac{\partial w_K}{\partial \nu_A} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} w_K = f_K & \text{on } \Sigma_K, \\ w_K(T_K) = \frac{1}{\beta} A^{-1} (\eta_{K,K-1}^n + h_{K,K-1}) & \text{in } V, \\ \frac{\partial w_K}{\partial t}(T_K) = -(\mu_{K,K-1}^n + g_{K,K-1}) & \text{in } H. \end{cases}$$

The optimality system for (46) is examined in the same way as above.

In conclusion, the decoupled systems (37) – (41),  $k = 0, \dots, K$ , are decoupled systems of optimality conditions associated with the optimal control problems (44) on  $I_k$ ,  $k = 1, \dots, K - 1$ , the one obtained from (44) on the left boundary interval  $I_0$ , and (46) on  $I_K$ , respectively.

This iterative decoupling procedure is completely parallel and is reminiscent of a Jacobi-iteration. A Gauß-Seidel variant of the iteration would consist in solving from  $k = 0$  to  $k = K$  and using the most recent transmission values at the corresponding left end  $T_k$  of the interval  $I_k = (T_k, T_{k+1})$ . Moreover, the usage of the ‘virtual controls’ is reminiscent of a shooting method. For further information, we ask the reader to consult the following papers by the authors. [20], [21], [16], [17] [18] [19] [14].

### 6.3 A posteriori error estimates

With the same notation as in the last subsection, we introduce the *local errors*

$$\tilde{w}_k^{n+1} = w_k^{n+1} - w_k, \quad \tilde{p}_k^{n+1} = p_k^{n+1} - p_k.$$

The local errors satisfy the iterative system (37) – (41) with homogeneous data

$$F_k = 0, \quad w_0 = v_0 = z_0 = z_1 = 0.$$

We now define the error at the  $n$ th iteration,  $e^n$ , by

$$e^n = \max_{0 \leq k \leq K} \left\| \left( \tilde{w}_k^n, \frac{\partial \tilde{w}_k^n}{\partial t} \right) \right\|_{L^\infty(I_k; V \times H)}^2 + \max_{0 \leq k \leq K} \left\| \left( \tilde{p}_k^n, \frac{\partial \tilde{p}_k^n}{\partial t} \right) \right\|_{L^\infty(I_k; H \times V^*)}^2 + \sum_{k=0}^K \int_{\Sigma_k} \left[ \alpha \left| \frac{\partial \tilde{w}_k^n}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{\alpha} \left| \frac{\partial \tilde{w}_k^n}{\partial \nu_A} \right|^2 + 2\alpha |\tilde{p}_k^n|^2 \right] d\Sigma.$$

We also define, for  $t \in I_k$ ,

$$e_k^n(t) = \left\| \left( \tilde{w}_k^n(t), \frac{\partial \tilde{w}_k^n}{\partial t}(t) \right) \right\|_{V \times H}^2 + \int_T k^t \int_{\partial} \Omega \left( \alpha \left| \frac{\partial \tilde{w}_k^n}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{\alpha} \left| \frac{\partial \tilde{w}_k^n}{\partial \nu_A} \right|^2 \right) d\sigma dt + \left\| \left( \tilde{p}_k^n(t), \frac{\partial \tilde{p}_k^n}{\partial t}(t) \right) \right\|_{H \times V^*}^2 + \int_t^{T_{k+1}} \int_{\partial \Omega} 2\alpha |\tilde{p}_k^n|^2 d\sigma dt, \\ e^{n,n+1} = \max_{0 \leq k \leq K} \|e_k^n + e_k^{n+1}\|_{L^\infty(I_k)},$$

the latter being a measure of the sum of the errors at successive iterates.

In analogy with Theorem 13 above, we wish to estimate  $e^n$  and  $e^{n,n+1}$  in terms of mismatch of the  $n$ th iterates  $w_k^n, p_k^n$ , or of successive  $n$ th and  $(n + 1)$ st iterates, across the break points  $\{t = T_{k+1} : k = 0, \dots, K - 1\}$ . To this end we introduce the quantities

$$\mathcal{E}_{k,k+1}^n(T_{k+1}) = \left\| \left( w_k^n(T_{k+1}) - w_{k+1}^n(T_{k+1}), \frac{\partial w_k^n}{\partial t}(T_{k+1}) - \frac{\partial w_{k+1}^n}{\partial t}(T_{k+1}) \right) \right\|_{V \times H}^2 + \left\| \left( p_k^n(T_{k+1}) - p_{k+1}^n(T_{k+1}), \frac{\partial p_k^n}{\partial t}(T_{k+1}) - \frac{\partial p_{k+1}^n}{\partial t}(T_{k+1}) \right) \right\|_{H \times V^*}^2, \\ \mathcal{E}_{k,k+1}^{n,n+1}(T_{k+1}) = \left\| \left( w_k^n(T_{k+1}) - w_{k+1}^{n+1}(T_{k+1}), \frac{\partial w_k^n}{\partial t}(T_{k+1}) - \frac{\partial w_{k+1}^{n+1}}{\partial t}(T_{k+1}) \right) \right\|_{V \times H}^2 + \left\| \left( p_k^n(T_{k+1}) - p_{k+1}^{n+1}(T_{k+1}), \frac{\partial p_k^n}{\partial t}(T_{k+1}) - \frac{\partial p_{k+1}^{n+1}}{\partial t}(T_{k+1}) \right) \right\|_{H \times V^*}^2.$$

The following a posteriori estimates were established in [19].

**Theorem 24.** *There is an explicitly computable constant  $C$ , depending only on  $\beta$ ,  $K$  and the input data to the global and local optimal control problems, such that*

$$(47) \quad e^n \leq C \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \mathcal{E}_{k,k+1}^n(T_{k+1}) \right\}^{1/2}$$

and

$$(48) \quad e^{n,n+1} \leq 2C \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} (\mathcal{E}_{k,k+1}^{n,n+1}(T_{k+1}) + \mathcal{E}_{k+1,k}^{n,n+1}(T_{k+1})) \right\}^{1/2}.$$

In addition to  $\beta$  and  $K$ , the constant  $C$  depends on the input data to the global optimality system, that is, on  $\|F\|_{L^1(0,T;H)}$ ,  $\|(w_0, v_0)\|_{V \times H}$ ,  $\|(z_0, z_1)\|_{V \times H}$ ,  $\|\alpha^{-1}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ , and  $\kappa$ , and on the input data to the local optimality systems, that is, on  $\|(\mu_{k,k+1}^0, \eta_{k,k+1}^0)\|_{H \times V^*}$  and  $\|(\mu_{k+1,k}^0, \eta_{k+1,k}^0)\|_{H \times V^*}$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$ .

### 6.4 Space-domain decomposition

For simplicity we consider only two subdomains  $\Omega_1, \Omega_2$  with interface  $\Gamma$ , as in Section 3, and we set

$$Q_i := \Omega_i \times (0, T), \quad \Sigma_i = (\partial\Omega_i \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad \Sigma^{\text{int}} = \Gamma \times (0, T).$$

The global optimality system (29), (32), (31) may be localized to the subdomains  $Q_i$  provided continuity of displacements

$$(49) \quad w_i = w_j, \quad p_i = p_j \text{ on } \Sigma^{\text{int}}$$

and the jump conditions

$$(50) \quad \frac{\partial w_i}{\partial \nu_{A_i}} = -\frac{\partial w_j}{\partial \nu_{A_j}}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \nu_{A_i}} = -\frac{\partial p_j}{\partial \nu_{A_j}} \text{ on } \Sigma^{\text{int}}$$

are enforced, where

$$\frac{\partial w_i}{\partial \nu_{A_i}} := \nu_i \cdot (A_i \nabla w_i),$$

$\nu_i$  denoting the exterior pointing unit normal vector to  $\partial\Omega_i$ . It turns out that (49), (50) are equivalent to

$$(51) \quad \frac{\partial w_i}{\partial \nu_{A_i}} + \beta \frac{\partial w_i}{\partial t} + \gamma p_i = -\frac{\partial w_j}{\partial \nu_{A_j}} + \beta \frac{\partial w_j}{\partial t} + \gamma p_j$$

$$(52) \quad \frac{\partial p_i}{\partial \nu_{A_i}} - \beta d_i p_i + \gamma d_i \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial p_j}{\partial \nu_{A_j}} - \beta d_j p_j + \gamma d_j \frac{\partial w_j}{\partial t}$$

where  $\beta$  and  $\gamma$  are nonzero constants. Condition (51) holds in the  $L^2(\Sigma^{\text{int}})$  sense and (52) in the  $(H^1(0, T; L^2(\Gamma)))^*$  sense. These conditions are then uncoupled through in iteration as described in Algorithm 25 below.

Set  $H_i := L^2(\Omega_i)$  with the standard norm, and  $V_i := H^1(\Omega_i)$  with  $V_i$  normed by

$$\|\phi\|_{V_i} = \left[ \int_{\Omega_i} (A_i \nabla \phi \cdot \nabla \phi + c_i |\phi|^2) dx \right]^{1/2}.$$

Note that  $\|\cdot\|_{V_i}$  is a norm only if it is assumed that  $c_i(x) > 0$  on a set in  $\Omega_i$  of positive measure. Let  $\mathcal{A}_i$  denote the canonical isomorphism of  $V_i$  onto its dual space  $V_i^*$ .

**Algorithm 25.** Given data  $\lambda_j^n, \mu_j^n$  at iteration level  $n$ , solve successively

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w_i^{n+1}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A_i \nabla w_i^{n+1}) + c_i w_i^{n+1} = F_i \\ \frac{\partial^2 p_i^{n+1}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A_i \nabla p_i^{n+1}) + c_i p_i^{n+1} = 0 \text{ in } Q_i \end{cases}$$

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} + \alpha_i \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t} + p_i^{n+1} = 0 \\ \frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} - \alpha_i d_t p_i^{n+1} = 0 \text{ on } \Sigma_i \end{cases}$$

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} + \beta \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t} + \gamma p_i^{n+1} = \lambda_j^n \\ \frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} - \beta d_t p_i^{n+1} + \gamma d_t \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t} = \mu_j^n \text{ on } \Sigma^{\text{int}}, i \neq j = 1, 2 \end{cases}$$

$$(56) \quad \begin{cases} w_i^{n+1}(0) = w_{0i}, \quad \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t}(0) = v_{0i} \\ p_i^{n+1}(T) = k \left( \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t}(T) - z_{1i} \right) \\ \frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial t}(T) = -k A_i (w_i^{n+1}(T) - z_{0i}) \text{ in } \Omega_i \end{cases}$$

where  $\lambda_j^0, \rho_j^0 \in L^2(\Sigma^{\text{int}})$  are arbitrary,  $\mu_j^0 = d_t \rho_j^0$  and, for  $n \geq 1$ ,

$$\lambda_j^n = -\frac{\partial w_j^n}{\partial \nu_{A_j}} + \beta \frac{\partial w_j^n}{\partial t} + \gamma p_j^n, \quad \mu_j^n = -\frac{\partial p_j^n}{\partial \nu_{A_j}} - \beta d_t p_j^n + \gamma d_t \frac{\partial w_j^n}{\partial t}.$$

The problem (53) – (56) is well posed since it is itself the optimality system for the local optimal control problem

$$\inf_{f_i, g_j} \left\{ \int_{\Sigma_i} |f_i|^2 d\Sigma + 1\gamma \int_{\Sigma^{\text{int}}} (|g_j|^2 + |\gamma \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho_j^n|^2) d\Sigma + \kappa \left\| (w_i(T), \frac{\partial w_i}{\partial t}(T)) - (z_{0i}, z_{1i}) \right\|_{V_i \times H_i}^2 \right\}$$

subject to

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A_i \nabla w_i) + c_i w_i = F_i \text{ in } Q_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial \nu_{A_i}} + \alpha_i \frac{\partial w_i}{\partial t} = f_i \text{ on } \Sigma_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial \nu_{A_i}} + \beta \frac{\partial w_i}{\partial t} = \lambda_j^n + g_j \text{ on } \Sigma^{\text{int}} \\ w_i(0) = w_{0i}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(0) = v_{0i} \text{ in } \Omega_i, \end{cases}$$

where the controls  $f_i \in L^2(\Sigma_i)$  and  $g_j \in L^2(\Sigma^{\text{int}})$ , and  $\rho_j^n \in L^2(\Sigma^{\text{int}})$  is a function such that  $\mu_j^n = d_t \rho_j^n$ . Indeed, this optimal control problem has the same structure as the glo-

bal optimal control problem. Therefore, for the problem (57), (58) there is a unique optimal trajectory  $w_i^{n+1}$  with corresponding optimal controls given by

$$f_i = -p_i^{n+1}|_{\Sigma_i}, \quad g_j = -\gamma p_i^{n+1}|_{\Sigma^{\text{int}}},$$

where  $p_i^{n+1}$  is the solution of

$$\frac{\partial^2 p_i^{n+1}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A_i \nabla p_i^{n+1}) + c_i p_i^{n+1} = 0 \text{ in } Q_i$$

$$\frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} - \alpha_i d_i p_i^{n+1} = 0 \text{ on } \Sigma_i$$

$$\frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} - \beta d_i p_i^{n+1} = -\gamma d_i \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t} + \mu_j^n \text{ on } \Sigma^{\text{int}}$$

$$p_i^{n+1}(T) = \kappa \left( \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t}(T) - z_1 i \right) \in H_i$$

$$\frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial t}(T) = -\kappa \mathcal{A}_i(w_i^{n+1}(T) - z_0 i) \in V_i^*.$$

It would be natural, of course, to introduce relaxation into the iteration step (55). When  $\beta$  and  $\gamma$  are positive constants, it may be proved that Algorithm 25, with and without relaxation, is convergent to the solution of the global optimality system.

*Remark 26.* Calculation of the adjoint variable  $p_i^{n+1}$  may be simplified by observing that this quantity may be expressed in terms of a more regular variable  $q_i^{n+1}$  through the relations

$$p_i^{n+1} = \frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial t} = -\mathcal{A}_i q_i^{n+1},$$

where  $q_i^{n+1}$  is the solution of

$$\frac{\partial^2 q_i^{n+1}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (A_i \nabla q_i^{n+1}) + c_i q_i^{n+1} = 0 \text{ in } Q_i$$

$$\frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} - \alpha_i \frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial t} = 0 \text{ on } \Sigma_i$$

$$\frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial \nu_{A_i}} - \beta \frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t} + \rho_j^n \text{ on } \Sigma^{\text{int}}$$

$$q_i^{n+1}(T) = \kappa(w_i^{n+1}(T) - z_0 i)$$

$$\frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial t}(T) = \kappa \left( \frac{\partial w_i^{n+1}}{\partial t}(T) - z_1 i \right),$$

where  $\rho_j^0 \in L^2(\Sigma^{\text{int}})$  is arbitrary and, for  $n \geq 1$ ,

$$\rho_j^n = -\frac{\partial q_j^n}{\partial v_{A_j}} - \beta \frac{\partial q_j^n}{\partial t} + \gamma \frac{\partial w_j^n}{\partial t}.$$

It is also possible to obtain a posteriori estimates analogous to Theorems 13 and 24 above for the error in the approximation in terms of the mismatch of the time and normal derivatives of the  $n$ th iterates, or of successive iterates, across the interface  $\Sigma^{\text{int}}$ . The constant factor  $C$  that appears in the estimates depends on  $\beta, \gamma$ , the starting values  $\lambda_j^0, \rho_j^0$  for the local iteration process, and the time and normal derivatives of the solution of the global optimality system on the interface  $\Sigma^{\text{int}}$ . We do not, unfortunately, have estimates of these traces in terms of the input data to the global optimal control problem. We omit further discussion of this point. Details may be found in [16].

**Acknowledgement.** The authors are indebted to R. Hundhammer for the numerical results. More numerical simulations which involve multy-bay trusses and other networks of uncontrolled and controlled 1-d and 2-d wave equations can be found in his thesis [12], where the inherent parallelism of the algorithms is used for the numerical simulations on a PC cluster.

## References

- [1] J.-D. Benamou, A domain decomposition method with coupled transmission conditions for the optimal control of systems governed by elliptic partial differential equations, *SIAM Journal Numerical Analysis*, Vol. **33**(6) (1996), 2401–2416
- [2] B. Despres, B., *Methodes de decomposition de domaine pour les problemes de propagation d'ondes en regime harmonique. Le theoreme de Borg pour l'equation de Hill vectorielle. (Domain decomposition methods for harmonic wave-propagation problems. The Borg theorem for vectorial Hill equation)*, (1991), Univ. de Paris IX, Rocquencourt: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA)
- [3] M. Gander, private communication 2002.
- [4] M. Gander, L. Halpern and J. Nataf, Optimized Schwarz methods, **preprint** 1999.
- [5] M. Gander, L. Halpern and J. Nataf, Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz wave-form relaxation, in: *Proceedings of the 11th Conf. on domain decomp.* DDM. org 1999.
- [6] P. Gervasio, J.L. Lions and A. Quarteroni, Heterogeneous coupling by virtual control methods, *Numer. Math.*, **90** (2001), 241–264.
- [7] M. Gugat, G. Leugering, K. Schittkowski and E.J.P.G. Schmidt, Modelling, stabilization and optimal control of flows in networks of open channels, *this volume*.
- [8] R. Glowinski and P. Le Tallec, *Augmented Lagrangians*, SIAM 1989.
- [9] R. Glowinski and P. Le Tallec, *The Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Chan, T.F., Glowinski, R., Reriaux, J. Widlund eds.), SIAM, Philadelphia (1990), 202–223.
- [10] M. Gunzburger, H. Lee and Peterson, An optimization based domain decomposition method for partial differential equations, *Comp. Math. Appl.*, Vol **137** (1999).
- [11] M. Heinkenschloss, Time-domain decomposition iterative methods for the solution of distributed linear quadratic optimal control problems, **preprint** 2001.
- [12] R. Hundhammer, *Simulation und Echtzeitsteuerung schwingender Netzwerke*, Dissertation, Fachbereich Mathematik TU-Darmstadt 2002.
- [13] R. Hundhammer and G. Leugering, Instantaneous control of networks of vibrating strings, *this volume*.

- [14] J.E. Lagnese, Domain decomposition in exact controllability of second order hyperbolic systems on 1-d networks, *Control and Cybernetics*, **28/3** (1999), 531–556.
- [15] J.E. Lagnese, G. Leugering and E.J.P.G. Schmidt, *Modelling, Analysis and Control of Multi-Link Flexible Structures*, Birkhäuser Verlag (1994).
- [16] J.E. Lagnese and G. Leugering, *Domain decomposition in optimal control problems*, Birkhäuser Verlag to appear 2002.
- [17] J.E. Lagnese and G. Leugering, Time-domain decomposition of optimal control problems for the wave equation, *Syst. Cont. Letters* to appear 2002.
- [18] J.E. Lagnese and G. Leugering, Time-domain decomposition in final value optimal control for the Maxwell system, *ESAIM: COCV* to appear 2002.
- [19] J.E. Lagnese and G. Leugering, A posteriori estimates in time-domain decomposition of final value optimal control of the acoustic wave equation, *Appl. Math. and Opt.* under review 2002.
- [20] G. Leugering, Domain decomposition of optimal control problems for dynamic networks of strings and Timoshenko-beams, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. **37/6** (1999), 1649–1675.
- [21] J.E. Lagnese and G. Leugering, Dynamic domain decomposition in approximate and exact boundary control in problems of transmission for wave equations, zusammen mit J.E. Lagnese, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. **38/2** (2000), 503–537.
- [22] P.L. Lions, On the Schwarz Alternating Method III: A Variant for Nonoverlapping Subdomains, *The Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Chan, T.F., Glowinski, R., Reriaux, J. Widlund, O. B. eds.), SIAM, Philadelphia (1990), 202–223.
- [23] J.L. Lions, Virtual and effective control for distributed systems and decomposition of everything, *J. d'Analyse Mathématique*, **80** (2000), 257–297.
- [24] J.L. Lions and O. Pironneau, Algorithmes parallèles pour la solution de problèmes aux limites, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Ser. I* (1998), 947–952
- [25] J.L. Lions and O. Pironneau, Sur le contrôle parallèle des systèmes distribués, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Ser. I* (1998), 993–998
- [26] F.-C. Otto and G. Lube, A posteriori estimates for a non-overlapping domain decomposition method, *Computing* **62** (1999) 27–43.
- [27] A. Quarteroni and A. Valli, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford Science Publications 1999.
- [28] P.A. Raviart and J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson 1992.





## Gitter und Modulformen

**Gabriele Nebe**

### Abstract

- Keywords and Phrases: extremal lattices, theta series, modular forms, spherical designs
- Mathematics Subject Classification: 11H31, 11F11

A main goal in lattice theory is the construction of dense lattices. Most of the remarkable dense lattices in small dimensions have an additional symmetry, they are modular, i.e. similar to their dual lattice. Extremal lattices are densest modular lattices, whose density is as high as the theory of modular forms allows it to be. The theory of theta series with harmonic coefficients allows to classify and to construct extremal lattices as well as to prove that some of them are strongly perfect and hence local maxima of the density function.

Eingegangen: 12.9.2002

Gabriele Nebe, Abteilung Reine Mathematik, Universität Ulm,  
89069 Ulm, Germany. E-Mail: [nebe@mathematik.uni-ulm.de](mailto:nebe@mathematik.uni-ulm.de),  
URL: [www.mathematik.uni-ulm.de/ReineM/nebe](http://www.mathematik.uni-ulm.de/ReineM/nebe)

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002

## 1 Einleitung

Die Theorie der Gitter hat Beziehungen zu vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik. Die meisten bekannten schönen Gitter haben (in der Regel sogar mehrere) Konstruktionen mit Hilfe von Codes, algebraischen Zahlringen, algebraischer Geometrie oder endlichen Matrixgruppen, um nur einige wichtige Schlagworte zu nennen. Umgekehrt hilft das Konzept eines Gitters in anderen Bereichen der Mathematik, wie z. B. in der algebraischen Topologie oder auch in der algorithmischen Zahlentheorie ([31]). In diesem Artikel möchte ich über einige Anwendungen der Theorie der Modulformen auf die Definition und Konstruktion dichter Gitter berichten, die insbesondere in den letzten 10 Jahren einen neuen Aufschwung in die Gittertheorie gebracht haben. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass viele der berühmtesten Gitter – wie z. B. das Leech Gitter in Dimension 24, das Barnes-Wall Gitter in Dimension 16, das Coxeter-Todd Gitter in Dimension 12 – eine zusätzliche Symmetrie haben, sie sind modular, also ähnlich zu ihrem dualen Gitter. In [29] verallgemeinert Quebbemann den klassischen, mit Hilfe von Modulformen definierten Begriff des extremalen unimodularen Gitters auf gewisse modulare Gitter und legt so den Grundstein für die Entdeckung neuer extremaler modularer Gitter. Dabei liefern Modulformen nicht nur die Definition von Extremalität sondern sind auch ein Hilfsmittel, solche Gitter zu konstruieren oder deren Nichtexistenz zu beweisen.

Ein durch die Anwendung in der Informationsübertragung motiviertes Maß für die Güte eines Gitters ist seine Dichte, also die Dichte der zugehörigen gitterförmigen Kugelpackung. Die sich daraus ergebende Frage, die dichtesten Gitter in jeder Dimension zu konstruieren, ist schon ab Dimension 9 ungelöst. Daher beschränkt man sich beim Suchen dichter Gitter auf gewisse schöne Teilklassen von Gittern, wie z. B. die in Abschnitt 3 eingeführten modularen Gitter. Der Bezug zu Modulformen geschieht über die Theta-Reihe des Gitters, das ist die erzeugende Funktion der Anzahlen von Gittervektoren gegebener Länge. Als holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene betrachtet, hat die Theta-Reihe eines modularen Gitters zusätzliche Invarianzeigenschaften und ist somit eine Modulform zu einer recht großen Modulgruppe. Durch die Kenntnis des endlich dimensionalen Vektorraums dieser Modulformen kann man die Vielfachheit des Wertes 1 bei  $i\infty$  nach oben beschränken. Eine Modulform heißt extremal, wenn diese Vielfachheit maximal wird. Ist diese Modulform die Theta-Reihe eines modularen Gitters, so bedeutet dies, dass das Minimum und damit auch die Dichte dieses Gitters maximal ist unter den entsprechenden modularen Gittern. Dann heißt dieses Gitter extremal. Extremale Gitter sind also dichteste modulare Gitter, für die die Dichte so groß ist, wie es die Theorie der Modulformen erlaubt (siehe Abschnitt 6 für eine genaue Definition).

Extremale Gitter liefern oft gute sphärische Designs. Umgekehrt kann man mit sphärischen Designs lokal dichteste Gitter finden (Abschnitt 7) und mit Hilfe der Theorie der Theta-Reihen mit harmonischen Koeffizienten zum Beispiel zeigen, dass gewisse extremale Gitter lokale Maxima der Dichtefunktion sind (Abschnitt 8). Diese Theorie hilft auch zum Beweis der Nichtexistenz und, weitaus interessanter, bei der Konstruktion und Klassifikation extremaler Gitter [4].

Dieser Artikel geht bewußt nicht zu stark auf die technischen Details ein. Der interessierte Leser sei dazu auf die Originalarbeiten [29], [30] sowie den sehr schönen Übersichtsartikel [34] verwiesen. Über den Zusammenhang mit sphärischen Designs informiert [14] (insbesondere die Ausarbeitung [41]). Neben der Bibel der Gittertheorie [6] ist [7] eine weitere schöne Einführung in die behandelte Thematik. Alle vorkommenden Gitter findet man in der Datenbank [24].

## 2 Dichte Gitter

In dieser Arbeit ist ein Gitter  $L$  immer die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von Basisvektoren  $(b_1, \dots, b_n)$  des Euklidischen Raums  $(\mathbf{R}^n, (\cdot, \cdot))$ . Ein durch die Anwendung von Gittern in der Informationsübertragung motiviertes Maß für die Güte eines Gitters  $L$  ist die Dichte  $\delta(L)$  der zugehörigen Kugelpackung. Dabei werden gleichgroße  $n$ -dimensionale Kugeln so gepackt, dass die Mittelpunkte der Kugeln gerade die Gitterpunkte sind. Der maximal mögliche gemeinsame Durchmesser der Kugeln ist gleich dem minimalen Abstand verschiedener Gitterpunkte also die Quadratwurzel aus dem Minimum von  $L$ ,

$$\min(L) := \min\{\|x\| \mid 0 \neq x \in L\}.$$

Der Raum, der pro Kugel der Packung benötigt wird, ist die Wurzel aus der Determinante von  $L$

$$\det(L) := \text{vol}(\mathbf{R}^n/L)^2 := \det((b_i, b_j)_{i,j=1}^n).$$

Also ist die Dichte der Kugelpackung

$$\delta(L) = \frac{V_n}{2^n} \sqrt{\frac{\min(L)^n}{\det(L)}},$$

wobei  $V_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet.

Dichte Gitter liefern gute fehlerkorrigierende Codes für analoge Signale: Ein Signal kann man sich als Punkt im  $\mathbf{R}^n$  vorstellen. Über einen (nicht störungsfreien) Kanal kann man solche Signale nicht genau übertragen. Daher läßt man (ähnlich wie in der Codierungstheorie) nur Gitterpunkte als Informationssignale zu. Zum Decodieren des gestörten empfangenen Signals, muß dann der nächstgelegene Gitterpunkt gefunden werden. Um dabei möglichst große Fehler korrigieren zu können, sollen die Gitterpunkte weit auseinanderliegen (d. h. das Gitter soll ein großes Minimum haben). Andererseits will man mit beschränkter Energie möglichst viel Information übertragen (d. h. das Gitter soll eine möglichst kleine Determinante haben). Dabei ist die Wahl des richtigen Gitters wesentlich: So kann man z. B. mit dem Leech Gitter  $\Lambda_{24} \subset \mathbf{R}^{24}$ , dem wahrscheinlich dichtesten 24-dimensionalen Gitter, bei gleicher Energie und Fehlerkorrektur  $2^{24}$  (also mehr als 16 Millionen) mal so viel Information übertragen wie mit dem Standardgitter  $\mathbf{Z}^{24}$ . Im 80-dimensionalen kennt man zwei Gitter ( $L_{80}$  und  $M_{80}$ , siehe Tabelle auf Seite 134, 135), für die die Verbesserung gegenüber dem Standardgitter  $\mathbf{Z}^{80}$  einen Faktor von mehr als  $10^{36}$  ausmacht. Trotzdem ist es i. a. nicht sinnvoll so hochdimensionale Gitter einzusetzen, da man dann die Information nicht mehr (schnell) decodieren kann.

Ein Hauptziel der Gittertheorie ist das Finden dichter Gitter. Dazu gibt es eine über 100 Jahre alte Theorie von Korkine und Zolotareff, die später von Voronoi ([42]) verfeinert wurde: Die Dichtefunktion  $\delta$  hat auf dem Raum der Ähnlichkeitsklassen von  $n$ -dimensionalen Gittern nur endlich viele lokale Maxima, sogenannte extreme Gitter. Die extremen Gitter kann man mit Hilfe der Geometrie ihrer kürzesten Vektoren

$$\text{Min}(L) := \{x \in L \mid (x, x) = \min(L)\}$$

charakterisieren:

**Satz 2.1** ([42]) *L ist extrem  $\Leftrightarrow L$  ist perfekt (d. h.  $\langle p_x := x^t x \mid x \in \text{Min}(L) \rangle_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$ ) und  $L$  ist eutaktisch (d. h.  $I_n = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x p_x$  mit  $\lambda_x > 0 \forall x$ ).*

Wohingegen Eutaxie eine Konvexitätsbedingung ist (die die Bedingung  $\delta''(L) < 0$  ersetzt, da  $\delta$  im allgemeinen nicht differenzierbar ist) ist Perfektion eine lineare Bedingung (stellvertretend für  $\delta'(L) = 0$ ).

Die Voronoische Charakterisierung erlaubt es u.a. zu zeigen, dass extreme Gitter ähnlich sind zu ganzen Gittern, d. h. die Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  nimmt auf  $L$  nur ganze Werte an, oder gleichbedeutend  $L$  liegt in seinem dualen Gitter

$$L^* := \{v \in \mathbf{R}^n \mid (v, x) \in \mathbf{Z} \forall x \in L\}.$$

Es ist also keine Einschränkung, sich bei der Suche nach dichtesten Gittern auf ganze Gitter zu beschränken.

Voronoi gab 1908 einen Algorithmus an, um alle (endlich vielen) Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter der Dimension  $n$  aufzulisten, der bis Dimension 7 praktikabel ist. Die dichtesten Gitter sind bis zur Dimension 8 bekannt, wobei es in Dimension 8 nicht mehr möglich ist, alle extremen Gitter zu bestimmen (man kennt schon mehr als 10000). Die dichtesten Gitter der Dimension  $\leq 8$  sind sogenannte Wurzelgitter, das sind ganze Gitter, die von Vektoren der Länge 2 erzeugt werden.

#### Die dichtesten Gitter in Dimension $n \leq 8$ :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\mathbf{Z}$	$A_2$	$A_3$	$D_4$	$D_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$

Die Wurzelgitter sind alle klassifiziert und gut untersucht (siehe z. B. [7, Section 1.4], [6, Chapter 4]). Sie spielen in vielen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle wie z. B. in der Theorie der Liealgebren und der algebraischen Gruppen. In Dimension 9 ist das dichteste bekannte Gitter, das geschichtete Gitter  $\Lambda_9$  ([6]), dichter als alle Wurzelgitter.

### 3 Modulare Gitter

Der Begriff des modularen Gitters, der in dem hier verwendeten Sinn vor ca. 10 Jahren von H.-G. Quebbemann geprägt wurde, kommt zum einen daher, dass die Theorie der Modulformen hilft, modulare Gitter zu untersuchen, zum anderen, da diese Gitter eine Verallgemeinerung der unimodularen Gitter sind, das sind ganze Gitter der Determinante 1.

**Definition 3.1** Ein ganzes Gitter  $L$  der Dimension  $2k$  heißt  $N$ -modular oder modular der Stufe  $N$ , falls  $L$  isometrisch zu seinem reskalierten dualen Gitter

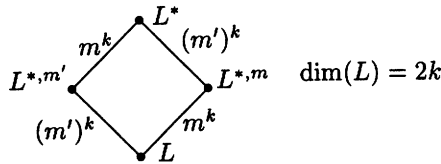
$$L_{(N)} := \sqrt{N}L^*$$

ist, d. h. es gibt eine orthogonale Abbildung  $\sigma \in O_n(\mathbf{R})$  mit  $\sigma L = L_{(N)}$ . 1-modulare Gitter heißen auch unimodular.

Viele der dichtesten Gitter in kleinen Dimensionen sind modular: Die Wurzelgitter  $A_2$ ,  $D_4$  und  $E_8$ , welche die dichtesten Gitter in Dimension 2, 4 und 8 sind, sind 3-, 2- bzw. unimodular. Weitere berühmte modulare Gitter sind das 3-modulare Coxeter-Todd Gitter  $K_{12}$  in Dimension 12, das 2-modulare Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  in Dimension 16 und natürlich das bemerkenswerte Leech Gitter  $\Lambda_{24}$ , das einzige gerade unimodulare Gitter der Dimension 24, welches keine Vektoren der Länge 2 besitzt. In all diesen Fällen ist die Stufe  $N$  eine Primzahl (oder 1). Während der Klassifikation der maximal endlichen rationalen Matrixgruppen ([23], [17], [18]) wurden einige sehr dichte modulare Gitter gefunden, für welche die Stufe eine quadratfreie zusammengesetzte Zahl ist. Ist  $N = mm'$  ein Produkt von 2 teilerfremden Zahlen, so gibt es zwischen dem  $N$ -modularen Gitter  $L$  und seinem dualen Gitter  $L^*$  zwei weitere sogenannte „partielle“ duale Gitter

$$L^{*,m} := \frac{1}{m}L \cap L^*$$

und  $L^{*,m'}$ .



**Definition 3.2** Ein  $N$ -modulares Gitter  $L$  heißt stark  $N$ -modular, falls  $L$  isometrisch ist zu allen reskalierten partiellen dualen Gittern

$$L_{(m)} := \sqrt{m}L^{*,m}$$

für alle exakten Teiler  $m$  von  $N$  (d. h.  $\text{ggT}(m, N/m) = 1$ ).

Da es zu schwierig ist, die absolut dichtesten Gitter zu bestimmen, und (zumindest in „kleinen“ Dimensionen) viele der dichtesten bekannten Gitter modular sind, ist es ein interessantes Problem, die dichtesten (stark)  $N$ -modularen Gitter zu finden. Da die Determinante eines  $N$ -modularen Gitters  $L$  der Dimension  $2k$  gleich  $\det(L) = N^k$  ist, bedeutet dies, die  $N$ -modularen Gitter mit dem größtmöglichen Minimum zu bestimmen. Dabei hilft die Theorie der Modulformen, dieses Minimum nach oben zu beschränken, so dass man einem einzelnen stark  $N$ -modularen Gitter ansieht, ob es ein dichtestes modulares Gitter ist, ohne alle anderen Gitter zu kennen.

## 4 Modulformen

Die im nächsten Abschnitt definierten Theta-Reihen von Gittern haben gewisse Invarianzeigenschaften unter Variablensubstitutionen, sie sind Modulformen. Da diese Beobachtung grundlegend für diesen Artikel ist, wird kurz auf den Begriff der Modulform eingegangen. Wie man in der Funktionentheorie lernt, ist die Gruppe der biholomorphen Abbildungen auf der oberen Halbebene  $\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$  die Gruppe der Möbiustransformationen

$$z \mapsto A(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R}).$$

Dies liefert für alle  $k \in \mathbf{Z}$  eine Operation  $|_k$  der  $SL_2(\mathbf{R})$  auf dem Vektorraum der meromorphen Funktionen  $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$  durch

$$f|_k A(z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

**Definition 4.1** Sei  $U$  eine Untergruppe von  $SL_2(\mathbf{R})$ , so dass  $U \cap SL_2(\mathbf{Z})$  in  $U$  und  $SL_2(\mathbf{Z})$  endlichen Index hat, und  $\chi : U \rightarrow \mathbf{C}^*$  ein Charakter. Eine meromorphe Funktion  $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$  heißt eine Modulform vom Gewicht  $k$  zum Charakter  $\chi$ ,  $f \in \mathcal{M}_k(U, \chi)$ , falls

$$f|_k A = \chi(A)f \quad \text{für alle } A \in U$$

gilt und  $f|_k M$  für alle  $M \in SL_2(\mathbf{Z})$  bei  $i\infty$  holomorph ist.  $f$  heißt eine Spitzenform,  $f \in \mathcal{S}_k(U, \chi)$ , falls zusätzlich  $\lim_{t \rightarrow \infty} f|_k M(it) = 0$  für alle  $M \in SL_2(\mathbf{Z})$ .

Da die  $|_k$ -Operation „multiplikativ“ ist, d. h.  $(f|_k A)(g|_l A) = (fg)|_{k+l} A$  ist für jede Familie von Charakteren  $\chi_k : U \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  mit  $\chi_k \chi_l = \chi_{k+l}$  der Raum

$$\mathcal{M}(U, (\chi_k)) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(U, \chi_k)$$

ein graduierter Ring, der Ring der Modulformen von  $U$  (zum Charakter  $(\chi_k)$ ), in welchem die Spitzenformen ein Ideal bilden. Dieser graduierte Ring ist endlich erzeugt. Die Dimensionen der graduierten Komponenten lassen sich mit Hilfe von Spurformeln berechnen (siehe z. B. [16]). Die Modulformen  $f$ , die für ganze Gitter von Bedeutung sind, sind alle invariant unter der Transformation  $z \mapsto z + 2$ . Also haben sie eine Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad q = \exp(\pi iz).$$

Kennt man die Dimension von  $\mathcal{M}_k(U, \chi_k)$ , so genügt es für festes  $k$  mit einer festen Genauigkeit (also modulo  $q^a$  für hinreichend großes  $a$ ) zu rechnen. Aus der Potenzreihenentwicklung der Ringerzeuger modulo  $q^a$  erhält man durch Multiplikation dann eine explizite Basis von  $\mathcal{M}_k(U, \chi_k)$ .

## 5 Theta-Reihen

Sei  $L$  ein ganzes Gitter. Die Theta-Reihe  $\theta_L$  von  $L$  ist die erzeugende Funktion der Anzahlen von Vektoren gegebener Länge in  $L$ ,

$$\theta_L(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_L(j) q^j$$

wo  $a_L(j) = |\{x \in L \mid (x, x) = j\}|$  die Anzahl der Vektoren der Länge  $j$  in  $L$  ist und  $q := \exp(\pi iz)$ .

Dann ist  $\theta_L$  eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene. Da  $\exp(2\pi i) = 1$  ist, ist z. B.  $\theta_L(z) = \theta_L(z + 2)$  und sogar  $\theta_L(z) = \theta_L(z + 1)$ , falls  $L$  ein gerades Gitter ist, d. h.  $(x, x) \in 2\mathbf{Z}$  für alle  $x \in L$ . Sei nun  $L$  ein gerades Gitter. Dann ist die Stufe  $N$  von  $L$  die kleinste natürliche Zahl, für die

$$L_{(N)} := \sqrt{N}L^*$$

ein gerades Gitter ist.

**Satz 5.1** *Ist  $L$  ein gerades Gitter der Dimension  $2k$  von Stufe  $N$ , so ist*

$$\theta_L \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi_k)$$

eine Modulform zur Gruppe

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid N \text{ teilt } c \right\}$$

mit dem Charakter  $\chi_k$  definiert durch das Legendre Symbol

$$\chi_k \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := \left( \frac{(-1)^k \det(L)}{d} \right) \in \{\pm 1\}.$$

Im Hinblick auf modulare Gitter interessieren gerade Gitter  $L$  der Dimension  $2k$  von Stufe  $N$  der Determinante  $N^k$ . Diese Gitter bilden für Primzahlen  $N$  oder  $N = 1$  ein Geschlecht, d. h. für je zwei solche Gitter  $L$  und  $M$  sind ihre Lokalisierungen  $\mathbf{Z}_p \otimes M \cong \mathbf{Z}_p \otimes L$  für alle Primzahlen  $p$  isometrisch.

Die meisten Standardkonstruktionen für Gitter haben eine Entsprechung auf der Ebene der Theta-Reihen: Mit Hilfe von Poisson Summation erhält man die Theta-Transformationsformel

$$\theta_{L^*}(z) = \left(\frac{z}{i}\right)^{-k} \sqrt{\det(L)} \theta_L\left(-\frac{1}{z}\right) \quad (\text{wo } 2k = \dim(L))$$

welche die Theta-Reihe des dualen Gitters durch  $\theta_L$  ausdrückt.

Ist  $\det(L) = N^k$  so ergibt sich nach Substitution von  $z$  durch  $\sqrt{N}z$  in der Theta-Transformationsformel dass

$$\theta_{L_{(N)}} = \chi_{N,k}(t_N) \theta_L|_k t_N \quad (\text{wo } L_{(N)} = \sqrt{N}L^*)$$

für die Fricke Involution

$$t_N := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{N}^{-1} \\ -\sqrt{N} & 0 \end{pmatrix} \in N_{SL_2(\mathbf{R})}(\Gamma_0(N))$$

gilt, wobei  $\chi_{N,k}(t_N) := i^k$  gesetzt ist.

Etwas allgemeiner, kann man auch die Theta-Reihe der partiellen dualen Gitter aus  $\theta_L$  berechnen ([30, p. 60]) und findet, dass die Theta-Reihe eines stark  $N$ -modularen Gitters eine Eigenfunktion der Atkin-Lehner Involution  $W_m \in N_{SL_2(\mathbf{R})}(\Gamma_0(N))$  für alle exakten Teiler  $m$  von  $N$  ist.

**Satz 5.2** *Ist  $L$  ein gerades stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ , so ist  $\theta_L$  eine Modulform zur Gruppe*

$$\Gamma_*(N) := \langle \Gamma_0(N), W_m \mid m \text{ exakter Teiler von } N \rangle$$

zu einem Charakter  $\chi_{N,k}$  mit  $\chi_{N,k}\chi_{N,k'} = \chi_{N,k+k'}$ .

Diese Atkin-Lehner Involutionen erzeugen eine elementar abelsche 2-Gruppe  $W(N) \leq N_{SL_2(\mathbf{R})}(\Gamma_0(N))/\Gamma_0(N)$  deren Rang die Anzahl der Primteiler von  $N$  ist.  $W(N)$  operiert auf dem  $\mathbf{C}$ -Vektorraum, dessen Basis die Isometrieklassen der geraden Gitter von Stufe  $N$ , Dimension  $2k$  und Determinante  $N^k$  bilden, durch

$$[L] \cdot W_m := \chi_{N,k}(W_m)[L_{(m)}].$$

Unter dem linearen Operator „Theta-Reihe nehmen“ wird diese Operation gerade auf die Operation von  $W(N)$  auf dem Raum der Modulformen für  $\Gamma_0(N)$  abgebildet. Der Vorteil dieser schon bei Eichler [8, Kapitel IV] beschriebenen Sichtweise liegt vor allem darin, dass man auch andere Operatoren z. B. „Theta-Reihe mit sphärischen Koeffizienten nehmen“ oder „Siegelische Theta-Reihe bilden“ anwenden kann und dann die entsprechende Operation auf den (Siegelischen) Modulformen erhält. Diese Philosophie wurde z. B. in [26] verfolgt.

## 6 Extremale Gitter

Der Ring der Modulformen von  $\Gamma_*(N)$  ist besonders übersichtlich, wenn die Summe  $\sigma_1(N)$  der Teiler von  $N$  ein Teiler von 24 ist. Daher wird im ganzen Abschnitt vorausgesetzt, dass

$$N \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\} =: \mathcal{A}$$

ist. Sei weiter  $L$  ein gerades stark  $N$ -modulares Gitters minimaler Dimension  $2d_N$  und  $\theta_N$  seine Theta-Reihe (vom Gewicht  $d_N$ ). Dann liegen die Theta-Reihen der stark  $N$ -modularen Gitter, welche zum Geschlecht von  $L^d$  für ein  $d$  gehören, in dem Ring

$$\mathcal{M}(N) := \mathbf{C}[\theta_N, \Delta_N] \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma_*(N), \chi_{N,k})$$

wo



$$\Delta_N := \prod_{m|N} \eta(mz)^{24/\sigma_1(N)}$$

eine Spitzenform vom Gewicht  $k_N := \frac{12\sigma_0(N)}{\sigma_1(N)}$  ist. Hier ist

$$\eta(z) = q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

die Dedekindsche  $\eta$ -Funktion und  $\sigma_0(N)$  die Anzahl der Teiler von  $N$ . Die Reihe  $\theta_N$  und der Charakter  $\chi_{N,k}$  und damit auch  $\mathcal{M}(N)$  hängen vom Geschlecht des gewählten Gitters  $L$  ab (welches jedoch für  $N \neq 6$  durch  $d_N$  eindeutig bestimmt ist),  $\Delta_N$  ist schon durch die Stufe  $N$  bestimmt.  $\Delta_N$  und  $\theta_N$  sind Potenzreihen in  $q^2$ . Die  $q$ -Entwicklung von  $\Delta_N$  beginnt mit  $q^2$  und die von  $\theta_N$  mit 1.  $d_N$  und  $k_N$  ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

$N$	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$2k_N$	24	16	12	8	8	6	4	4	4	2
$2d_N$	8	4	2	4	4	2	2	4	4	2

Ist  $L$  ein gerades stark  $N$ -modulares Gitter, so gibt es also  $a_i \in \mathbb{C}$  ( $a_0 = 1$ ) mit

$$\theta_L = \sum_{i=0}^l a_i \Delta_N^i \theta_N^j, \text{ wo } k_N i + d_N j = k \text{ und } l = \lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor$$

die größte ganze Zahl  $\leq \frac{k}{k_N}$  bezeichnet. Die  $q$ -Entwicklung von  $\Delta_N^i \theta_N^j$  beginnt mit  $q^{2i}$ . Also enthält  $\mathcal{M}(N)$  genau eine Funktion  $f_{N,k}$  vom Grad  $k$  mit  $q$ -Entwicklung

$$f_{N,k} = 1 + 0 \cdot q^2 + \dots + 0 \cdot q^{2l} + a_{2l+2} \cdot q^{2l+2} + \dots \in \mathcal{M}_k(N)$$

die sogenannte extremale Modulform vom Gewicht  $k$ . Schon C. L. Siegel [39] hat für  $N = 1$  gezeigt, dass der Koeffizient  $a_{2l+2}$  echt positiv ist (siehe [34, Theorem 2.0.1] für  $N > 1$ ). Also ist das Minimum eines geraden stark  $N$ -modularen Gitters der Dimension  $2k$  immer kleiner oder gleich  $2 + 2\lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor$ .

**Definition 6.1** Sei  $N \in \mathcal{A}$  und  $k_N := \frac{12\sigma_0(N)}{\sigma_1(N)}$  das Gewicht der Spitzenform  $\Delta_N$ . Ein gerades stark  $N$ -modulares Gitter  $L$  der Dimension  $2k$  heißt extremal, falls

$$\min(L) = 2 + 2\lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor.$$

Grob gesprochen bedeutet dies, dass ein Gitter extremal ist, wenn sein Minimum so groß ist, wie es die Theorie der Modulformen erlaubt. Mit dieser Philosophie kann man auch Extremalität für andere Geschlechter von Gittern definieren (siehe [34, Definition 1.6]). Ist  $L$  also ein extremales stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ , so ist  $\theta_L = f_{N,k}$  die (dem Geschlecht von  $L$  zugeordnete) extremale Modulform. Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines extremalen geraden stark  $N$ -modularen Gitters in Dimension  $2k$  ist, dass die Koeffizienten  $a_m$  der extremalen Modulform  $f_{N,k}$  für  $m > 0$  nichtnegative gerade Zahlen sind. In [15] wird gezeigt, dass für große  $k$  ( $k > 20500$ ) der Koeffizient  $a_{2l+4}$  von  $f_{1,k}$  negativ wird. In Dimensionen  $\geq 41000$  gibt es also keine extremalen geraden unimodularen Gitter mehr. Jedoch ist schon in Dimension 72 die Exis-

tenz eines extremalen Gitters ein immer noch offenes Problem. Mit derselben Technik zeigt [34, Theorem 2.0.1] das analoge Resultat für  $N > 1$ . Es gibt also für festes  $N \in \mathcal{A}$  nur endlich viele extremale gerade stark  $N$ -modulare Gitter.

Da die Definition der Extremalität nur die Theta-Reihen der Gitter benutzt, gelten die Schranken an die Minima auch für „formal“ stark  $N$ -modulare Gitter, also solche Gitter, deren Theta-Reihe gleich der Theta-Reihe aller partiellen dualen Gitter ist.

Die Dimension  $2k_N$ , also die erste Dimension, in der ein extremales gerades stark  $N$ -modulares Gitter Minimum 4 hat, ist besonders bemerkenswert. Es gibt nämlich je genau ein extremales stark  $N$ -modulares Gitter  $E^{(N)}$  der Dimension  $2k_N$ . Für  $N = 1$  ist dieses Gitter das Leech Gitter  $\Lambda_{24}$ . Eine einheitliche Konstruktion dieser extremalen Gitter ist in [32] gegeben: Die Zahlen  $N$  sind Elementordnungen in der Mathieu Gruppe  $M_{23} \leq \text{Aut}(\Lambda_{24})$ , die auf dem Leech Gitter als Automorphismen operiert. Dann ist  $E^{(N)}$  das Fixgitter in  $\Lambda_{24}$  eines Elements der Ordnung  $N$  in  $M_{23}$ .

Die Vielfachen von  $2k_N$  heißen Sprungdimensionen für die stark  $N$ -modularen Gitter. Extremale Gitter in diesen Dimensionen sind von besonderem Interesse, da sie meist sehr dicht sind. In der Regel gibt es in diesen Dimensionen nur sehr wenige extremale Gitter, so kennt man z. B. nur 4 extremale gerade unimodulare Gitter in Sprungdimensionen (siehe folgende Tabelle).

**Ausgewählte extremale Gitter<sup>1</sup>**

Stufe	dim	min	Anzahl	Gitter
N=1	8	2	1	$E_8$
	16	2	2	$E_8 \perp E_8, D_{16}^+$
	24	4	1	$\Lambda_{24}$ (Leech)
	32	4	$\geq 10$ Millionen	[12]
	48	6	$\geq 3$	$P_{48p}, P_{48q}$ [6, p. 195], $P_{48n}$ [20]
	72	8	?	
	80	8	$\geq 2$	$L_{80}, M_{80}$ [3]
N=2	4	2	1	$D_4$
	8	2	1	$D_4 \perp D_4$
	12	2	3	[33]
	16	4	1	[35] $BW_{16}$ [5]
	20	4	3	[4] $[(SU_5(2) \circ SL_2(3)).2]_{20}, [2.M_{12}.2]_{20}$ [23] $HS_{20}^2$
	32	6	$\geq 4$	$Q_{32}$ [28], $Q'_{32}$ [27], $B_{32}$ [1] $CQ_{32}$ [20, Theorem 5.1]
	48	8	$\geq 2$	[2, Theorem 6.7]

### Anmerkungen

- 1 Eine ausführliche und ständig aktualisierte Version der Tabelle (Seite 133) und aller vorkommenden Gitter findet man unter [24].
- 2 R. Scharlau, B. Hemkemeier durch Suche im Nachbarschaftsgraph.

Stufe	dim	min	Anzahl	Gitter
N=3	2	2	1	$A_2$
	12	4	1 [36]	$K_{12}$ (Coxeter-Todd)
	14	4	$\geq 1$	$[\pm G_2(3)]_{14}$ [13]
	24	6	$\geq 1$	$[SL_2(13) \circ SL_2(3)]_{24}$ [17]
	26	6	$\geq 1$	$[(\pm S_6(3) \times C_3).2]_{26}$ [18]
	36	8	?	
	40	8	$\geq 1$	$L_{40}$ [3]
	64	12	$\geq 1$	$(p^3)L_{8,2} \otimes_{\infty,3} L_{32,2}$ [20, Remark 5.2], [21, Prop. 4.3]
N=5	8	4	1	$H_4$ [38]
	16	6	1 [4]	$[2.Alt_{10}]_{16}$ [23]
	24	8	$\geq 1$	$[2.J_2 \circ SL_2(5).2]_{24}$ [40]
N=6	8	4	1	$A_2 \otimes D_4$
	16	6	$\geq 1$	$[((Sp_4(3) \circ C_3) \otimes_{\sqrt{-3}} SL_2(3)).2]_{16}$ [23]
	24	8	$\geq 2$	$[(SL_2(3) \circ C_4).2 \otimes_{\sqrt{-1}} U_3(3)]_{24}$ $[(6.L_3(4).2 \otimes D_8).2]_{24}$ [17]
N=7	6	4	1	$A_6^{(2)}$
	12	6	0 [33]	
	18	8	0 [4]	
N=11	4	4	1	
	8	6	1 [33]	[20, Theorem 5.1]
	12	8	0 [25]	
N=14	4	4	1	
	8	6	1 [34]	
	12	8	$\geq 1$	$[(L_2(7) \otimes D_8).2]_{12}$ [23]
N=15	4	4	1	
	8	6	2 [34]	
	12	8	$\geq 1$	$A_2 \otimes M_{6,2}$ [23]
	16	10	$\geq 1$	$[(SL_2(5) \otimes_{\infty,3} SL_2(9)).2]_{16}$ [23]

Die extremalen Gitter in obiger Tabelle wurden auf unterschiedliche Weisen gefunden und auch für den Beweis der Nichtexistenz extremaler Gitter gibt es verschiedene Methoden.

R. Scharlau und B. Hemkemeier ([33]) listen mit der Kneserschen Nachbarschaftsmethode alle Gitter in kleinen Geschlechtern auf und finden so die extremalen stark modularen Gitter in diesem Geschlecht oder zeigen deren Nichtexistenz. Viele extremale Gitter wurden von C. Bachoc mit Codes über Zahlkörpern oder Quaternionenalgebren konstruiert ([2], [1], [3]). Eine weitere reiche Quelle für extremale Gitter ist die Klassifikation der maximal endlichen rationalen (und quaternionialen) Matrixgruppen [23], [17], [18], [19] (siehe auch [20]). Die sicherlich interessanteste Methode ist aber eine gezielte Konstruktion oder ein Nichtexistenzbeweis mit Hilfe von Modulformen. In [25]

wird die Nichtexistenz gewisser extremaler Gitter mit Siegelschen Modulformen gezeigt. Das wichtigste Hilfsmittel sind jedoch Modulformen mit sphärischen Koeffizienten (siehe z. B. [4]). Diese Theorie erlaubt es auch zu zeigen, dass für gewisse  $N$  und  $k$  extremale stark  $N$ -modulare Gitter der Dimension  $2k$  lokale Maxima der Dichtefunktion  $\delta$  sind, wie in den folgenden beiden Abschnitten beschrieben wird.

## 7 Sphärische Designs und stark perfekte Gitter

In diesem Abschnitt wird auf neuere Entwicklungen in der Gittertheorie eingegangen, die hauptsächlich von B. Venkov initiiert wurden. Eine schöne Einführung ist die Ausarbeitung [41].

**Definition 7.1** Eine nicht leere endliche Teilmenge  $X$  der  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre  $S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x, x) = 1\}$  heißt (sphärisches)  $t$ -Design, falls der Mittelwert über  $X$  gleich dem  $O_n(\mathbf{R})$ -invarianten Integral ist

$$(*) \quad \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x)$$

für alle homogenen Polynome  $f \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]_k$  vom Grad  $k \leq t$ .

Auf der rechten Seite von  $(*)$  steht das  $O_n(\mathbf{R})$ -invariante Skalarprodukt von  $f$  mit der konstanten Funktion 1. Da die harmonischen Polynome

$$\text{Harm}_k(n) := \{f \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]_k \mid \Delta f = 0\}$$

(wo  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  der Laplace Operator ist) vom homogenen Grad  $k$  für  $k \geq 1$  senkrecht auf den konstanten Funktionen stehen, folgt leicht, dass  $X$  ein sphärisches  $t$ -Design ist, genau dann wenn

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \text{Harm}_k(n), 1 \leq k \leq t.$$

In der Anwendung auf Gitter, wird  $X$  aus allen Gittervektoren gegebener Länge  $a$  in  $L$  (einer sogenannten Schicht  $L_a \subset L$ ) bestehen,

$$X = L_a := \{x \in L \mid (x, x) = a\}$$

(reskaliert, so dass  $X \subset S^{n-1}$ ) meist sogar  $X = \text{Min}(L) = L_{\min(L)}$ . Diese Mengen  $X$  sind symmetrisch, d. h. mit  $x \in X$  liegt auch immer der negative Vektor  $-x$  in  $X$ . Insbesondere gilt automatisch  $\sum_{x \in X} f(x) = 0$  für alle homogenen Polynome  $f$  ungeraden Grades.

**Satz 7.2** ([41, Théorème 3.2]) Sei  $X \subset S^{n-1}$  endlich, symmetrisch, nicht leer. Dann ist  $X$  ein  $(2k+1)$ -Design  $\Leftrightarrow$

$$\sum_{x \in X} (\alpha, x)^{2k} = |X| \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{n(n+2) \cdots (n+2k-2)} (\alpha, \alpha)^k \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n.$$

Dabei genügt es vorauszusetzen, dass die linke Seite ein konstantes Vielfaches der  $k$ -ten Potenz der quadratischen Form ist. Die genaue Konstante ergibt sich dann durch Anwenden des Laplace Operators (nach  $\alpha$ ).

**Definition 7.3** Ein Gitter  $L$  heißt stark perfekt, falls  $\text{Min}(L)$  ein sphärisches 4-Design ist.

**Beispiel.** Ist  $L$  ein orthogonal unzerlegbares Wurzelgitter der Dimension  $n$ , so gilt für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^n$

$$\sum_{x \in L_2} (x, \alpha)^2 = 2h(\alpha, \alpha)$$

wo  $h = \frac{|L_2|}{n}$  die Coxeter Zahl ist (siehe z. B. [7, Proposition 1.6]). Irreduzible Wurzelsysteme bilden also 3-Designs.

Die einzigen stark perfekten Wurzelgitter sind  $A_1 = \mathbf{Z}$ ,  $A_2$ ,  $D_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  und  $E_8$  ([41, Théorème 5.7]). Dabei bilden nur die Wurzeln in  $E_8$  ein 7-Design.

Für die kürzesten Vektoren  $X := \text{Min}(L)$  eines stark perfekten Gitters  $L$  gilt also

$$(*)_4 \quad \sum_{x \in X} (\alpha, x)^4 = |X| m^2 \frac{1 \cdot 3}{n(n+2)} (\alpha, \alpha)^2 \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n$$

wo  $m := \min(L)$  gesetzt wird. Durch Anwenden des Laplace Operators  $\Delta$  auf  $(*)_4$  findet man

$$(*)_2 \quad \sum_{x \in X} (\alpha, x)^2 = |X| m \frac{1}{n} (\alpha, \alpha) \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n.$$

Setzt man  $\alpha \in L^*$  in diese beiden Gleichungen ein, so liefern sie kombinatorische Bedingungen an  $|X|$ ,  $\min(L)$  und  $\min(L^*)$ , mit deren Hilfe man in kleinen Dimensionen alle stark perfekten Gitter klassifizieren kann. Man kennt alle stark perfekten Gitter der Dimension  $\leq 11$ :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{Z}$	$A_2$	-	$D_4$	-	$E_6, E_6^*$	$E_7, E_7^*$	$E_8$	-	$K'_{10}, K''_{10}$	-

Die wichtigste Motivation, stark perfekte Gitter zu betrachten, ist der folgende Satz.

**Satz 7.4** Stark perfekte Gitter sind extrem, also lokale Maxima der Dichtefunktion.

**Beweis:** Sei  $L$  ein stark perfektes Gitter,  $X := \text{Min}(L)$  und  $m := \min(L)$ . Nach Satz 2.1 genügt es zu zeigen, dass  $L$  eutaktisch und perfekt ist. Mit  $(*)_2$  ergibt sich, dass  $L$  eutaktisch ist mit Eutaxiekoeffizienten  $\lambda_x = \frac{n}{m|X|}$  für alle  $x \in X$ . Es ist nämlich für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^n$

$$\alpha I_n \alpha^{tr} = (\alpha, \alpha) (*)_2 \frac{n}{m|X|} \sum_{x \in X} (\alpha, x)^2 = \frac{n}{m|X|} \sum_{x \in X} \alpha x^{tr} x \alpha^{tr}$$

woraus die Gleichung für die Eutaxie folgt. Perfektion zeigt man mit Hilfe der Gleichung  $(*)_4$  (siehe [41, Théorème 6.4]). q.e.d.

**Satz 7.5** Sei  $L$  ein stark perfektes Gitter. Dann ist

$$\min(L) \min(L^*) \geq \frac{n+2}{3}.$$

**Beweis:** Sei  $\alpha \in \text{Min}(L^*)$ ,  $(\alpha, \alpha) =: m' = \min(L^*)$ . Dann liefert

$$(\star_4) - (\star_2) : \sum_{x \in X} (x, \alpha)^2 ((x, \alpha)^2 - 1) = \frac{|X|mm'}{n} (mm' \frac{3}{n+2} - 1).$$

Da  $(x, \alpha) \in \mathbf{Z}$  ist, ist die linke Seite eine nichtnegative Zahl, also auch die rechte Seite, woraus die Behauptung folgt. q.e.d.

**Ein Beispiel: Das Thompson-Smith Gitter.**

Häufig kann man die Kenntnis einer großen Untergruppe  $G \leq \text{Aut}(L)$  der Automorphismengruppe des Gitters  $L$  benutzen, um zu zeigen, dass  $L$  stark perfekt ist. Die linke Seite von  $(\star_4)$  ist nämlich ein  $G$ -invariantes homogenes Polynom (in  $\alpha$ ) vom Grad 4. Hat  $G$  keine anderen Invarianten von Grad 4 als das Quadrat der invarianten quadratischen Form, dann ist die linke Seite von  $(\star_4)$  ein Vielfaches von  $(\alpha, \alpha)^2$  und damit nach Satz 7.4 das Gitter  $L$  stark perfekt. Nimmt man an, dass  $-I_n \in G$  ist, so gilt sogar, dass alle  $G$ -Bahnen (und damit auch alle nicht leeren Schichten  $L_a$  von  $L$ ) sphärische 5-Designs sind. Die Bedingung an die Invarianten vom Grad 4 von  $G$  kann man leicht mit der Charaktertafel von  $G$  nachprüfen. Sie ist z. B. für die 248-dimensionale Darstellung der sporadisch einfachen Thompson Gruppe  $Th$  erfüllt.  $\langle -I_n \rangle \times Th$  ist Automorphismengruppe eines (eindeutig bestimmten) geraden unimodularen Gitters, dem Thompson-Smith Gitter  $\Lambda_{248}$ , der Dimension 248. Dieses Gitter  $\Lambda_{248}$  ist demnach stark perfekt also ein lokales Maximum der Dichtefunktion. Aus Satz 7.5 folgert man, dass

$$\min(\Lambda_{248}) \geq \sqrt{\frac{248+2}{3}} > 9$$

also  $\min(\Lambda_{248}) \geq 10$  ist. Diese Informationen erhält man durch reine Charakterrechnung, ohne die Darstellung der Thompson Gruppe oder das Gitter  $\Lambda_{248}$  explizit zu konstruieren. Durch explizite Konstruktion der 248-dimensionalen Darstellung findet man einen Vektor der Länge 12 in  $\Lambda_{248}$  (in einem 1-dimensionalen invarianten Teilraum der maximalen Untergruppe  $(C_3 \times G_2(3)) : 2$ ). Jedoch ist immer noch offen, ob  $\min(\Lambda_{248})$  nun 10 oder 12 ist.

## 8 Theta-Reihen mit harmonischen Koeffizienten

Mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann man zeigen, dass gewisse extremale Gitter stark perfekt und damit extrem sind. Insbesondere sind alle extremalen geraden unimodularen Gitter in den Sprungdimensionen  $24l$  und in den Dimensionen  $24l + 8$  stark perfekt. In Dimension 32 gibt es also mehr als 10 Millionen stark perfekte gerade unimodulare Gitter:

Für ein harmonisches Polynom  $P \in \text{Harm}_t(2k)$  und ein gerades Gitter  $L$  von Stufe  $N$  der Dimension  $2k$  ist die Theta-Reihe von  $L$  mit harmonischen Koeffizienten  $P$

$$\theta_{L,P} := \sum_{x \in L} P(x)q^{(x,x)}$$

eine Modulform vom Gewicht  $k + t$  zur Gruppe  $\Gamma_0(N)$  mit dem Charakter  $\chi_k$  (siehe z. B. [7], [16]). Ist  $t > 0$ , so ist  $\theta_{L,P}$  sogar eine Spitzenform. Die Operation von  $\Gamma_*(N)$  auf den Isometrieklassen von Gittern im Geschlecht von  $L$  übersetzt sich für Theta-Reihen wie folgt: Ist  $N$  eine Primzahl, so ist

$$\theta_{L,P} + \theta_{L(N),P} \in \mathcal{M}_{k+t}(\Gamma_*(N), \chi_{N,k})$$

und

$$\theta_{L,P} - \theta_{L(N),P} \in \mathcal{S}_{k+t}(\Gamma_*(N), \chi_{N,k+2})$$

(siehe [4, Theorem 2.1]). Für zusammengesetztes  $N$  muss man  $\pm 1$ -Linearkombinationen aller partiellen dualen Gitter betrachten. Durch Studium der entsprechenden Modulformen für  $\Gamma_*(N)$  läßt sich zeigen, dass für kleine Grade  $t \geq 1$  und extremale stark  $N$ -modulare Gitter  $L$  beide Summen

$$\theta_{L,P} \pm \theta_{L(N),P} = 0$$

sind, also auch  $\theta_{L,P} = 0$ . Somit bilden alle Schichten  $L_a$  von  $L$  sphärische  $t$ -Designs. Genauer findet man

**Satz 8.1** ([4, Corollary 3.1]) *Sei  $L$  ein extremales  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ . Dann bilden die Schichten von  $L$  sphärische  $t$ -Designs, gemäß der folgenden Tabelle:*

$N$	1	1	2	2	3	3
$k$	0 mod 12	4 mod 12	0 mod 8	2 mod 8	0 mod 6	1 mod 6
$t$	11	7	7	5	5	5

*Insbesondere ist  $L$  in all diesen Fällen ein stark perfektes Gitter.*

**Beweis:** (für  $N = 1$ ). Sei  $L$  ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension  $2k$  und  $P \in \text{Harm}_t(2k)$  ein harmonisches Polynom vom Grad  $t \geq 1$ . Dann ist  $\min(L) = 2(1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor) =: 2m$  und

$$\theta_{L,P} = \sum_{j=m}^{\infty} \left( \sum_{x \in L_{2j}} P(x) \right) q^{2j} \in \mathcal{S}_{k+t}(\text{SL}_2(\mathbf{Z})).$$

Das Ideal der Spitzenformen

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k(\text{SL}_2(\mathbf{Z})) = \Delta \mathbf{C}[E_4, E_6]$$

für  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$  ist ein Hauptideal in dem Polynomring in  $E_4 = \theta_{E_8}$  (vom Gewicht 4) und  $E_6$  (vom Gewicht 6) erzeugt von der Spitzenform  $\Delta = \Delta_1$  (vom Gewicht 12). Da  $\Delta$  mit  $q^2$  beginnt, ist die mit  $q^{2m}$  beginnende homogene Modulform  $\theta_{L,P}$  durch  $\Delta^m$  teilbar. Das

Gewicht von  $\Delta^m$  ist aber  $12m = 12 + 12\lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ . Ist also  $k \equiv 0 \pmod{12}$ , so ist  $\theta_{L,P} = 0$ , falls  $t \leq 11$  ist und für  $k \equiv 4 \pmod{12}$  ist  $\theta_{L,P} = 0$ , falls  $t \leq 7$  ist. Damit sind alle Schichten von  $L$  sphärische 11- bzw. 7-Designs. q.e.d.

Insbesondere liefern also die kürzesten Vektoren des Leech Gitters ein 11-Design der Kardinalität 196560 auf  $S^{23}$ . Dies ist das einzige symmetrische 11-Design mit  $\leq 196560$  Punkten in Dimension 24 ([41, Théorème 14.2]).

## 9 Ungerade Gitter und deren Schatten

Bisher haben wir nur gerade Gitter  $L$  betrachtet. Extremalität kann man auch für ungerade Gitter  $L$  definieren, wobei man beachten muss, dass  $L$  nicht nur alle partiellen dualen Gitter festlegt, sondern auch sein gerades Teilgitter

$$L_g := \{x \in L \mid (x, x) \in 2\mathbf{Z}\}$$

und dessen duales Gitter.  $L_g$  ist der Kern der linearen Abbildung  $L \rightarrow \mathbf{F}_2, x \mapsto (x, x) + 2\mathbf{Z}$ , hat also Index 2 in  $L$ , falls  $L$  ein ungerades Gitter ist. Die Theta-Reihe des geraden Teilgitters ist

$$\theta_{L_g}(z) = \frac{1}{2}(\theta_L(z) + \theta_L(z+1)).$$

**Definition 9.1** *Der Schatten eines ungeraden Gitters  $L$  ist*

$$S(L) := L_g^* - L^*.$$

Ist  $L$  gerade, so setzt man  $S(L) = L^*$ .

Der Schatten eines Gitters  $L$  ist eine Restklasse nach  $L^*$ . Er besteht aus den Vektoren  $\frac{v}{2}$ , wo  $v$  die charakteristischen Vektoren von  $L$  durchläuft, also  $(v, x) \equiv (x, x) \pmod{2}$  für alle  $x \in L$ . Mit der Theta-Transformationsformel ergibt sich die Theta-Reihe von  $S(L)$  als

$$\theta_{S(L)}(z) = \sqrt{\det(L)} \left(\frac{i}{z}\right)^k \theta_L\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

Die Theta-Reihe eines ungeraden Gitters ist eine Modulform für eine kleinere Gruppe als für die entsprechenden geraden Gitter. Daher liefert die Modulformenbedingung für die Theta-Reihe alleine weniger scharfe Schranken als für gerade Gitter. Als Ausgleich kann man aber auch noch die Theta-Reihe des Schattens betrachten, mit deren Hilfe man für dieselben Stufen  $N \in \mathcal{A}$  Extremalität definieren kann. Damit erhält man dieselben Schranken wie für gerade Gitter. Genauer gilt

**Satz 9.2** ([32, Theorem 1,2]) *Sei  $N \in \mathcal{A}$  und*

$$C_N := \perp_{d|N} \sqrt{d}\mathbf{Z}$$

*ein stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $\sigma_0(N)$ . Ist  $L$  ein stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ , welches rational äquivalent ist zu einer orthogonalen Summe von Kopien von  $C_N$ , so gilt*



$$\min(L) \leq 2 \lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor + 2,$$

mit der Ausnahme  $k = k_N - \frac{1}{2}\sigma_0(N)$ , wo die Schranke 3 ist.

In Dimension  $2k_N - \sigma_0(N)$  gibt es genau ein stark  $N$ -modulares Gitter  $S^{(N)}$  von Minimum 3, die „shorter version“ des entsprechenden extremalen Gitters  $E^{(N)}$  der Dimension  $2k_N$ .

**Gitter mit langem Schatten.**

Anstatt modulare Gitter mit großem Minimum zu suchen, kann man auch nach solchen (ungeraden) Gittern  $L$  fragen, für die die minimale Länge eines charakteristischen Vektors (also die minimale Länge eines Vektors in  $S(L)$ ) möglichst groß ist. Dies hat zwar für die Anwendung in der Informationsübertragung keine Bedeutung, da der minimale Abstand von zwei Vektoren des Schattens gleich  $\min(L^*)$  ist, ist aber theoretisch von Interesse. Initiiert wurde diese Frage von N.D. Elkies ([9], [10]), der gezeigt hat, dass das Standardgitter  $\mathbf{Z}^n$ , das einzige unimodulare Gitter der Dimension  $n$  mit maximalem Schatten ( $\min\{(v, v) \mid v \in S(\mathbf{Z}^n)\} = n/4$ ) ist. Mit Hilfe der in [32] angegebenen Formeln läßt sich dies leicht auf die stark  $N$ -modularen Gitter in Satz 9.2 verallgemeinern, wobei hier  $C_N$  dieselbe Rolle spielt wie  $\mathbf{Z}$  im Fall von  $N = 1$ . Ist  $L$  nämlich ein stark  $N$ -modulares Gitter mit  $\min(L) = 1$ , so hat  $L$  einen orthogonalen Summanden  $C_N$ . Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden  $N$  als ungerade an.

**Satz 9.3** ([9], [10] für  $N = 1$ , [22]) Sei  $N \in \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 23\}$  und  $L$  ein stark  $N$ -modulares Gitter welches rational äquivalent ist zu  $C_N^l$ . Dann gilt

$$\min_0(S(L)) := \min\{(v, v) \mid v \in S(L)\} = \frac{l\sigma_1(N) - 8m}{4N} =: M^{(N)}(l, m)$$

für ein  $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$

Ist  $m = 0$ , so ist  $L = C_N^l$ .

Ist  $m = 1$ , so ist  $L = C_N^{l_1} \perp M$  mit einem stark  $N$ -modularen Gitter  $M$  von Minimum  $> 1$  und mit  $\min_0(S(M)) = M^{(N)}(l - l_1, 1)$ . Die Dimension von  $M$  ist  $\leq 2k_N - \dim(C_N)$ .

**Beweis:** Aus den Formeln für die Theta-Reihe des Schattens in [32, Corollary 3] findet man die Formel  $M^{(N)}(l, m)$  für das mögliche Minimum der Schattenvektoren. Für  $m = 0$  ist die Theta-Reihe von  $L$  eindeutig bestimmt und gleich der von  $C_N^l$ . Die Vektoren der Länge 1 in  $L$  erzeugen ein unimodulares Teilgitter  $\cong \mathbf{Z}^l$ , welches als orthogonaler Summand von  $L$  abspaltet

$$L = \mathbf{Z}^l \perp M.$$

Durch partielles Dualisieren findet man, dass  $L$  für alle exakten Teiler  $m$  von  $N$  einen orthogonalen Summanden  $\sqrt{m}\mathbf{Z}^l$  hat. Also ist  $L \cong C_N^l$ .

Für  $m = 1$  kann man nach Abspalten von orthogonalen Summanden  $C_N$  annehmen, dass  $\min(L) \geq 2$  ist. Dann ist wieder die Theta-Reihe von  $L$  eindeutig bestimmt. Die Anzahl der Vektoren der Norm 2 in  $L$  ist  $2l(\frac{24}{\sigma_1(N)} - l - 1)$  wodurch man die Schranke an  $l$  erhält. Ist  $l = \frac{24}{\sigma_1(N)} - 1$ , so ist  $\min(L) = 3$  und  $L = S^{(N)}$ , das „Shorter“ Gitter aus [32, Tabelle 1].

q.e.d.

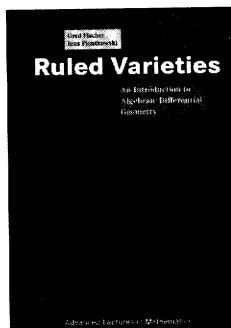
Es ist ein offenes Problem, ob für jedes  $m$ , die Dimension eines stark  $N$ -modularen Gitters  $L$  wie in Satz 22 mit  $\min(L) \geq 2$  und  $\min_0(S(L)) \geq M^{(N)}(\dim(L)/\dim(C_N), m)$  nach oben beschränkt werden kann. Für  $m = 0, 1$  liefert Satz 22 scharfe Schranken. Für  $N = 1$  hat Gaulter [11] solche (nicht scharfen) Schranken für  $m = 2$  und 3 angegeben.

## Literatur

- [1] *C. Bachoc*: Voisinage au sens de Kneser pour les réseaux quaternioniens. *Comment. Math. Helvetici* **70** (1995), 350–374.
- [2] *C. Bachoc*: Applications of coding theory to the construction of modular lattices. *J. Comb. Th. Ser. A* **78** (1997), 92–119.
- [3] *C. Bachoc, G. Nebe*: Extremal lattices of minimum 8 related to the Mathieu group  $M_{22}$ . *J. reine angew. Math.* **494** (1998), 155–171.
- [4] *C. Bachoc, B. Venkov*: Modular forms, lattices and spherical designs. In [14], 87–112.
- [5] *E.S. Barnes, G.E. Wall*: Some extreme forms defined in terms of abelian groups. *J. Austral. Math. Soc.* **1** (1959), 47–63.
- [6] *J. H. Conway, N. J. A. Sloane*: Sphere packings, lattices and groups. Springer, 3. Auflage (1998).
- [7] *W. Ebeling*: Lattices and codes. Vieweg (1994).
- [8] *M. Eichler*: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Springer Grundlehren **63**, 2. Auflage (1974).
- [9] *N.D. Elkies*: A characterization of the  $\mathbb{Z}^n$  lattice. *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 3, 321–326.
- [10] *N.D. Elkies*: Lattices and codes with long shadows. *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 5, 643–651
- [11] *M. Gaulter*: Lattices without short characteristic vectors. *Math. Res. Lett.* **5** (1998), no. 3, 353–362.
- [12] *O. King*: A mass formula for unimodular lattices with no roots. *Mathematics of Computation*, (to appear)
- [13] *A.I. Kostrikin, I.A. Kostrikin, V.A. Ufnarovskii*: Invariant lattices of type  $G_2$  and their automorphism groups. *Proc. Steklov Inst. Math.* **3** (1985), 85–105.
- [14] *J. Martinet*: (Herausgeber) Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires. *L'Ens. Math. Monographie* **37** (2001).
- [15] *C. L. Mallows, A. M. Odlysko, N. J. A. Sloane*: Upper bounds for modular forms, lattices and codes. *J. Alg.* **36** (1975), 68–76.
- [16] *T. Miyake*: Modular Forms. Springer (1989).
- [17] *G. Nebe*: Endliche rationale Matrixgruppen vom Grad 24. Dissertation, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachener Beiträge zur Mathematik **12** (1995). Englische Kurzfassung: Finite subgroups of  $GL_{24}(\mathbb{Q})$ . *Exp. Math.* **5** (3) (1996), 163–195.
- [18] *G. Nebe*: Finite subgroups of  $GL_n(\mathbb{Q})$  for  $25 \leq n \leq 31$ . *Comm. Alg.* **24** (7), (1996), 2341–2397.
- [19] *G. Nebe*: Finite quaternionic matrix groups. *Representation Theory* **2**, (1998), 106–223.
- [20] *G. Nebe*: Some cyclo-quaternionic lattices. *J. Alg.* **199** (1998), 472–498.
- [21] *G. Nebe*: Construction and investigation of lattices with matrix groups. in *Integral Quadratic Forms and Lattices*, herausgegeben von Myung-Hwan Kim, John S. Hsia, Y. Kitaoka, R. Schulze-Pillot, *Contemporary Mathematics* **249** (1999), 205–220.
- [22] *G. Nebe*: Strongly modular lattices with long shadow. (Preprint 2002)
- [23] *G. Nebe, W. Plesken*: Finite rational matrix groups. *AMS Memoirs* **116** (556) (1995).
- [24] *G. Nebe, N.J.A. Sloane*: A database of lattices. Internetsammlung unter [www.research.att.com/~njas/lattices](http://www.research.att.com/~njas/lattices)
- [25] *G. Nebe, B. Venkov*: Non-existence of extremal lattices in certain genera of modular lattices. *J. Number Theory*, **60** (2) (1996), 310–317.

- [26] *G. Nebe, B. Venkov*: On Siegel modular forms of weight 12. *J. reine und angew. Mathematik* **531** (2001), 49–60.
- [27] *H.-G. Quebbemann*: A construction of integral lattices. *Mathematika* **31** (1984), 137–140.
- [28] *H.-G. Quebbemann*: Lattices with Theta Functions for  $G(\sqrt{2})$  and Linear Codes. *J. Algebra* **105** (1987), 443–450.
- [29] *H.-G. Quebbemann*: Modular lattices in euclidean spaces. *J. Number Th.* **54** (1995), 190–202.
- [30] *H.-G. Quebbemann*: Atkin-Lehner eigenforms and strongly modular lattices. *L'Ens. Math.* **43** (1997), 55–65.
- [31] *M. Pohst, H. Zassenhaus*: Algorithmic algebraic number theory. Cambridge University Press (1989).
- [32] *E.M. Rains, N.J.A. Sloane*: The shadow theory of modular and unimodular lattices. *J. Number Th.* **73** (1998), 359–389.
- [33] *R. Scharlau, B. Hemkemeier*: Classification of integral lattices with large class number. *Math. Comp.* **67** (1998), 737–749.
- [34] *R. Scharlau, R. Schulze-Pillot*: Extremal lattices. In *Algorithmic algebra and number theory*. Herausgegeben von B. H. Matzat, G. M. Greuel, G. Hiss. Springer (1999), 139–170. Preprint erhältlich unter [www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html](http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html)
- [35] *R. Scharlau, B. Venkov*: The genus of the Barnes-Wall lattice. *Comm. Math. Helvetici* **69** (1994), 322–333.
- [36] *R. Scharlau, B. Venkov*: The genus of the Coxeter-Todd lattice. Preprint 95-7 erhältlich unter [www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html](http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html)
- [37] *J. P. Serre*: A course in arithmetic. Springer GTM **7** (1973).
- [38] *G.C. Shephard, J.A. Todd*: Finite unitary reflection groups. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 274–304.
- [39] *C.L. Siegel*: Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **10** (1969), 87–102.
- [40] *J. Tits*: Quaternions over  $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ , Leech's lattice and the sporadic group of Hall-Janko. *J. Alg.* **63** (1980), 56–75.
- [41] *B. Venkov*: Réseaux et designs sphériques. In [14] 10–86.
- [42] *G. Voronoi*: Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques: 1. Sur quelques propriétés des formes quadratiques parfaites. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908) 97–178.





G. Fischer,  
J. Piontowski  
**Ruled Varieties**  
An Introduction to  
Algebraic Differential  
Geometry

Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg, 2001,  
142 S., EUR 34,-

One of the challenges of projective algebraic geometry is to prove by algebraic methods results from differential geometry; and when this challenge is tested on the class of ruled varieties we are doing algebraic differential geometry, or projective differential geometry. This is precisely the topic of this book. The simplest examples of ruled varieties are the ruled surfaces, those swept by a line moving in space. There is a reach classical and modern literature on algebraic differential geometry, but very few books on this topic. A classical one is [FC], and the book under review is the first published after many years. It aims at giving an elementary and almost self contained treatment of the main results on ruled varieties using complex projective methods; it uses as a guideline the paper [GH] with the declared purpose of making parts of it more accessible. After a chapter introducing basic notions in a down to earth fashion, it treats grassmannians in an elementary and careful way, without omitting to discuss their differential properties in detail. The central and longest chapter of the book is devoted to ruled varieties. It starts with basic examples like joins and gradually introduces dual varieties, developable varieties, the Gauss map, the second fundamental form. All these notions are smoothly illustrated by examples along the way. The style is sometimes computational, but always clear. The last chapter is more advanced: it

treats tangent and secant varieties, including the celebrated Zak's theorem. Here the style is slightly more sophisticated, and not everything is proved: the proof of Zak's theorem relies on Fulton-Hansen connectedness theorem whose proof is only outlined.

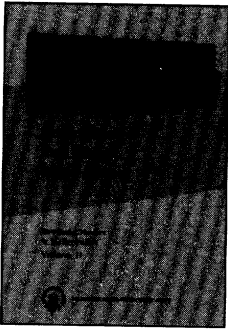
The book is well written and special efforts are devoted to making it depend only on the first two chapters of [S] for the basic results of algebraic geometry. The only non-elementary notion used occasionally is that of holomorphic function in several variables. Its chapters 0,1 and 2 might be coupled with parts of the first two chapters of [S] to make a first course in projective algebraic geometry, well balanced between modern language and classical material. The book is easy to read despite the density of the topics covered in less than 140 pages.

## Bibliography

- [FC] Fubini G., Cech E.: *Introduction a la Géométrie Projective Différentielle des Surfaces*, Gauthiers-Villars, Paris 1931.  
[GH] Griffiths Ph., Harris J.: *Algebraic Geometry and Local Differential geometry*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (4) 12 (1979), 355–432.  
[S] Shafarevich I.R.: *Basic Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

Roma

E. Sernesi



D. Burago, Y. Burago,  
S. Ivanov  
**A Course in Metric  
Geometry**  
Grad. Studies in  
Math. 33

Providence, American Math. Soc., 2001,  
415 S., \$ 44,-

Das vorliegende Buch ist keine Monographie, sondern ein Lehrbuch. Dies betonen die Autoren gleich zu Anfang. Die Voraussetzungen an das mathematische Vorwissen des Lesers sind gering. Natürlich gilt dies, wie üblich, nur in einem formalen Sinn. So beginnen die Autoren im ersten Kapitel mit der Definition des metrischen Raumes und einigen weiteren elementaren Konzepten und Beispielen, nach gut zwanzig Seiten sind sie aber schon bei den Hausdorff-Maßen und dem Überdeckungssatz von Vitali angelangt. Mit anderen Worten: Ein erfolgreich absolviertes mathematisches Grundstudium ist sicher eine gute Basis, wenn man sich an die Lektüre dieses Buches gebitt.

Thema des Buches sind geodätische Räume und Krümmungsschranken. Wir nennen einen metrischen Raum  $(X, d)$  einen *Längenraum* und  $d$  eine *Längenmetrik*, wenn

$$d(x, y) = \inf\{L(c) \mid c \text{ ist stetige Kurve} \\ \text{von } x \text{ nach } y\}. \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet  $L(c)$  die Länge der Kurve  $c$ .<sup>1</sup> Die übliche Distanzfunktion auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist eine Längenmetrik. Eine beliebige Metrik  $d$  induziert über die rechte Seite von (1) eine Längenmetrik auf  $X$ . Diese wird im allgemeinen Fall aber ziemlich entartet sein.

Eine Kurve  $c : I \rightarrow X$  nennen wir eine (nach der Bogenlänge parametrisierte) Geo-

dätische, falls es zu jedem  $t \in I$  ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass

$$d(c(r), c(s)) = |r - s| \quad \text{für alle} \\ r, s \in (t - \epsilon, t + \epsilon) \cap I. \quad (2)$$

Wir nennen eine Geodätische  $c : I \rightarrow X$  minimal, falls (2) für alle  $r, s \in I$  gilt. Wir nennen  $X$  einen *geodätischen Raum*, wenn es zu allen Punkten  $x, y \in X$  eine minimale Geodätische von  $x$  nach  $y$  gibt. Nach dem Satz von Hopf und Rinow sind zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten geodätisch. Interessant sind auch stückweise glatte Riemannsche Metriken auf simplizialen Komplexen. Falls der simpliziale Komplex endlich ist oder, allgemeiner, die Riemannschen Metriken auf den Simplizes des Komplexes uniform beschränkt sind, dann ist die induzierte Längenmetrik geodätisch.

Für  $\kappa \in \mathbb{R}$  sei  $M_\kappa^n$  der  $n$ -dimensionale Modellraum konstanter Krümmung  $\kappa$ . Mit anderen Worten,  $M_\kappa^n$  ist die Sphäre vom Radius  $1/\sqrt{\kappa}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  für  $\kappa > 0$ , der  $n$ -dimensionale Euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  für  $\kappa = 0$  und der  $n$ -dimensionale hyperbolische Raum der Krümmung  $\kappa$  für  $\kappa < 0$ .

Sei nun  $X$  ein geodätischer Raum. Ein *geodätisches Dreieck*  $abc$  in  $X$  besteht aus drei minimalen geodätischen Segmenten  $a, b, c$ , deren Endpunkte sich in der üblichen Weise treffen. Sei  $abc$  ein geodätisches Dreieck in  $X$  und  $\kappa \in \mathbb{R}$ .<sup>2</sup>

Ein geodätisches Dreieck  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  in  $M_\kappa^2$  mit den gleichen Seitenlängen nennen wir dann ein *Vergleichsdreieck* zu  $abc$ . Je zwei solche Vergleichsdreiecke in  $M_\kappa^2$  sind kongruent. Wir sagen, dass die *Krümmung von  $X$*  nach unten durch  $\kappa$  beschränkt ist, falls für jedes geodätische Dreieck  $abc$  in  $X$  und jedes Vergleichsdreieck  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  in  $M_\kappa^2$

$$d(p, q) \geq d(\bar{p}, \bar{q}) \quad (3)$$

ist für alle Punkte  $p, q$  auf  $abc$ . Hierbei bezeichnen  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  die Punkte auf  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ , die  $p$  und  $q$  unter der Identifizierung von  $a$  mit  $\bar{a}$ ,  $b$  mit  $\bar{b}$  und  $c$  mit  $\bar{c}$  entsprechen.

Wir schreiben kurz  $K_X \geq \kappa$ , falls die Krümmung von  $X$  nach unten durch  $\kappa$  be-

schränkt ist. Irreführend an Sprechweise und Notation ist, dass die Krümmung von  $X$  nicht definiert wird, sondern nur die Ungleichung  $K_X \geq \kappa$ . Anscheinend lässt sich dieser Misstand nicht mehr beheben.

Analog definiert man untere Krümmungsschranken für  $X$ , indem man die Ungleichung (3) umkehrt,

$$d(p, q) \leq d(\bar{p}, \bar{q}). \quad (4)$$

Es gibt aber einen wichtigen Unterschied zwischen oberen und unteren Krümmungsschranken. Die Ungleichung (4) verlangen wir nur lokal, das heisst, wir verlangen, dass jeder Punkt von  $X$  eine Umgebung hat, so dass die Ungleichung (4) für alle geodätischen Dreiecke in dieser Umgebung erfüllt ist. Falls die Ungleichung für alle geodätischen Dreiecke in  $X$  gilt, dann nennen wir  $X$  auch einen CAT( $\kappa$ )-Raum. Diesen Namen hat sich Gromov ausgedacht.

Der Vergleichssatz von Alexandrov-Tononogov besagt, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann nach unten durch  $\kappa$  beschränkte Krümmung im Sinne von (3) hat, wenn  $\kappa$  untere Schranke für ihre Schnittkrümmung ist. Der entsprechende Vergleichssatz für obere Krümmungsschranken gilt nur lokal, dies reflektiert den oben erwähnten Unterschied in den Definitionen. Es bleibt aber dabei, dass obere Krümmungsschranken im Sinne von (4) genau den oberen Schranken für die Schnittkrümmung entsprechen.

Warum sollen wir uns mit diesen Objekten beschäftigen? Dafür gibt es unterschiedliche Gründe. Die unteren Krümmungsschranken sind stabil unter Gromov-Hausdorff-Limites. Die Punkte im Rande des (präkompakten) Modulraums aller  $n$ -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nach unten durch eine Konstante  $\kappa$  beschränkter Schnittkrümmung und uniform nach oben beschränktem Durchmesser sind deshalb geodätische Räume mit nach unten durch  $\kappa$  beschränkter Krümmung im Sinne von (3). Das kann man durchaus als einen der tieferen Gründe für die sogenannten Pinching-Sätze lesen.

Obere Krümmungsschranken sind nur dann unter Gromov-Hausdorff-Limites stabil, wenn man uniforme untere Schranken an den Injektivitätsradius fordert. Nach einem wohlbekannten Satz von Cheeger hat man solche Schranken für  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten, deren Schnittkrümmung in einem vorgegebenen Intervall  $[\kappa_b, \kappa_a]$  enthalten ist, in Abhängigkeit von oberen Schranken für den Durchmesser und unteren Schranken für das Volumen. Nach einem Satz von Nikolaev sind geodätische Räume, deren Krümmung im Sinne von (3) und (4) nach unten und oben beschränkt ist, im Inneren Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einer  $C^{1,\alpha}$ -Metrik.

Bei den oberen Krümmungsschranken kommen aber weitere sehr interessante Beispiele hinzu: Die kanonische Metrik auf sphärischen Tits-Gebäuden ist eine CAT(1)-Metrik, kanonische Metriken auf Euklidischen Gebäuden sind CAT(0). Deshalb spielen Methoden und Argumente aus der Riemannschen Geometrie bei Gebäuden eine wichtige Rolle. Ferner ist die Menge  $\partial X$  der idealen Punkte eines vollständigen, lokal-kompakten CAT(0)-Raumes  $X$  in einer von Gromov eingeführten natürlichen Metrik, der *Tits-Metrik*  $d_T$ , ein CAT(1)-Raum. Falls zum Beispiel  $X$  ein symmetrischer Raum vom nicht-kompakten Typ ist, so ist  $\partial X$  zusammen mit  $d_T$  ein sphärisches Gebäude. Hier scheinen Zusammenhänge zwischen Gebäuden, Riemannscher Geometrie und symmetrischen Räumen auf. Schöne Resultate von Leeb, Charney-Lytchak und anderen beleuchten diese Zusammenhänge aus verschiedenen Blickwinkeln.

Das vorliegende Buch von Burago, Burago und Ivanov ist eine Einführung in die Welt der geodätischen Räume mit beschränkter Krümmung. Zusätzlich diskutieren die Autoren auch die Grundlagen der Riemannschen Geometrie, Gromov-hyperbolische Räume, Gromov-Hausdorff-Konvergenz und andere verwandte Ideen und Konzepte.

Die Autoren gehören zur Sankt-Petersburger Schule von A.D. Alexandrov, einem

der Väter der synthetischen Definition der Krümmungsschranken im oben erläuterten Sinne.<sup>3</sup> Neuere Arbeiten zu Themen aus diesem Bereich basieren auf M. Gromovs mathematischen Ideen.

Das Buch ist gut lesbar. Dazu tragen auch die vielen elementaren Beispiele bei, die die Autoren dem Text beisteuern. Zur Orientierung die Kapitelüberschriften:

- (1) Metric Spaces
- (2) Length Spaces
- (3) Constructions
- (4) Spaces of Bounded Curvature
- (5) Smooth Length Structures
- (6) Curvature of Riemannian Metrics
- (7) Space of Metric Spaces
- (8) Large Scale Geometry
- (9) Spaces of Curvature Bounded Above
- (10) Spaces of Curvature Bounded Below

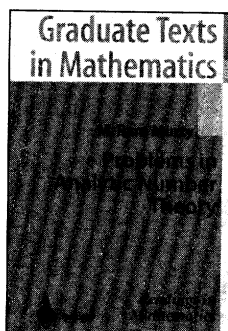
Wer immer sich intensiv mit Riemannscher Geometrie beschäftigt, kommt an diesem Buch nicht vorbei. Es ist bisher ohne Konkurrenz und füllt eine Marktlücke.

Bonn

W. Ballmann

## Anmerkungen

- 1 Längerräume heißen auch *innere metrische Räume*.
- 2 Im Falle  $\kappa > 0$  setzen wir immer stillschweigend voraus, dass der Umfang des Dreiecks  $< 2\pi/\sqrt{\kappa}$  ist.
- 3 Andere Väter sind A. Wald, der in seinen frühen Jahren dem Kreis um K. Menger angehörte, und H. Busemann.



M. R. Murty

**Problems in Analytic  
Number Theory**

Grad. Texts in Math. 206

Berlin u. a., Springer, 2001, 452 S.,  
EUR 54,95,-

Wie unterrichtet man Mathematik auf einem aktuellen Niveau am besten? Als ein in Deutschland arbeitender Brite habe ich mich oft mit dieser Frage beschäftigt, da die Ziele und Methoden, die ich hierzulande vorfinde, andere sind, als ich sie selbst vor 30 Jahren in Cambridge erfahren habe. In diesen Zeiten ist es genauso dringend, über Didaktik in den Hochschulen wie in den Schulen nachzudenken. Es ist oft so, dass viele Arbeitsgruppen in der reinen Mathematik relativ klein sind; die analytische Zahlentheorie ist ein Gebiet, wo man selten eine größere Anzahl von Diplomand(inn)en bzw. Doktorand(inn)en zusammen bekommen kann. Unter diesen Umständen kann Unterricht im Hörsaal bestenfalls dazu dienen, die Grundlagen zu legen und Hinweise zu geben, was es sonst zu lernen überhaupt gibt. Das wesentliche Lernen findet in Einzelarbeit oder gelegentlich in informellen Kleingruppen statt.

Das Buch von Ram Murty ist ein Buch über die Ausbildung von analytischen Zahlentheoretikern. Formal ist es etwa wie der Klassiker von Pólya und Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze in der Analysis* aus dem Jahr 1925 aufgebaut. Der erste Teil besteht aus einem Text, wo Teile der analytischen Zahlentheorie aufgebaut werden, wo aber vieles als Aufgaben für die Leserin / den Leser überlassen wird. Diese Aufgaben werden dann in dem zweiten Teil gelöst – oder die Lösungen



wenigstens skizziert. Diese Teile sind didaktisch aufgebaut; sie sind nicht intensive Problemsammlungen wie bei Pólya-Szegő oder das „Synopsis“ von G.S. Carr, das Ramanujan in die Mathematik gelockt hat. Der erste Teil macht knapp 40% des Buches aus.

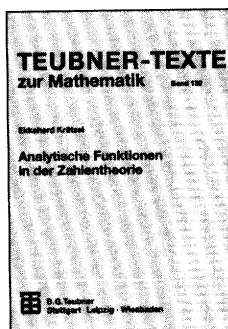
Die Stoffauswahl ist in 10 Kapitel gegliedert. Die ersten 7 Kapitel sind der klassischen multiplikativen Zahlentheorie (einschließlich der Weilschen expliziten Formel) gewidmet. Die restlichen 3 Kapitel behandeln in einer relativ knappen Art die Selberg-Klasse, Siebmethoden und die  $p$ -adische Analysis. Diese ergänzen das vorhergehenden Material, z. B. wird die  $p$ -adische Analysis eingeführt, um die  $p$ -adische Zetafunktion einzuführen. Von diesen letzten drei Kapiteln ist dasjenige über die Selbergsche Klasse am befriedigendsten, weil es hier möglich ist, in Vergleich zu den anderen beiden, in der Gesamtheorie weiter voran zu kommen. Aber auch hier bleibt es i. W. bei einer Kostprobe. Die Aufgaben zu der Siebtheorie sind gelegentlich sehr schwierig – z. B. Exercises 9.3.13 bzw. 9.3.14 sind der Brun-Titchmarshsche Satz bzw. das Titchmarshsche Teilerproblem, ohne deutliche Hinweise. Im Kapitel über die  $p$ -adischen Zahlen werden die üblichen Grundlagen bereitgestellt. Als Anwendung wird Mazurs Beweis der Kummer- und der Clausen-von Staudt-Kongruenzen gegeben. Die  $p$ -adische Zetafunktion wird lediglich eingeführt, ohne eine Andeutung ihrer Bedeutung.

Es geht auch schon aus der Beschreibung des Inhalts hervor, dass große Teile der analytischen Zahlentheorie unerwähnt bleiben. Auffallend ist das Fehlen der additiven Zahlentheorie, insbesondere der Hardy-Littlewoodschen Methode, die ebenfalls zum Basiswerkzeug gehört. Auch fehlt eine Andeutung zur Verbindung mit der algebraischen Zahlentheorie oder mit der Theorie der quadratischen Formen. Der Beweis der Sätze von Landau und Siegel über die „Siegel Nullstellen“ (eigentlich „Landau Nullstellen“) verwendet solche Ideen nicht und verliert dadurch einen erheblichen Teil seiner Schönheit.

Letztendlich, obwohl das Konzept dieses Buches für mich sehr erfreulich und überzeugend war, bleibe ich etwas enttäuscht über die Auswahl des Stoffes und die Durchführung. Der Inhalt des Buches wird erst dann richtig zur Geltung kommen können, wenn er entsprechend ergänzt wird.

Göttingen

S.-J. Patterson



E. Krätzel  
**Analytische  
Funktionen in der  
Zahlentheorie**

Stuttgart u. a. Teubner, 2000. 288 S.,  
EUR 46,-

Die analytische Zahlentheorie behandelt Fragen der Verteilung diverser Arten von natürlichen Zahlen oder zahlentheoretischen Funktionen. Wie man von der Analysis weiss, ist das geeigneteste Werkzeug für solche Fragen die Fourier-Analyse (oder die Funktionentheorie). Bei zahlentheoretischen Fragen führen solche Techniken zu Exponentialsummen, entweder vollständige Summen, die grundsätzlich arithmetisch sind, oder unvollständige Summen, die eher analytisch sind. Es kommt in der Regel darauf an, dass man diese Summen abschätzen kann. Es gibt jetzt eine Vielzahl von Techniken und Ergebnisse, die dem/der Zahlentheoretiker/in zu Verfügung stehen.

In diesem Buch setzt sich der Verfasser, der damals führende Mathematiker auf diesem Gebiet in der ehemaligen DDR, der bei der Vereinigung sehr ungerecht „abgewickelt“ wurde, mit zwei Fragenkomplexen auseinander. Der erste ist die Untersuchung

der höheren Theta- und Etafunktionen, der zweite das Abzählen von Gitterpunkten in konvexen Gebieten. Das erste Thema wurde bisher nicht sehr beachtet, wohl weil die ursprünglichen Ansätze von Hardy und Littlewood, die solche Ergebnisse für die Kreismethode benötigten, durch die wesentlich flexiblere Methode von Winogradow verdrängt wurden. Über das zweite Thema hingegen gibt es eine sehr umfangreiche Literatur, von der man insbesondere die Monografie von M. Huxley, „*Area, Lattice Points, and Exponential Sums*“, Oxford University Press, 1996 erwähnen muss, weil die beiden Bücher vieles gemeinsam haben.

Die beide Schwerpunkte werden im 3. bzw. 5. Kapitel behandelt. Im 1. und 4. Kapitel werden analytische Techniken (insbesondere die van der Corputsche Methode) für die Abschätzung von ein- bzw. zweidimensionalen Exponentialsummen untersucht. In diesen Kapiteln verwendet der Verfasser Methoden, die nicht übermäßig kompliziert sind, die jedoch zu sehr brauchbaren Ergebnissen führen. Der Preis der Eleganz der Behandlung ist, dass nicht immer die allerschärfsten Abschätzungen in Spezialfällen erzielt werden können – z. B. später bei der Behandlung des Kreisproblems bekommt der Autor keine Verbesserung über die Sierpinski'sche Abschätzung, obschon er in Satz 5.12 eine elegante *effektive* Abschätzung in diesem Fall gibt. Im zweiten Kapitel gibt Herr Krätzel eine elegante Darstellung der Theorie der quadratischen Gaußschen Summen.

Die Untersuchung der höheren Theta- und Etafunktionen wird analog zu der klassischen Theorie dieser Funktionen geführt. Die Theorie der Etafunktion führt entsprechend zu Abschätzungen für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als einer Summe von  $k$ -ten Potenzen. Die höheren Thetafunktionen dagegen liefern „asymptotische“ Formeln für gewichtete Gaußsche Summen. Da die Asymptotik von kubischen Gaußschen Summen erst kürzlich verstanden wurde, und die von höheren Gaußschen Summen lediglich Gegenstand von Vermutungen

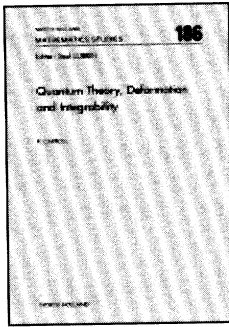
ist, sind diese Ergebnisse, die in einer etwas anderen Richtung zielen, von erheblichem Interesse.

Die Untersuchungen über Gitterpunkte stellen eine Entwicklung aus dem bekannten Gaußschen Kreisproblem dar. Wir betrachten ein konvexes Gebiet  $B$  in  $\mathbb{R}^n$  und, für großes  $R$  die Anzahl der Elemente von  $RB \cap \mathbb{Z}^n$ ; die Anzahl ist nach einem elementaren Argument  $\text{Vol}(RB) + \mathcal{O}(R^{n-1})$ . Das Fehlerglied ist in der Regel kleiner, gelegentlich viel kleiner; es ist aber nur in den wenigsten Fällen möglich, seine Größenordnung genau zu bestimmen. Wenn man konvexe Gebiete betrachtet, dann kann man in jenen Fällen bessere Abschätzungen erzielen, wenn auf dem Rand alle zweidimensionalen Komponenten der Gaußschen Krümmung nicht verschwinden. In dem Fall, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist, ist die Lage viel komplizierter. Der Verfasser beweist einige recht tief liegende Ergebnisse über diese Problematik. Seine Ausführungen sind nicht so ausschöpfend, wie im oben genannten Buch von Huxley. Er zeigt dagegen, was man mit relativ schlichten, klaren Argumenten machen kann, ohne sich auf das schwierige Feld von Abschätzungen Winogradowcher Art begeben zu müssen.

In diesem Buch wird ein interessanter, aber oft als schwierig empfundener Teil der Mathematik klar und anschaulich dargestellt. Es soll für angehende Mathematiker und Mathematikerinnen gleichzeitig eine hilfreiche Einführung in eines der interessantesten Teile der analytischen Zahlentheorie sein und auch einen Ansporn zu weiteren Untersuchungen durch die zahlreichen offenen Fragen geben. Es ist, kurz gesagt, ein Buch, das ich wärmstens empfehlen kann.

Göttingen

S.J. Patterson



R. Carroll  
**Quantum Theory,  
 Reformation and  
 Integrability**

Amsterdam u. a., Elsevier, 2000, 420 S.,  
 \$ 131,-

The book under review is a book that is written for theoretical physicists with a very broad mathematical background. It contains an impressive amount of information on topics such as integrable systems, quantum groups, different types of quantization, Whitham theory and non-commutative geometry. The exposition is non-linear and non-systematic. Let me quote from the introduction:

*We will not even try to develop mathematical topics axiomatically and will adopt style, definitions, and notation from reference sources we have found to be especially illuminating.*

This quotation summarizes perfectly the presentation of the material as well as

*It has been said that I tend to write for myself,* also taken from the introduction. Concretely the first quotation implies that basically no definitions are given (e.g., integrable system and moduli space, which are not even in the index, Hopf algebra, quantum group) and when definitions are given they leave too much to the imagination and they come in general much later in the book than their first occurrence. For example, on page 15 periodic solution to the Toda lattice are said to be associated to hyperelliptic Riemann surfaces, while we find on page 257 the following "definition" of a hyperelliptic Riemann surface:

*For hyperelliptic Riemann surfaces one can pick any  $2g + 2$  points  $\lambda_j \in \mathbf{P}^1$  and there will be a unique hyperelliptic curve  $\Sigma_g$  with a 2-fold map  $f : \Sigma_g \rightarrow \mathbf{P}^1$  having branch locus  $B = \{\lambda_j\}$ .*

I do not believe that anyone who has never heard of hyperelliptic Riemann surfaces can understand from this definition what a hyperelliptic Riemann surface is (even if he knows what a Riemann surface is). The first quotation also implies that definitions and notations vary from one section of the book to another, depending on which reference(s) is (are) compiled in that section. This might be acceptable if it is clearly stated which reference is used for the definitions and the notations, and then sticking to it, but it is not uncommon to find a list of 40–50 (!) references cited at the beginning of a section (the book itself contains 1011 references, which are given in the physics style, i.e., the title of the reference is not given). Another thing that I found strange is that very often in-line formulas are also numbered (in bold-face), moreover the labels that are chosen seem to be unlogical. For example the first numbered in-line formula in this book (on page 2) has label **(16A)**; this goes on in that section (Section 1.1) with labels up to **(16J)**, then starts a subsection (Subsection 1.1.1) with labels that start with **(18A)** and in the next subsection that has numbered in-line formulas (Subsection 1.1.4) the labels start with **(15A)**, in which subsection I also found one 4 digit label **(15DD)**. I understand that this strange labeling may come from moving around sections and/or that they derive from labels that are used in the papers (written by the author?) that are summarized in that section, but surely this will drive many readers crazy. As a final example of the sloppiness of writing, the author has chosen to use boldface in two short subsections (Subsections 6.2.2 and 6.2.3) of the book (only) to print important words, such as Abelian connection (which, I cannot resist to say it, is defined on page 345 (when the boldfacing is already used to stress words), where it does not appear in boldface,

but later on in these two sections it is sometimes printed in boldface and sometimes not).

The lack of coherence and rigor in the book is, it has to be said, largely compensated by the impressive amount of information that is given, be it in a form that is only accessible to people who are experts in the topics that are covered. Therefore, a physicist with a solid mathematical background may use this book as a reference and a guide to the literature for topics that are closely related to his field of expertise. Or, he may pass one or two section of the book to his student, asking him to make these into a coherent and rigorous text on the topic that is covered, by making him work through the references that are cited, a non-trivial task for the student and his advisor. But the beauty of the topics that are covered will certainly keep both stimulated and interested, since finally all that is asserted in the book is essentially correct, is based on rigid foundations and if its beauty is not transparent from the enormous amount of formulas (as opposed to ideas) that are present in the book, this beauty will certainly be revealed to those who take the time and courage to work through the details, by the help of the references.

To conclude, I wish to give, rather than summarizing the contents of each section, a list of the main topics that are covered:

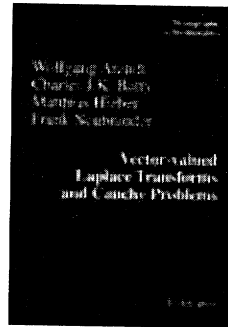
- Integrable systems  
Toda, KdV, KP, discrete KP, dToda, Gaudin model, Hitchin systems;
- Important equations and theories  
Whitham theory, Seiberg-Witten theory, KZB equations, WDVV equations, JMMS equations, Hirota equations, Picard-Fuchs equation;
- Geometric structures  
Poisson structures, symplectic 2-forms, Nambu brackets,  $r$  and  $R$  matrices;
- Quantization topics  
Deformation quantization, geometric quantization, quantum groups, Poisson-Lie groups, Berezin star product, Berezin Toeplitz quantization, Moyal product,

groupoids, non-commutative gauge theory, quantized strings, quantized enveloping algebras, path integrals, Frobenius manifolds

- Algebraic geometric objects  
Riemann surfaces, moduli spaces, Higgs bundles, Jacobians, Abelian varieties, K3 surfaces, Baker-Akhiezer functions.
- ... and much more ...!

Poitiers

P. Vanhaecke



R. Carroll  
**Quantum Theory,  
Reformation and  
Integrability**

Basel u. a., Birkhäuser, 2001, 536 S.,  
EUR 105,80

Für Generationen von Mathematikern, Physikern und Ingenieuren war die Laplace-Transformation *das* Instrument zur Lösung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen, und G. Doetsch hat in den 50-er Jahren die einschlägigen Techniken in seinem monumentalen „Handbuch der Laplace-Transformation“ [Doe 50] zusammengestellt. Viel davon ist im Zeitalter von schnellen Algorithmen und Computeralgebra obsolet geworden. Anders ist die Situation für partielle Differentialgleichungen, die selbst im linearen Fall auch heute noch eine große Herausforderung darstellen. Die Behandlung von Anfangswertproblemen mittels Laplacetransformation macht allerdings auch bei partiellen Differentialgleichungen Sinn, wenn man die gegebene Gleichung als gewöhnliche Differentialgleichung

$$(ACP) \quad \frac{d}{dt} u(t) = Au(t), \quad u(0) = x,$$

für eine Banachraumwertige Funktion  $u(\cdot)$  und einen (unbeschränkten) linearen Operator  $A$  schreibt.

Formal kann ein solches „abstraktes Cauchyproblem“ (ACP) wie im endlichdimensionalen Fall gelöst werden, indem man die Laplacetransformation

$$\hat{u}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda s} u(s) ds, \quad \lambda \in C \text{ geeignet,}$$

von  $u$  betrachtet. Elementare Eigenschaften implizieren, dass  $u$  genau dann eine Lösung von (ACP) ist, wenn

$$(\lambda - A)\hat{u}(\lambda) = x$$

gilt oder, falls  $(\lambda - A)$  invertierbar ist, wenn

$$\hat{u}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} x,$$

ist. Hier ist der Ableitungsoperator  $\frac{d}{dt}$  verschwunden und durch die Resolvente  $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$  des Operators  $A$  ersetzt worden. Die Lösung von (ACP) kann dann als inverse Laplacetransformation von  $\hat{u}$  und mittels der folgenden Formeln gefunden werden:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{w+i\mathbb{R}} e^{\lambda t} \hat{u}(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \hat{u}^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A\right)^{-n} x. \end{aligned}$$

Diese im endlichdimensionalen Fall bewährte Methode spielte eine entscheidende Rolle bei der Lösung von (ACP) mittels Operatorhalbgruppen (siehe [E-N00], Chap. VI). So räumen E. Hille – R. Phillips der Banachraumwertigen Laplacetransformation in ihrem Klassiker „Functional Analysis und Semi-Groups“ [HP57] einen großen Raum ein. Das fundamentale Theorem von Hille-Yosida, das die Wohlgestelltheit von (ACP) charakterisiert, kann als ein Versuch angesehen werden, das folgende Theorem von D.V. Widder von 1936 [Wid 36], eines der zentralen Resultate der klassischen Theorie der La-

placettransformation, für spezielle Banachraumwertige Funktionen (z. B. Resolventen) zu verallgemeinern:

Die Laplacetransformation ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen  $L^\infty[0, \infty)$  und dem Banachraum der  $C^\infty$ -Funktionen  $r(\cdot)$  auf  $(0, \infty)$  mit Norm

$$\|r(\cdot)\|_W := \sup_{\lambda > 0, n \in \mathbb{N}} \left| \lambda^{n+1} \frac{1}{n!} r^{(n)}(\lambda) \right| < \infty.$$

W. Arendt gelang es 1987 [Are] diesen Satz in Laplace-Stieltjes Gestalt auf Funktionen mit Werten in beliebigen Banachräumen auszudehnen. Damit war die Möglichkeit zu einer einheitlichen und allgemeinen Theorie der Banachraumwertigen Laplacetransformation mit vielfältigen Anwendungen gegeben. In der vorliegenden Monographie wird dies realisiert.

Im ersten und umfangreichsten Teil werden die grundlegenden Eigenschaften der Banachraumwertigen Laplacetransformation im Detail behandelt. Diese Ergebnisse werden dann angewandt, um für abstrakte Cauchyprobleme (ACP) Wohlgestelltheit zu beweisen. Dabei erscheinen integrierte Halbgruppen, starkstetige Halbgruppen oder holomorphe Halbgruppen, und ihre jeweiligen Charakterisierungen sind Folgerungen aus Darstellungssätzen für die Laplacetransformation und ihre Inverse.

Das Ziel der Arbeit der Autoren im zweiten Teil ist es, das Verhalten der Lösungen  $u(t)$  von (ACP) für  $t \rightarrow \infty$  durch Eigenschaften der Laplacetransformierten  $\hat{u}$  zu beschreiben. Wie oben geschildert ist  $\hat{u}$  durch die Resolvente  $R(\lambda, A)$  von  $A$  gegeben, die wiederum durch spektraltheoretische Eigenschaften von  $A$  charakterisiert werden kann. Als typisches Beispiel sei hier der folgende Satz von W. Arendt – C. Batty [AB88] und Y.J. Lyubich – Q.P. Vu [LV88] zitiert (Theorem 5.5.6):

Wenn  $(T(t))_{t \geq 0}$  eine beschränkte, stark stetige Halbgruppe auf einem reflexiven Banachraum ist und das Spektrum des Generators auf  $i\mathbb{R}$  höchstens abzählbar ist, dann ist  $(T(t))_{t \geq 0}$  asymptotisch fast-periodisch.

Dies und viele weitere Resultate werden bewiesen auf der Grundlage von Tauberischen Sätze für die Laplacetransformation.

Im abschließenden Teil „Applications and Examples“ werden die Wärmeleitungsgleichung in  $C_0(\Omega)$ , die Wellengleichung in  $L^2(\Omega)$  und Cauchyprobleme für beliebige Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  auf Existenz und Eigenschaften von Lösungen untersucht. Hier zeigt die vorher entwickelte Theorie, dass sie viele und interessante Anwendungen ermöglicht.

Insgesamt haben die vier Autoren ein gewaltiges Werk vorgelegt und den aktuellen Stand der Theorie der unendlichdimensionalen Laplacetransformation und ihre möglichen Anwendungen eindrucksvoll dokumentiert. Das Buch ist eine wichtige und unentbehrliche Referenz für alle Mathematiker, Physiker und Ingenieure, die sich für die Laplacetransformation und ihre Anwendung auf unendlichdimensionale Evolutionsgleichungen interessieren.

Dass die Lektüre außerdem Spaß machen kann, ist unter <http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/arendt/bild1.jpg> einzusehen.

- [Are87] W. Arendt. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. *Israel J. Math.* **59** (1987), 327–352.
- [AB88] A. Arendt, C.J.K. Batty. Taberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Amer. Soc.* **306** (1988), 837–852.
- [Doe50] G. Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformation*. Vol. I,II,III. Birkhäuser, Basel 1950, 1955, 1956.
- [EN00] K.J. Engel, R. Nagel. *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag, Berlin 2000.
- [HP57] E. Hille, P.S. Phillips. *Functional Analysis and Semigroups*. Amer. Math. Soc., Providence 1957.
- [LV88] Y.J. Lubich, Q.P. Vū. Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces. *Studia Math.* **88** (1988), 37–42.
- [Wid36] D.V. Widder, A classification of generating functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** (1936), 244–298.

Tübingen

R. Nagel

# **Das Optimierungsbuch für Lehre und Praxis**

Josef Kallrath

## **Gemischt-ganzzahlige Optimierung:**

### **Modellierung in der Praxis**

Mit Fallstudien aus Chemie, Energiewirtschaft, Metallgewerbe,  
Produktion und Logistik

2002. XVI, 291 S. Geb. EUR 48,90

ISBN 3-528-03141-7

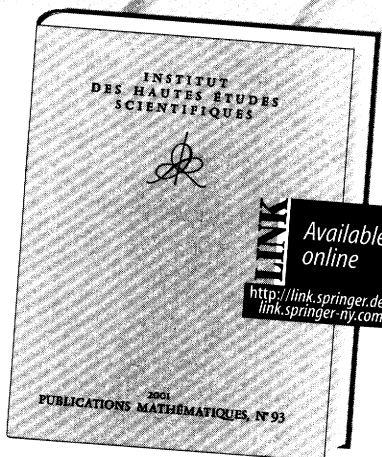
**Inhalt:** Einführung: Modelle, Modellbildung und Optimierung -  
Einführende motivierende Beispiele - Optimierung in der Praxis -  
Grundlagen der Mathematischen Lösungstechniken - Die Kunst  
guter Modellierung - Lineare Optimierung in der Praxis - Ge-  
mischt-ganzzahlige lineare Optimierung in der Praxis - Nicht-  
lineare Optimierung in der Praxis - Gemischt-ganzzahlige nicht-  
lineare Optimierung in der Praxis - Globale Optimierung in der  
Praxis - Schlussbetrachtungen und Ausblick - Anhang: Mathema-  
tische Beschreibung der Optimierungsverfahren

Das Praxis-Buch beschreibt und lehrt, wie in der Industrie, vor-  
nehmlich der Prozessindustrie, aber auch anderen Anwendungs-  
bereichen, gemischt-ganzzahlige Optimierung eingesetzt wird,  
wie Probleme modelliert und letztlich erfolgreich gelöst werden  
können. Das Buch verbindet Modellbildungsaspekte und  
algorithmische Aspekte aus den Bereichen kontinuierlicher und  
gemischt-ganzzahliger, linearer und nichtlinearer und schließlich  
globaler Optimierung. Es schließt mit Betrachtungen über den  
Impakt, den diese Methodik in der heutigen Industriegesellschaft  
hat; insbesondere auch auf dem Hintergrund von Supply-Chain  
Management und der globalen Einführung von Softwarepaketen  
wie SAP.



Erhältlich im Buchhandel oder beim Verlag. Änderungen vorbehalten.

Vieweg Verlag · Abraham Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden  
Fax: 0611.7878-400 · [www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



## New with Springer

# Publications Mathématiques

de l'Institut des  
Hautes Études Scientifiques

Publications Mathématiques de l'IHÉS is an international journal publishing papers of the highest scientific level. Thanks to its worldwide distribution (it can be found in the libraries of the major mathematical institutions in the world), to its tradition of publishing landmark articles and to its broad coverage of the discipline, it has won international recognition.

A selection of outstanding articles published in the **Publications Mathématiques**:

*H. Bass/J. Milnor/J.-P. Serre*: Solution of the congruence subgroup problem for  $SL_n$  and  $Sp_{2n}$ . – *J.-M. Bismut/G. Lebeau*: Complex immersions and Quillen metrics. – *J. Bourgain*: Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. – *Bruhat/J. Tits*: Groupes réductifs sur un corps local I, II. – *A. Connes*: Non-commutative differential geometry. – *P. Deligne*: La conjecture de Weil I, II. – *H. Gillet/C. Soulé*: Arithmetic intersection theory. – *M. Gromov/I. Piatetski-Shapiro*: Non arithmetic groups in Lobachevsky spaces. – *A. Grothendieck*: Éléments de géométrie algébrique I, II, III, IV. – *M.R. Herman*: Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. – *R. Mañé*: A proof of the  $C^1$ -stability conjecture. – *J.N. Mather*: Stability of  $C^\infty$  mapping III, IV.

### Editor-in-Chief:

Étienne Ghys, Lyon, France

### Editorial Board:

J. Bourgain, Princeton, NJ

A. Connes, Bures-sur-Yvette

P. Deligne, Princeton, NJ

É. Ghys, Lyon

M. Gromov, Bures-sur-Yvette

M. Kontsevitch, Bures-sur-Yvette

L. Lafforgue, Bures-sur-Yvette

D. Sullivan, Stony Brook, NY

### Subscription information 2002:

Volumes 95 + 96 (2 issues) incl. basic LINK licence  
€ 280, plus carriage charges

ISSN 0073-8301 (print)

ISSN 1618-1913 (electronic)

Title No. 10240

Order your free sample copy now:

[subscriptions@springer.de](mailto:subscriptions@springer.de)

[http://www.springer.de/math/journals/c\\_10240.html](http://www.springer.de/math/journals/c_10240.html)

Please order from  
Springer - Customer Service  
Haberstr. 7  
69126 Heidelberg, Germany  
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 240  
Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 229  
e-mail: [subscriptions@springer.de](mailto:subscriptions@springer.de)  
or through your bookseller

Plus carriage charges. Price subject to change without notice.  
In EU countries the local VAT is effective. d&p · 8307a/SF

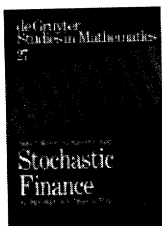


Springer



# New releases

## de Gruyter Studies in Mathematics



Hans Föllmer, Alexander Schied

### ■ Stochastic Finance

An Introduction in Discrete Time

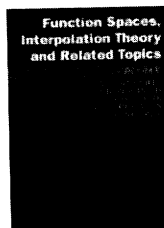
2002. X, 422 pages. Hardcover.  
€ 54,- [D] / sFr 86,- / for USA, Canada and  
Mexico US\$ 59.95  
ISBN 3-11-017119-8

## de Gruyter Proceedings

### ■ Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics

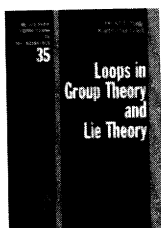
Proceedings of the International Conference  
in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday.  
Lund, Sweden August 17–22, 2000

Ed. by Michael Cwikel / Miroslav Engliš /  
Alois Kufner / Lars-Erik Persson / Gunnar Sparr



2002. X, 462 pages. 1 plate. Hardcover.  
€ 138,- / sFr 221,- / for USA, Canada and  
Mexico US\$128.95  
ISBN 3-11-017117-1

## de Gruyter Expositions in Mathematics



Peter T. Nagy / Karl Strambach

### ■ Loops in Group and Lie Theory

2002. XII, 361 pages. Hardcover.  
€ [D] 148,- / sFr 237,- / for USA, Mexico and  
Canada US\$ 138.95  
ISBN 3-11-017010-8



de Gruyter  
Berlin · New York

[www.deGruyter.de](http://www.deGruyter.de)

Please place your order with your local bookseller or  
order directly from us. Prices are subject to change.

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG · Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin  
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0 · Fax +49-(0)30-2 60 05-251 · E-Mail [wdg-info@deGruyter.de](mailto:wdg-info@deGruyter.de)

# **Das Lern- und Übungsbuch für Ingenieure**

Karl Graf Finck von Finckenstein, Jürgen Lehn,  
Helmut Schellhaas, Helmut Wegmann

## **Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure Band II: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Numerik und Statistik**

2002. X, 498 S. Br. EUR 34,90

ISBN 3-519-02972-3

Inhalt: Differentialgleichung - Funktionentheorie - Numerik - Statistik

Der zweite Band behandelt die Themen Differentialgleichung, Funktionentheorie, Numerik und Statistik. Das Konzept des Arbeitsbuchs ist so angelegt, dass zunächst die Fakten (Definitionen, Sätze usw.) dargestellt werden. Durch zahlreiche Bemerkungen und Ergänzungen werden die Fakten jeweils aufbereitet, erläutert und ergänzt. Die zahlreichen Beispiele fördern das Verständnis, das am Ende eines jeden Kapitels in Form von Tests und Übungsaufgaben überprüft werden kann. Zu den Tests und Übungsaufgaben sind die Lösungen angegeben. Das Arbeitsbuch erfordert so die aktive Mitarbeit des Lesers, andererseits kann es auch als Nachschlagewerk dienen.

Karl Graf Finck von Finckenstein, Jürgen Lehn,  
Helmut Schellhaas, Helmut Wegmann

## **Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure Band I: Analysis**

2000. 364 S. Br. EUR 24,00

ISBN 3-519-02966-9

Erhältlich im Buchhandel oder beim Verlag. Änderungen vorbehalten.

Teubner Verlag · Abraham Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden  
Fax: 0611.7878-400 · [www.teubner.de](http://www.teubner.de)



## **Die faszinierende Welt der Technomathematik**

Hans Josef Pesch

### **Schlüsseltechnologie Mathematik**

Einblicke in aktuelle Anwendungen der Mathematik

2002. 185 S. Br. EUR 22,90

ISBN 3-519-02389-X

Inhalt: Mathematik: Eine Herausforderung an die Gesellschaft - Die Brachistochrone: Eine Herausforderung des 17. Jahrhunderts - Neue mathematische Disziplinen: Herausforderungen für Generationen - Herausforderungen heute - Herausforderungen morgen - Die ultimative Herausforderung: Rechnen gegen die Zeit - Aufgaben und Lösungen

Die Mathematik ist nicht nur eine klassische Kulturwissenschaft, sondern eine Schlüsseltechnologie der Zukunft. Unaufhaltsam und nahezu unbemerkt durchdringt sie immer mehr unseren Alltag. Dessen ungeachtet ist die Zahl der Studierenden mathematischer und mathematikrelevanter Studiengänge seit Jahren rückläufig - und das wird zur **Herausforderung für unsere Gesellschaft**. Vor mehr als 300 Jahren hat der Baseler Mathematiker Johann Bernoulli mit einer berühmt gewordenen Preisfrage die Mathematiker seiner Zeit herausgefordert. Er stieß damit ein Tor zu einem neuen Gebiet der Mathematik auf, mit weit reichendem Anwendungspotential bis hin zur modernen Luft- und Raumfahrt. Der Autor dieses Teubner-Buches, Professor für Ingenieurmathematik, gibt auf anschauliche Weise Einblicke in aktuelle mathematische Forschungen und deren Anwendungen: in der Luft- und Raumfahrt, der Robotik, der Fahrzeug- und Verfahrenstechnik und der Ökonomie. Der Leser erfährt, wie man heute Flugbahnen von Raumfahrzeugen, Bewegungen von Robotern oder den Verlauf chemischer Prozesse optimiert, wie man ökonomische Abläufe und Zusammenhänge erfasst oder wie neue Kraftfahrzeuge getestet werden, noch bevor ein teurer Prototyp gebaut worden ist.

Erhältlich im Buchhandel oder beim Verlag. Änderungen vorbehalten.

Teubner Verlag · Abraham Lincoln-Str. 46 · 65189 Wiesbaden  
Fax: 0611.7878-400 · [www.teubner.de](http://www.teubner.de)



